

# INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL USO DE MODELOS ALTERNATIVOS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN CON ESTUDIANTES DE PRIMER CURSO DE CICLO COMÚN.

**Mario Roberto Canales**  
Master en Matemática Educativa

## I. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pone en evidencia las dificultades que presentan los estudiantes que egresan de la escuela primaria, principalmente en relación con las cuatro operaciones básicas con números naturales. La enseñanza de estas operaciones por medio del algoritmo tradicional ha traído grandes problemas, entre ellos se pueden mencionar: significado del valor posicional, estrategias de resolución de problemas, desunión de las operaciones básicas, autonomía y pensamiento crítico de los estudiantes, y otros más.

De las operaciones básicas donde existen más problemas se tiene la multiplicación y la división, que fue donde se centro la atención de este trabajo. Y para tratar de solucionar el problema que presenta la enseñanza del algoritmo tradicional, se trabajó con métodos alternativos para resolver multiplicaciones y divisiones. En la multiplicación se utilizó la suma reiterada y la propiedad distributiva, en la división se utilizó la suma reiterada, la resta reiterada, la tabla del divisor y la propiedad distributiva.

## II PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La base fundamental de la aritmética se enseña en la escuela primaria, donde se estudian las operaciones básicas con números naturales, enteros, fracciones y decimales. Su buena comprensión permite que el estudiante tome con mejores posibilidades las demás etapas del aprendizaje de la matemática.

Sin embargo existen dificultades en el aprendizaje de las operaciones básicas con números naturales, principalmente en la multiplicación y la división. Se considerará la problemática desde tres puntos de vista:

1. Institucional.
2. Departamental y Nacional
3. Internacional

Desde el punto de vista Institucional, se ha aplicado una prueba diagnóstica desde 1999-2005 a los estudiantes de primer curso del Instituto José Trinidad Reyes, dicha prueba contenía 8 ejercicios:

1)  $12,459 + 3,798 + 603$

2)  $124,829 + 36 + 4,765 + 9003$

3)  $12,001 - 7493$

4)  $6,749 - 3,074$

5)  $342 \times 28$

6)  $1,302 \times 301$

7)  $8493 \div 5$

8)  $34,381 \div 54$

El objetivo era medir el dominio que los estudiantes tienen de las cuatro operaciones básicas con números naturales. Los resultados son los siguientes:

**Tabla. N° 1**

	Preguntas								
Año	1	2	3	4	5	6	7	8	n. estudiantes
1999	64%	52%	26%	68%	49%	33%	65%	27%	228
2000	53%	48%	23%	66%	55%	31%	57%	29%	285
2001	62%	51%	26%	74%	59%	35%	67%	21%	121
2002	67%	51%	30%	74%	59%	40%	62%	27%	662
2003	60%	42%	27%	74%	53%	38%	65%	30%	723
2004	56%	39%	34%	70%	59%	45%	71%	35%	414
2005	66%	50%	36%	77%	57%	46%	68%	33%	404

Porcentaje de aciertos en la prueba diagnóstica aplicada en el periodo de 1999-2005

En la tabla se puede observar que los ejercicios 8, 3, 6, 2, 5 en ese orden, son los que Presentan porcentajes de éxito menores de 60%.

Desde el punto de vista Departamental y Nacional, en el Informe Departamental de Cortés de Rendimiento Académico (2002 b: 58) nos dice que una de las competencias donde se



observa mayor problema es la relacionada con la "resolución de problemas utilizando los algoritmos de multiplicación y división de números naturales".

**Los datos obtenidos en dicho informe (2002 b: 60), son los siguientes:**

**Tabla N° 2**

En el Departamento de Cortés				A nivel Nacional			
Nulo	Insuficiente	Básico	Avanzado	Nulo	Insuficiente	Básico	Avanzado
48.27	35.19	12.57	3.97	44.04	35.39	15.32	5.24

Comparación de rendimientos del Departamento de Cortés y El rendimiento Nacional.

En la tabla 2, se observa que la tendencia en el departamento de Cortés con el del Nivel Nacional muestra deficiencias significativas. Esto significa que existen problemas tanto a nivel de Cortés como a nivel Nacional en esta competencia.

