UNA PROPUESTA DIDACTICA PARA USAR LA DISTRIBUCIÓN ji-cuadrado (x^2) COMO PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE

Rafael Barahona Gómez
Master en Educación Matemática

La necesidad de realizar una prueba de bondad de ajuste surge cuando no estamos seguros de la forma en como se distribuye un conjunto de frecuencias observadas (obtenidas del medio o entorno que se estudia). El Propósito es determinar si existe o no alguna diferencia significativa entre una distribución de probabilidad teórica previamente hipotetizada y una distribución de frecuencias observadas.

Con mayor precisión una prueba de bondad de ajuste sirve para poder aceptar o no si una serie de datos obtenidos de una muestra tiene determinada forma de distribuirse, existen varias distribuciones de probabilidad teóricas que sirven para éste propósito y una de las más usadas es la ji-cuadrado (x^2).

La propuesta que hago consiste en realizar la prueba en cinco pasos que consisten básicamente en:

Paso 1: Se formulan las hipótesis nulas (H_0) y alternativa (H_1). Luego se especifica el nivel de significancia (tamaño del error tipo I que se desea cometer).

Paso 2: Aquí se declara si la prueba a realizar es de una o dos colas (extremos), la distribución teórica a usar en éste caso es (x^2) y por último se encuentra el o los valores críticos.
Los valores críticos son valores numéricos que se encuentran en tablas especiales y nos marcan la frontera entre la zona de aceptación y la zona de rechazo, es decir que los valores críticos junto al valor experimental encontrado de los datos muestrales, avalan la decisión que sobre la hipótesis nula se tome.

Paso 3: Se encuentran las frecuencias esperadas (frecuencias que teóricamente deberíamos tener en el caso de que la H_0 fuese cierta) y se comparan con las frecuencias observadas (frecuencias que obtengo de la muestra). Es decir obtenemos un x^2 práctico.

Paso 4: Se hace un gráfico adecuado en una curva que represente la distribución de x^2 con el número particular de grados de libertad que se obtienen del número de clases menos uno (1). En éste gráfico se ubican los valores teóricos y prácticos de x^2, para visualizar la relación que existe entre ellos.

Paso 5: De acuerdo a la relación que exista entre los valores práctico y teóricos, se tomará la decisión de aceptar o rechazar la H_0.

La prueba finaliza con la decisión que se toma en el paso 5, es bueno aclarar que los dos últimos pasos propuestos son redundantes, dado que la decisión se puede tomar al finalizar el paso 3, pero como el propósito es que el alumno realmente tome una decisión sobre la hipótesis nula y

que no le quede duda que hizo lo correcto, soy de la opinión que los últimos pasos son como una garantía de que la decisión tomada fue la adecuada.
En la práctica estos cinco pasos propuestos para realizar una prueba de bondad de ajuste se aplican con pequeñas variantes, que están determinadas por el tipo de distribución de probabilidad que asumimos tienen los datos obtenidos de la muestra y que deseamos probar que en realidad se comportan así:

Veamos como se realiza una prueba de bondad de ajuste.

APLICACIÓN No. 1

Prueba de Bondad de Ajuste para la Normalidad

Esta prueba sirve para determinar si un conjunto de frecuencias observadas coincide con un conjunto de frecuencias esperadas que tiene una distribución normal. Es decir, la pregunta a responder es: **¿Coinciden los valores observados de una distribución de frecuencia con los valores esperados según una distribución normal?** Ejemplo: Los fabricantes de una terminal de computadora reportan en su publicidad que la vida media de la terminal es 6 años, con una desviación estándar de 1.4 años. En una muestra de 90 terminales vendidos hace 10 años se encontraron los siguientes tiempos de vida (ver tabla).

Distribución del Tiempo de Vida de una Terminal de Computadora

Tiempo de Vida	f
Menos de 4	7
De 4 a 5	14
De 5 a 6	25
De 6 a 7	22
De 7 a 8	16
Más de 8	6

¿Puede concluir el fabricante, con un nivel de significancia del 5 %, que la vida de las terminales tiene una distribución normal?

Haremos una prueba de hipótesis siguiendo los cinco pasos que normalmente se dan.

Paso 1.- H_0: La distribución normal (z) es una buena descripción del comportamiento de la vida de las terminales de computación.

H_1: La distribución normal (z) no es una buena descripción del comportamiento de la vida de las terminales de computación.
$\alpha = 5\% = 0.05$

Paso 2. - * Tipo de prueba: un extremo (derecho).
* La distribución a usar: x^2 (ji-cuadrado).
* Valor crítico: x^2_D = **11.070**

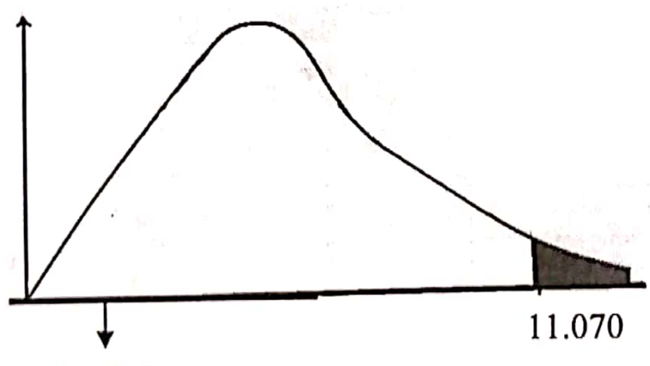
gl = # de clases – 1
= 6 – 1 = 5

Paso 3.- Aquí encontraremos las frecuencias esperadas y luego calculamos el x^2 práctico.

