que un átomo puede estar en dos estados distintos «a la vez»: 0, 1, o una «mezcla» entre los dos, llamada «superposición». Un sólo átomo o «qbit» ofrece varias posibilidades. Y un ordenador de 500 «qbits», con todas las combinaciones posibles de sus «estados superpuestos», equivaldría a uno convencional con un número de procesadores inimaginable, de 10 elevado a 150, imposible de construir.

SOLUBILIDAD DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE LACONDUCCIÓN DEL CALOR EN ESPACIOS GENERALES DE HÖLDER

Por: DrC Justo Che Soler,
MrC: Enech García Martínez
Maestros cubanos

Diversos fenómenos de la naturaleza, procesos tecnológicos, etc. pueden ser modelados mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en particular de tipo parabólico. Estos problemas pueden aparecer, por ejemplo, en el estudio de procesos de conducción de calor y de difusión.

Un primer estudio serio sobre esta ecuación aparece en los trabajos de J. B. Fourier en 1817 en los que estableció una teoría matemática sobre las leyes de la distribución del calor y la ecuación que la modelaba (homogénea). En 1885, el físico Fich, desarrolló la teoría cualitativa de la difusión y obtuvo como modelo, una ecuación análoga a la de Fourier.

La teoría de solubilidad de los problemas iniciales o de contorno para esta ecuación aparece muy desarrollada bajo la suposición de que todos los datos del problema, poseen determinadas propiedades isótropas en términos de pertenencia a los correspondientes espacios de Hölder, tanto usuales como generales, (ver Friedman A., 1968: Ivanovich M.D, 1966; 1967; 1968; Matichuk, M.L. y Eidelman S.D, 1965, 1967,1970).

El caso en que los "datos" del problema satisfacen algunas condiciones anisótropas de Hölder en el sentido usual comenzó a estudiarse en los trabajos de Kruzhkov, S. N. y López, M., 1981; Kruzhkov, S,N., Castro A. y López M, 1975,1980,1982; López M, 1980, 1981,1983,1986,1988,1990.

El caso en que los "datos" del problema satisfacen algunas condiciones generales anisótropas de Hölder (en el sentido que satisfacen alguna condición general de Hölder), aparecen estudiadas en trabajos como (López M y Che J, 1990, 1991; Che J, 1989,1996; Medina, L. 2003; Ribas E, 2003).

En el presente trabajo se demuestra un nuevo teorema de existencia y unicidad en espacios generales de Hölder para soluciones clásicas de la ecuación de la conducción del calor:

$$L_0 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = f(t;x) \qquad (1)$$

Definida en la banda cilíndrica $\Pi_T =]0,T] \times E_n$, E_n representa un espacio euclídeo n-dimensional, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E_n$, $\Delta_x u = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$

y que satisface la condición inicial,

$$u\,/_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in E_n \qquad (2)$$

En los trabajos de Friedman, (1964) se supone para el término independiente f(t,x) de la ecuación (1) que sea una función continua según Hölder con exponente $0<\alpha<1$ respecto a todas las variables y se establece un teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy (1), (2).

$$(|f(t,x) - f(\tau,y)|) \leq K\, d^{\alpha}(p,q), \qquad 0<\alpha<1, \qquad P=(t,x), \quad Q=(\tau,y)$$

Ivanovich (1967), (1968) consideró el término independiente f(t,x) como una función que satisface la condición general uniforme de Hölder con exponente $\alpha(r)$ respecto a todas las variables y obtuvo un resultado análogo.

$$(|f(t,x) - f(\tau,y)|) \leq K\, d^{\alpha(d(p,q))}(p,q), \qquad \alpha \in A_1 \qquad P=(t,x), \quad Q=(\tau,y)$$

Eidelman (1968) consideró para la función f(t,x) que fuese una función continua en $\overline{\Pi}_T$ y que satisficiera la condición de Hölder respecto a las variables espaciales solamente, obteniendo la misma condición para las segundas derivadas $D_x^2 u$ de la solución del problema (1), (2) y un nuevo teorema de existencia y unicidad.

$$(|f(t,x) - f(\tau,y)|) \leq K|x-y|^{\alpha}, \qquad 0<\alpha<1, \qquad \text{f continua respecyto a } (t,x)$$