Además, el informe nacional de rendimientos académicos de tercero y sexto grados (UMCE, 2002 a: 3) presenta entre sus hallazgos principales lo siguiente:

"En el paso de tercero a sexto grado los alumnos mejoran su rendimiento en Español y Ciencias Naturales, pero lo empeoran en Matemáticas"

Desde el punto de vista internacional nuestro país ha sido evaluado internacionalmente en estos dos aspectos, de lo cuál según el informe del Progreso Educativo de Honduras (2001: 11), nuestro país ocupa el penúltimo lugar en cuanto a conocimiento de la matemática en su nivel primario, situación que preocupa a toda la comunidad en general.

Lo anteriormente descrito permite plantear el siguiente problema:

**1. Deficiencias en el aprendizaje de los algoritmos de la multiplicación y división en los alumnos del primer curso del ciclo común.**

A partir de esas preguntas se planteó el siguiente **Objetivo general**:

**1. Explorar otros modelos didácticos orientados a favorecer el aprendizaje significativo de los algoritmos de la multiplicación y la división.**

Y los siguientes **objetivos específicos** de investigación:

1. Determinar si los estudiantes de primer curso son capaces de comprender los modelos alternativos para multiplicar y dividir.
2. Describir el desempeño de ese grupo de estudiantes al utilizar modelos alternativos para multiplicar y dividir.

3. Determinar cuáles son los modelos alternativos que ellos mejor comprendieron.
4. Determinar si en una situación problemática los estudiantes son capaces de utilizar modelos alternativos para resolver multiplicaciones y divisiones.

### III MARCO TEÓRICO

#### La enseñanza de los algoritmos tradicionales

La enseñanza de los algoritmos tradicionales se ha cultivado durante mucho tiempo, es la que pone énfasis en el dominio y ejecución de las operaciones aritméticas básicas, lo cual se ha traducido en una gran inversión de tiempo (desde el primer grado hasta el séptimo grado) y esfuerzo por parte de los profesores para que los estudiantes logren un manejo aceptable de los algoritmos en la ejecución de las operaciones.

De acuerdo con las investigaciones realizadas por algunos autores, que se mencionarán a continuación, la enseñanza de los algoritmos tradicionales en los primeros cursos es perjudicial, veamos cuales son las consecuencias de esto:

#### Kami (1995: 49) encuentra cinco problemas:

1. Los algoritmos fuerzan a los niños a renunciar a su propio pensamiento.
2. Los algoritmos "malenseñan" el valor posicional e impiden que los niños desarrollen el sentido de número.
3. Los algoritmos hacen que los niños dependan de la distribución espacial de las cifras (o papel y el lápiz) y de otras personas.
4. El objetivo a corto plazo en enseñar algoritmos, está en contradicción con la meta a largo plazo de desarrollar la autonomía y el conocimiento lógico matemático de los niños.
5. Impide al niño pensar de manera crítica y autónoma. (1994 a: 73)

#### Y los otros problemas son:

6. Los algoritmos producen dificultad en la resolución de problemas.
7. Para Brosseau (2000: 13) separa el aprendizaje del algoritmo, del aprendizaje de su sentido.
8. Kaplan, Yamamoto, Ginsburg (1989: 111) opinan que la verificación de las respuestas obtenidas algorítmicamente por parte de los niños es imposible
9. Para estos mismos autores (1989: 112) creen que llevan a pensar en que la solución es única.
10. Para Segarra (2002: 40) estimula el cálculo rutinario y para Cedillo (1999: 17) propicia el aprendizaje mecanicista que parece no favorecer la comprensión de conceptos ni un uso eficiente de la aritmética para resolver problemas.



11. Perkins y Simmons (citado por Trigo, 1997: 43) opinan que crean tipos de patrones de falso aprendizaje
12. La enseñanza por medio de los algoritmos no une la estructura de las cuatro operaciones básicas.
13. El Grupo Azarquiel (1993: 139) opina que el carácter algorítmico impide el transito de la aritmética al álgebra.