* **f_e=(área bajo la curva) n**

Tiempo de Vida	f	Asea bajo	f_e	$f_o - f_e$	$(f_0 - f_e)^2$	$(f_o - f_e)^2$
Menos de 4	7	0.0764	6.88	- 0.12	0.0144	0.0021
De 4 a 5	14	0.1625	14.65	- 0.63	0.3969	0.0271
De 5 a 6	25	0.2611	23.50	1.50	2.2500	0.0957
De 6 a 7	22	0.2611	23.50	- 1.50	2.2500	0.0957
De 7 a 8	16	0.1625	14.63	1.37	1.8769	0.1283
Más de 8	6	0.0764	6.88	- 0.88	0.7744	0.1126
	90				Σ	0.4615

Paso 4.- Se grafican los valores críticos (teóricos y prácticos)



Paso 5.- **¿Qué decisión sobre H_0 se toma?** Se acepta la **H_0**, significa que la distribución normal describe bien el comportamiento de la vida de una terminal de computadora.

APLICACIÓN No. 2

Prueba de Bondad de Ajuste para la Binomial

Se realiza esta prueba cuando deseamos saber si un conjunto de frecuencias observadas coincide con un conjunto de frecuencias esperadas que tiene una distribución binomial. En éste caso la pregunta que responderemos es la siguiente **¿Coinciden los valores observados u obtenidos de una distribución de frecuencia con los valores esperados según una distribución binomial?** Ejemplo: Marini Guifarri asegura poseer poderes psíquicos que le permiten adivinar correctamente el tipo de carta (diamantes, espadas, tréboles y corazones) escogida al azar con una probabilidad de 0.5.

Dado que las cartas se escogen aleatoriamente de una baraja es de suponer que las estimaciones de Guifarri son independientes. Se escogió una muestra aleatoria de 100 días en los que Guifarri hizo 10 estimaciones y se obtuvieron los siguientes resultados:

# de estimaciones correctas por día	0 – 2	3 – 5	6 – 8	8 – 10
Frecuencia del número de estimaciones correctas	50	47	2	1

Queremos saber si estas frecuencias obtenidas están distribuidas binomialmente con **n = 10** y **p = 0.5** En este caso la prueba de hipótesis a realizar se plantea así:

Paso 1.- **H_0**: Las estimaciones correctas de Guifarri se distribuyen binomialmente con **n = 10** y **p= 0.5**

H_1: Las estimaciones correctas de Guifarri no se distribuyen binomialmente con **n = 10** y **P = 0.5** (tienen otra distribución).
$\alpha = 10\% = 0.1$

Paso 2.- * Tipo de prueba: un extremo (derecho).
* Distribución a usar: x^2 (ji-cuadrado).
* Valor crítico: x^2_D **= 6.251**
$gl = K - 1 = 4 - 1 = 3$

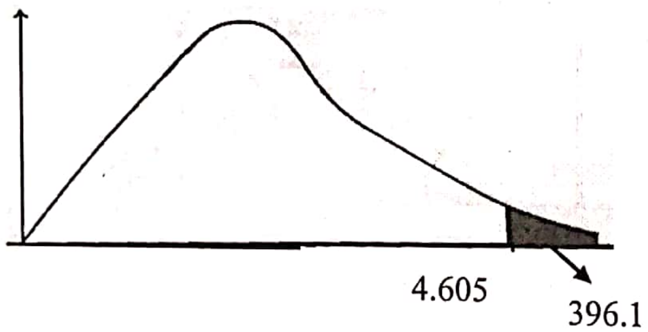
Paso 3.- Aquí se encuentran las frecuencias esperadas y luego se encuentra el χ^2 práctico.

# de estimaciones correctos por día	F	Probabilidades Según la Binomial	f_e
0 – 2	50	0.0547	5.47
3 – 5	47	0.5684	56.84
6 – 8	2	0.3662	36.62
9 – 10	1	0.0108	1.08

* Dado que la clase 9- 10 tiene una f_e =1.08 se suma a la anterior 6-8 y la tabla se transforma en la siguiente.

# de Estimaciones Correctas por día	f	Probabilidades s/ la Binomial	f_e	$f_o - f_e$	$(f_o - f_e)^2$	$\frac{(f_o-f_e)^2}{f_e}$
0 – 2	50	0.0547	5.47	44.53	1982.92	362.51
3 – 5	47	0.5684	56.80	- 9.84	96.83	1.70
6 – 10	3	0.3770	37.70	- 34.70	1204.09	31.94
					Σ =	396.15

Paso 4.- Se grafican los valores teóricos y prácticos.



* Observación: El valor crítico ya no es el del paso 2, porque eliminamos una clase (9-10). Por ello los **gl=3-1=2 y x^2_D = 4.605**

Paso 5.- **¿Qué decisión sobre H_0 se toma?** Se rechaza H_0.
Lo anterior indica que las estimaciones correctas de Guifarri no se distribuyen como la binomial.

El estimado lector se habrá dado cuenta que realizar pruebas de bondad de ajuste es relativamente fácil, siguiendo los cinco pasos propuestos, los he aplicado con mis alumnos y los resultados son alentadores.

BIBLIOGRAFIA

Haroldo Elorza (1999). Estadística para las Ciencias Sociales y del comportamiento.
Editorial OXFORD, University Press, 2da. Edición

Douglas A. Lind y otros. (2004). Estadística para administración y Economía.
Editorial Mc. Graw Hill, 3era. Edición

Wayne W. Daniel. Estadística con aplicaciones a las Ciencias Sociales y a la Educación
Editorial Mc. Graw Hill, México. D.F.

Richard I. Levin y David S. Rubin (1996). Estadística para administradores
Editorial Prentice-Hall. 6ta. Edición. México.. D.F.

Mendenhall y otros. Matemática con aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica.

John E. Freund y otros. (2000) Estadística Matemática con aplicaciones
Editorial Prentice-Hall. 6ta. Edición.