Matichuk y Eidelman (1966, 1967,1970) impusieron a la función f(t,x), además de la continuidad en $\overline{\Pi}_T$ que tuviera su módulo de continuidad acotado por la función w(r) respecto a todas las variables y establecieron una estimación para la solución y las derivadas de segundo orden de la ecuación (1) y un nuevo teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy (1), (2).

$$(|f(t,x) - f(\tau,y)|) \leq K\, W(d(P,Q)$$

Medina L (2003) en su Tesis de Maestría consideró que el término independiente f(t,x) en la ecuación (1) fuese una función continua en $\overline{\Pi}_T$ que satisficiera la condición general uniforme de Hölder de exponente α(r) respecto a las variables espaciales solamente y demostró la misma condición para la solución y sus derivadas hasta el segundo orden con exponente Bα(r) y un nuevo teorema de existencia y unicidad , además obtuvo estimaciones para el módulo de continuidad respecto a t de las soluciones y las derivadas de la ecuación (1).

$$(|f(t,x)-f(\tau,y)|)\leq K(|x-y|^{\alpha(|x-y|}$$

¿Cómo debilitar aún más las condiciones que impuso Medina a los "datos' del problema (1), (2) para obtener resultados más generales y un nuevo teorema de existencia y unicidad?. En los trabajos de Matichuk y Eidelman para la obtención de sus resultados impusieron condiciones de acotación a los módulos de continuidad respecto a todas las variables a las funciones de los "datos" del problema de Cauchy.

Ahora, si consideramos que las funciones f (t, x) y φ(x) del problema de Cauchy (1), (2) sean continuas en $\overline{\Pi}_T$ y E_n respectivamente y tienen módulo de continuidad acotado por la función W(r), respecto a las variables espaciales solamente, ¿existirá una única solución clásica del problema (1), (2), cuyas derivadas tengan módulo de continuidad

acotado por la función $C\int_o^1 \frac{w(t)}{t}dt$ respecto a las variables espaciales?

f(t,x) continua respecto a (t,x), $(|f(t,x)-f(\tau,y)|)\leq KW(|x-y|)$

Al igual que en Medina (2003), aquí se considera la solución fundamental de la ecuación homogénea de la conducción del calor y se obtiene la solución clásica del problema de Cauchy (1), (2) bajo las nuevas condiciones consideradas.

En la obtención de las nuevas estimaciones se aplican métodos análogos a los empleados en el trabajo de López y Che (1991) y en el de Medina, 2003.

Medina para la ecuación:

$$u_t-\Delta_x u = f(t,x) \qquad (1)$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x) \qquad (2)$$

Consideró f(t,x) como una función continua respecto a todas las variables y que satisface la condición general uniforme de Hölder con exponente α(r) en $\overline{\pi}_T$ y φ(x) satisface la condición general de Hölder con exponente α(r en E_n (respecto a las variables espaciales) y demostró la existencia de solución única del problema Cauchy (1) y (2) y una nueva estimación.

Y demostró:

a) La existencia y unicidad del problema de Cauchy (1) y (2) en $C_{2,\beta_{\alpha(r)}}(\overline{\pi}_T)$

b) La desigualdad para las derivadas de la solución

$$|u|_{2,B\alpha(r)} \leq K\left(|f|_{0,\alpha(r)}^{[t]} + |\varphi|_{2,\alpha(r)}^{E_n}\right)$$

c) $\frac{\partial u}{\partial t}$ es continua en $\overline{\Pi}_T$

El siguiente ejemplo ilustra que considerando $w(r)=r^{\alpha(r)}$, $\alpha(r)\in A_1$ se obtiene el caso de Medina, es decir, que el módulo de continuidad es mucho más amplio que la condición usual y general de Hölder:

$$w(r)=r^{\alpha(r)}, \quad \alpha(r)\in A_1$$

a) Se observa fácilmente que w(r) es definida y continua en $]0,+\infty[$

b) w(r) > 0 para r > 0 $\lim\limits_{r\to 0} w(r)=\lim\limits_{r\to 0} r^{\alpha(r)}=0$ para $r \in R_0$