## Los algoritmos alternativos

Dentro de la concepción de los algoritmos tradicionales, se hace la consideración que es la única manera de resolver cálculos numéricos, sin embargo existen otros modelos o técnicas para llegar a las mismas respuestas, esas otras técnicas son llamadas no tradicionales o alternativas, estos rompen con el esquema operacional planteado desde hace mucho tiempo.

Esto no es nuevo, según Fuson citado por Peñafiel, (1996: 95), los niños antes de entrar a la escuela descubren e inventan sus propias matemáticas, para Kamii (1995: 50) ellos utilizan métodos informales o alternativas. Pero, Kaplan, Yamamoto, Ginsburg (1989: 122) sostienen que una vez que llegan a la edad escolar y aprenden la aritmética escrita, su matemática informal desaparece, o bien los niños olvidan como usar esas habilidades, o se doblegan ante la presión de enfoques educacionales convencionales.

## Teoría del cambio conceptual

La idea que presupone la enseñanza – aprendizaje de modelos alternativos representa un choque en la concepción tradicional, esto sucede ya que los docentes de la escuela primaria desconocen estos modelos alternativos, a raíz de esto ellos sólo enseñan el algoritmo tradicional. Los docentes y los estudiantes de primaria, poseen los distintos conocimientos: semántico, conceptual, esquemático, procedimental y estratégico ligados al algoritmo tradicional. Cambiar este tipo de conocimientos no resulta nada fácil, ya que las estrategias de ambos está encaminada a encontrar una respuesta y no comprender el hallazgo del mismo. El uso de algoritmos alternativos conlleva a tratar de comprender los algoritmos tradicionales, como históricamente se mostró, aunque parece ser un camino más largo; este es el mejor.

Sin embargo, esto lleva a cambiar de estrategias y una de ellas es la teoría del cambio conceptual, según Mayer (2002: 189): "el punto de vista de cambio conceptual es que el

aprendizaje ocurre cuando nuestro modelo mental (o concepción inicial) es reemplazado por uno nuevo".

Para este mismo autor, se destacan tres fases en esta teoría:

- a) Reconocimiento de un error.
- b) Construir un nuevo modelo
- c) Usar un nuevo modelo.

## **IV METODOLOGÍA**

### **Tipo de investigación**

El tipo de estudio que se realizó es exploratorio cualitativo, de la situación de aprendizaje de los estudiantes de primer curso del Instituto José Trinidad Reyes; basado en el desempeño de los estudiantes en la realización de multiplicaciones y divisiones con números naturales utilizando métodos alternativos.

### **Participantes en el estudio**

El trabajo se realizó con tres grupos de estudiantes de las secciones 6, 10 y 27 de primer curso de ciclo común del Instituto "José Trinidad Reyes". El experimento se llevó a cabo desde el 28 de febrero al 22 de abril del 2005, culminando con una prueba final que se aplicó el día 25 de abril.

### **Indicadores que guiaron el estudio**

Los indicadores que guiaron la experiencia fueron los siguientes:

1. Dominio de las cuatro operaciones básicas con números naturales de la muestra institucional y del grupo de experimentación.
2. Relación de la suma con la multiplicación.
3. Conocimiento de la relación de una multiplicación con una división.
4. Relación de la división con la resta.
5. Relación de la división con la suma.
6. Relación de la división con la multiplicación.
7. Modelos mejor comprendidos por los estudiantes.
8. Resolución de multiplicaciones y divisiones utilizando los métodos alternativos.



## Instrumentos utilizados

Se utilizaron 4 instrumentos:

1) Prueba Diagnóstica: se ha venido aplicando desde hace 7 años a los estudiantes de primer curso para establecer el dominio que poseen de los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones básicas con números naturales y con énfasis en las operaciones que se pretendían estudiar.

2) Guías diagnósticas: se aplicaron para establecer el conocimiento que poseían los estudiantes, estas guías están relacionadas con los métodos alternativos de la multiplicación y división así como la relación existente entre las operaciones básicas, como también la comprobación de los resultados.

3) Guías de Trabajo: se aplicaron para orientar al estudiante a multiplicar y dividir por métodos alternativos, contenían el modelo a utilizar y su comprensión fue guiada por preguntas orientadoras, una vez comprendido el modelo, el estudiante resolvió ejercicios de manera individual. De aquí se estudió sus respuestas para encontrar el nivel de comprensión del modelo.

4) El instrumento N. 4 fue una prueba que tuvo que realizarse como un examen parcial en el Instituto, ya que la evaluación de esos cursos correspondía a la nota de su primer parcial, la experiencia comenzó el 28 de febrero y terminó el 25 de abril.

## V. RESULTADOS OBTENIDOS

### Análisis de la guía Diagnóstica N. 1

Para el primer indicador, Dominio de las cuatro operaciones básicas con números naturales de la muestra institucional y del grupo de experimentación, se aplicó la prueba diagnóstica del anexo1, obteniéndose los siguientes resultados:

Los datos recolectados muestran que solo el 49% de los estudiantes evaluados obtuvieron más de 60% en la prueba diagnóstica, concluyéndose que la mayoría no tiene un dominio de las cuatro operaciones básicas con números naturales.

En lo que concierne a las secciones 6, 10 y 27, que forman el grupo experimental, se les aplicó la misma prueba diagnóstica y se obtuvieron los siguientes resultados: 39 aprobaron para un total de 34%. Por lo tanto la mayoría del grupo de experimentación no tiene un dominio de las cuatro operaciones básicas con números naturales.

Las muestras de las dificultades encontradas son las siguientes:

$$\begin{array}{r} e) 342 \times 28 \\ 342 \times 28 \\ \hline 2736 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} e) 342 \times 28 \\ 342 \times 28 \\ \hline 3420 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} f) 1,302 \times 301 \\ 1,302 \times 301 \\ \hline 5208 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} i) 1,302 \times 301 \\ 1,302 \times 301 \\ \hline 3639 \\ 378228 \end{array}$$

$$j) 1,302 \times 301$$

$$\begin{array}{r} 1,302 \times 301 \\ 1,302 \times 301 \\ \hline 3906 \\ 40362 \end{array}$$

$$g) 8,493 \div 5$$

$$\begin{array}{r} 8,493 \div 5 \\ 5 \overline{) 8493} \\ \underline{5} \phantom{00} \\ 34 \phantom{00} \\ \underline{30} \phantom{00} \\ 049 \phantom{00} \\ \underline{45} \phantom{00} \\ 053 \phantom{00} \\ \underline{45} \phantom{00} \\ 08 \end{array}$$

$$h) 34,381 \div 54$$

$$\begin{array}{r} 34,381 \div 54 \\ 54 \overline{) 34381} \\ \underline{270} \phantom{00} \\ 738 \phantom{00} \\ \underline{54} \phantom{00} \\ 196 \phantom{00} \\ \underline{108} \phantom{00} \\ 88 \phantom{00} \\ \underline{81} \phantom{00} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34,381 \div 54 \\ 54 \overline{) 34381} \\ \underline{270} \phantom{00} \\ 738 \phantom{00} \\ \underline{54} \phantom{00} \\ 196 \phantom{00} \\ \underline{108} \phantom{00} \\ 88 \phantom{00} \\ \underline{81} \phantom{00} \\ 7 \end{array}$$

Considerando lo anterior, de acuerdo con el indicador Dominio de las cuatro operaciones básicas con números naturales de los estudiantes de la muestra institucional y del grupo de experimentación, se puede concluir que la mayoría de estudiantes no poseen dominio de las cuatro operaciones básicas.

### Resultados obtenidos de las guías diagnósticas para indagar el conocimiento sobre modelos alternativos.

Para el segundo indicador: Relación de la suma con la multiplicación, se aplicó a los grupos de la experimentación las guías diagnósticas del anexo 2:

#### Guía diagnóstica No. 1:

$$\begin{array}{r} 3 \ 4 \ 5 \times 7 \ 2 \ 6 \\ \hline 2 \ 0 \ 7 \ 0 \\ 6 \ 9 \ 0 \\ 2 \ 4 \ 1 \ 5 \\ \hline 2 \ 5 \ 0 \ 4 \ 7 \ 0 \end{array}$$



- 1) En la multiplicación anterior, como comprobaría que la respuesta dada es la correcta?
- 2) De la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r}
 345 \times 726 \\
 \hline
 2070 \\
 690 \phantom{0} \\
 2415 \phantom{00} \\
 \hline
 250470
 \end{array}$$

Plantee dos divisiones.