c) $w'(r)=r^{\alpha(r)}\left(\alpha'(r)\ln r+\frac{\alpha(r)}{r}\right)=r^{\alpha(r)-1}(r\alpha'(r)\ln r+\alpha(r))$ y $w'(r)>0$ para $r\in R_0$ y w(r) es monótona creciente para $r \in R_0$:

$$\theta(r)=\int_0^r \frac{w(t)}{t}dt=\int_0^r t^{\alpha(t)-1}dt=A\alpha(r)<\infty$$

como $B\alpha(r)=\frac{1}{\ln r}\ln\frac{A\alpha(r)}{A\alpha(1)}$ entonces $A\alpha(r)=A\alpha(1)r^{B\alpha(r)}$ y $\theta(r)=A\alpha(1)r^{B\alpha(r)}$

Aquí hemos mostrado que la condición impuesta por Medina es un caso particular de módulo de continuidad.

En este trabajo demostramos la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy de la ecuación de la conducción del calor en el espacio $C_{2,\theta(r)}^{[t]}(\Pi_t)$, y obtenemos una nueva desigualdad para tales soluciones.

Aquí se considera, a diferencia de Medina, y a diferencia de Matichuk y Eidelman, 1970, que consideran que las funciones f(t,x) y φ(x) tengan módulo de continuidad respecto a todas las variables, acotado por una función; que las funciones f(t,x) y φ(x) sean continuas y tengan módulo de continuidad ,respecto a las variables espaciales solamente, acotado por una función w(r) y se demuestra la existencia y unicidad de la solución del problema (1) , (2) , cuyas segundas derivadas tienen módulo de continuidad ,respecto a las

variables, solamente acotado por $C\int_0^r \frac{w(t)}{t}\,dt$.

Con vista a utilizar los resultados de la teoría lineal al caso de ecuaciones no lineales el término independiente de la ecuación (1) se considera en la forma:

$$f(t,x) = f_1(t,x) + f_2(t,x)$$

donde $f_1 \in C^{[l]}_{0,w(r)}(\overline{\Pi}_T)$, $f_2 \in C^{[T]}_{0,\nu(r)}(\overline{\Pi}_T)$, w(r) , ν(r) son funciones de tipo módulo de

continuidad que satisfacen la condición:

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{r^{\alpha(r)}}{w(r)} = 0,\ \lim_{r\to +\infty}\frac{r^{\alpha(r)}}{w(r)} = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{r\to 0^+}\frac{r^{\beta(r)}}{\nu(r)} = 0,\quad \lim_{r\to +\infty}\frac{r^{\beta(r)}}{\nu(r)} = +\infty \qquad \alpha(r),\ \beta(r) \in A_1$$

además

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\nu(r)}{w(r)} = 0,\quad \lim_{r\to +\infty}\frac{\nu(r)}{w(r)} = +\infty\ ,\ y\ \lim_{r\to 0^+}\frac{\nu(r)}{r\,w(r)} = +\infty,\quad \lim_{r\to +\infty}\frac{\nu(r)}{r\,w(r)} = 0 \qquad 0<\alpha<\beta<1$$

$$\lim_{r\to 0^+}\alpha(r) = \alpha\ \lim_{r\to +\infty}\alpha(r) = \alpha \qquad \lim_{r\to 0^+}\beta(r) = \beta \qquad \lim_{r\to +\infty}\beta(r) = \alpha \qquad 0<\alpha<\beta<1$$

A continuación presentamos nuestro teorema:

Teorema. Si f(t,x) = f_1(t,x) + f_2(t,x), $f_1 \in C^{[l]}_{0,w(r)}(\overline{\Pi}_T)$, $f_2 \in C^{[T]}_{0,\nu(r)}(\overline{\Pi}_T)$ y $\varphi(x) \in C_{2,w(r)}(E_n)$, entonces, existe una única solución clásica, $u(t,x) \in C^{[T]}_{2,\theta(r)}(\overline{\Pi}_T)$, $\theta(r) = \int_0^r \frac{w(t)}{t}\,dt$ del problema de Cauchy (1),(2), que admite derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$ continua y que para $0 \le t \le T$ satisface la desigualdad:

$$|u|_{2,0(r)}^{[l]} \le K\left(|\varphi|_{2,w(r)}^{E_n} + |f_1|_{0,w(r)}^{[l]} + \int_0^t \frac{|f_2|_{0,v(r)}^{\tau}}{(t-\tau)^{1-\frac{\beta-\alpha}{2}}} dt\right), \quad K \equiv K(n,T,v(T),O(T),w(T))$$