Las dificultades encontradas es que de las 8 posibles operaciones de división, los estudiantes no saben cual es el dividendo ni el divisor y como encontrar el cociente sin efectuar la división.

Es importante resaltar que los restantes estudiantes tuvieron la noción de la división, 2 de ellos si pudieron establecer cuál sería el dividendo y el divisor, pero los demás solo propiciaron como una solución la división. Esto es importante considerando, que ellos no dominan la operación división. En el caso de probar la multiplicación su pensamiento está ligado fuertemente a la operación división más que a la suma Para el tercer indicador: Conocimiento de la relación de una multiplicación con una división., se aplicó la guía diagnóstica N. 4 del anexo 2.

**Para el cuarto, quinto y sexto indicador, se presenta la siguiente tabla:**

**Tabla No. 3**

Indicador	Guía diagnóstica	Número de estudiantes que no conocen la relación planteada
Relación de la división con la resta	Guía diagnóstica N. 4	109
Relación de la división con la suma	Guía diagnóstica N. 5	111
Relación de la división con las tablas de multiplicación	Guía diagnóstica N. 5	111

Cantidad de estudiantes que contestaron la pregunta dada.

Los resultados evidencian que el algoritmo de la división solamente es enseñado de una sola forma, llevando al estudiante a desconocer la relación existente entre las operaciones básicas. Con lo descrito anteriormente puede deducir que los estudiantes no conocen métodos no tradicionales para resolver multiplicaciones y divisiones.

### Resultados de las guías de trabajo:

Si se considera que los estudiantes en sus respuestas han indicado que no conocen modelos alternativos para resolver multiplicaciones y divisiones, el 100% de ellos utilizan modelos tradicionales, entonces el que ellos logren comprender los nuevos modelos es muy positivo.

Con respecto al indicador: modelos mejor comprendidos por los estudiantes, se tiene los siguientes resultados:

**Tabla No. 4**

Modelo	Porcentaje	Dominio
Multiplicación por medio de la suma	67%	El dominio del modelo es bueno
Multiplicación usando la propiedad distributiva	45%	No dominan el modelo
División por medio de restas sucesivas	45%	No dominan el modelo
División por medio de sumas sucesivas	59%	El dominio es bueno
División por medio de la multiplicación	54%	El dominio es bueno
División usando la propiedad distributiva	23%	No dominan el modelo

Resumen en porcentaje y su nivel de dominio de los modelos utilizados.

En base a estos resultados se puede concluir que los modelos que ellos comprendieron fueron:

Para la multiplicación: el de las sumas sucesivas.

Para la división: El de las sumas sucesivas y el de la multiplicación.

### Resultados de la evaluación final.

El examen final contenía 2 multiplicaciones y dos divisiones, se deseaba saber si los estudiantes utilizarían los modelos alternativos para resolver los ejercicios propuestos:

Los ejercicios son:

$$\begin{array}{ll} 6 \text{ a)} 789 \times 503 & 6 \text{ b)} 276 \times 409 \\ 7 \text{ a)} 34381 \div 54 & 7 \text{ b)} 8493 \div 5 \end{array}$$

*Se obtuvieron los siguientes datos:*

De la pregunta 6 y los incisos a y b se esperaba que ellos utilizaran alguno de los modelos que se enseñó, es decir el de sumas sucesivas y la propiedad distributiva, pero todos utilizaron el algoritmo tradicional.



De la pregunta 7 y los incisos a y b se esperaba que ellos utilizaran alguna técnica que se había enseñado en clase par resolver esas divisiones, pero todos lo hicieron de la forma tradicional.

Es decir que no hubo transferencia de conocimientos, el algoritmo tradicional siguió dominando en la resolución de las multiplicaciones y divisiones. Esto debido a que no existió una necesidad imperante en los alumnos para resolver los problemas. Ya que siguió la misma regla de solución que había aprendido en la escuela primaria, ese modelo convierte poco a poco los ejercicios en una receta que al final los vuelven mecánicos.