La demostración se basa en lo siguiente:

- Se considera la solución fundamental de la ecuación de la conducción del calor
- Se considera una función u(t,x)
- Se demuestra que bajo las condiciones consideradas, esta es la única solución del problema (1) y (2)
- Se estima la segunda derivada $|D_x^2 u(t,x)|$
- Se estima $|D_x^2 u(t,x) - D_x^2 u(t,y)|$ y según la definición de la norma se obtiene la estimación (24)

$$|u|_{2,0(r)}^{[l]} \le K\left(|\varphi|_{2,w(r)}^{E_n} + |f_1|_{0,w(r)}^{[l]} + \int_0^t \frac{|f_2|_{0,v(r)}^{\tau}}{(t-\tau)^{1-\frac{\beta-\alpha}{2}}} dt\right), \quad K \equiv K(n,T,v(T),O(T),w(T))$$

- Y por último, esta estimación y una estimación obtenida por Che, se aplica a la demostración de la continuidad de la derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$

Hemos considerado que la función f(t,x) es continua y tiene módulo de continuidad acotado por la función W(r) respecto a las variables espaciales al igual que la función inicial φ(x) y se demuestra:

a) La existencia y unicidad del problema de Cauchy (1) y (2), generalizando el resultado análogo de Medina al debilitar la condición por él impuesta.

b) La desigualdad para la solución y sus derivadas

$$|u|_{2,w(r)}^{[l]} \le K\left(|f_1|_{0,w(r)}^{[l]} + |\varphi|_{2,w(r)}^{E_n} + \int_0^t \frac{|f_2|_{0,w(r)}^{[l]}}{(t-\tau)^{1-\frac{\beta-\alpha}{2}}} d\tau\right)$$

c) La continuidad de la derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$ y se considera $f(t,x) = f_1(t,x) + f_2(t,x)$ para la aplicación posterior de estos resultados a la solubilidad del problema de Cauchy para ecuaciones parabólicas no lineales que no se considera en el trabajo de Medina.

Bibliografía:

1-Che,J." Sobre la solubilidad del problema de Cauchy para ecuaciones parabólicas lineales de segundo orden en espacios generales de Hölder" Boletín de la S.C.M.C, COMPUMAT 2003,CD-R UEB # 114, ISSN 172860042, Nov/ 2003

2-Che, J " Sobre la continuidad anisótropas de soluciones de ecuaciones elípticas y parabólicas lineales en espacios anisótropos de Hölder"(Ponencia) COMAT'95,Universidad de Matanzas, Nov/1995. (Ponencia) Primera Conferencia Científica de Matemática Y Computación, Universidad de Oriente, Nov/1996.

3-Friedman,A "Partial Differential Equations of Parabolic Type" Prentice Hall Inc,1964.

4-García, Enech "Solubilidad del Problema de Cauchy para la Ecuación de la Conducción del Calor en Espacios Generales de Hölder" ISPEJV.2004

5- Ivanovich, MD " Sobre el carácter de la continuidad de soluciones de ecuaciones lineales parabólicas de segundo orden (en ruso) B.M.Y., URSS, N^{0}4, 1966.

6-Kruzhkov,S.N; Castro, A; López,M. " Mayoraciones de Schander y teorema de existencia de las soluciones del problema de Cauchy para ecuaciones parabólicas lineales y no lineales (I) y (II) Rev; Ciencias Matemáticas , vol.1,N^0 1,UH,1981 y Vol III, N^0 1,1982, UH

7-Matichuk,M.I; Eidelman,S.D. " Sobre sistemas parabólicos con coeficientes continuos según Dini" (en ruso) . Resultados del Seminario de Análisis Funcional del Instituto Voroneg. T9,1967.

8- Medina, L. "Solubilidad del problema de Cauchy para la ecuación de la conducción del calor en espacios anisótropos de Hölder".(Tesis de Maestría) Dpto. de Matemáticas, I.S.P.E.J.V. Ciudad de la Habana, 2003