## **VI CONCLUSIONES**

De este trabajo se puede concluir:

- 1) Los estudiantes tienen problemas con el significado del valor posicional, no tienen estrategias para la verificación de respuestas, el cálculo rutinario está inmerso en ellos, no piensan de manera crítica y autónoma, la estructura de las cuatro operaciones básicas no está unida.
- 2) Los estudiantes desconocen modelos alternativos para resolver multiplicaciones y divisiones.
- 3) Los estudiantes de primer curso si son capaces de comprender algunos modelos alternativos, los que mejor comprendieron fueron: a) la multiplicación por medio de sumas sucesivas, b) la multiplicación utilizando sumas sucesivas y utilizando la multiplicación.
- 4) Es urgente la introducción de un aprendizaje significativo de las operaciones básicas de la aritmética en la escuela primaria, ya que corregir los errores aprendidos no es posible en un periodo corto de tiempo, ya que a pesar de haber comprendido algunos modelos, los estudiantes prefirieron seguir usando el algoritmo tradicional aunque no lo dominan.
- 5) La comprensión de algunos modelos por parte de los estudiantes conduce a pensar que si éstos se introducen en la escuela primaria podrían tenerse mejores resultados en la comprensión de las operaciones básicas de la aritmética.

## VII. BIBLIOGRAFÍA

- Alem, J. (1987). Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático. Editorial Gedisa Mexicana, México.
- Alfonso, Bernardo. (1998). Numeración y cálculo. Editorial Síntesis. España.
- Arancibia, Violeta (1999). Psicología de la Educación. Editorial Alfeomega. México.
- Brousseau, Guy. (2000). "Educación y Didáctica de la Matemática", (Pág. 5 - 37) en Revista en Educación Matemática. Vol. 12, N. 1. Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Castelnuovo, Enma (2001). Didáctica de la Matemática Moderna. Editorial Trillas, México.
- Castro, Enrique (2001). "Multiplicación y División". (Pág. 203 - 230) en Didáctica de la Matemática en Educación Primaria. Editorial Síntesis. España.
- Castro, E., Rico, L. & Castro, E. (1995). Estructuras Aritméticas Elementales y su Modelización. Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Castro, E., Rico, L. & Castro, E. (1996). Números y Operaciones, fundamentos para una aritmética escolar. Editorial Síntesis. España.
- Chamorro, María del Carmen. (2002). Didáctica de la Matemática. Pearson Prentice Hall. España.
- Gómez, Bernardo. (1998) Numeración y Cálculo. Editorial Síntesis. España.
- Grupo Azarquel (1993) Ideas y Actividades para Enseñar Álgebra. Editorial Síntesis. España.
- Gutiérrez, Luis (2002). "Estrategias Didácticas a Tomar en Cuenta en la Construcción y Aplicación de Algoritmos". (Pag. 127 - 143) en Didáctica de la Matemática en la Formación de Docentes. Taller Gráfico Impresora Obando. Costa Rica.
- Guzmán, M. (1993), La Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, Editorial Popular, España.
- Kamii, Constance Kasuko (1994 a) El niño reinventa la Aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget. Editorial A. Machado. España.
- Kamii, Constance Kasuko (1994 b) Reinventando la Aritmética II. Editorial A. Machado. España.
- Kamii, Constance Kasuko (1995) Reinventando la Aritmética III. Editorial A. Machado. España.
- Kaplan, R., Yamamoto, T. & Ginsburg, H. (1989) "La enseñanza de conceptos matemáticos". (Pág. 59 - 81) en Currículum y Cognición. Aique Grupo Editor. Argentina.
- Martí, E. (2002), "Comprensión Matemática: forma y significado", (Pág. 13 - 26) en La Resolución de Problemas en Matemáticas, Editorial Grao, España.
- Mayer, Richard. (2002). Psicología de la educación. Prentice Hall. España.
- Maza, Carlos. (1991), Enseñanza de la Multiplicación y la División, Editorial Síntesis, España.