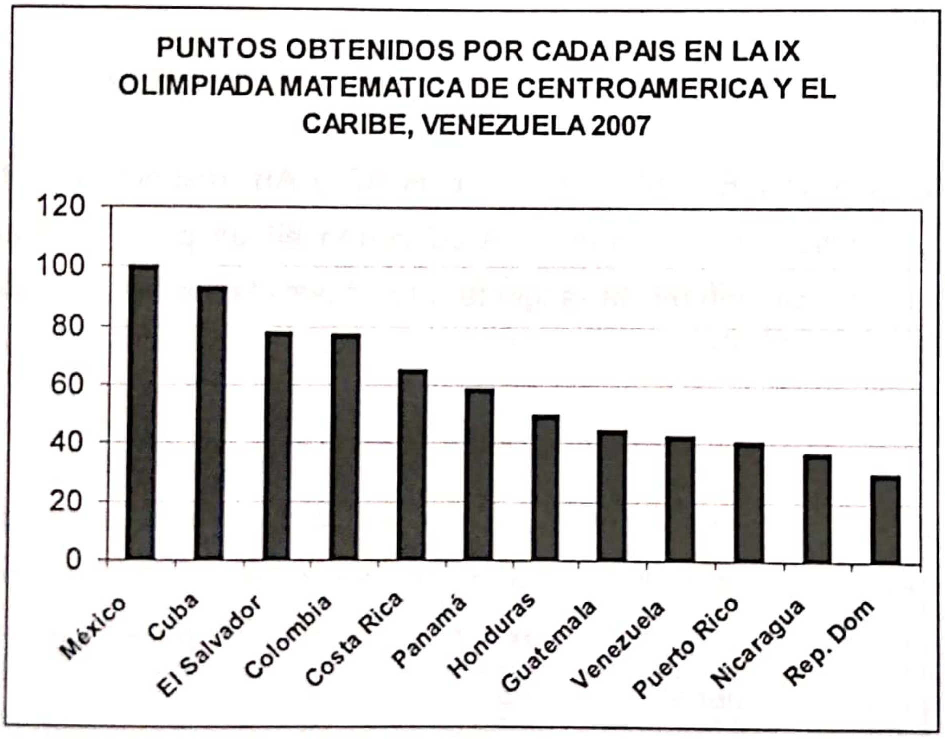
PARTICIPACION DE HONDURAS EN LA IX OLIMPIADA DE CENTROAMERICA Y DEL CARIBE

M.Sc. JUAN CARLOS IGLESIAS

Honduras ha sido invitada a varias competencias matemáticas que se desarrollan a nivel mundial, pero esencialmente sólo se ha participado en la Olimpiada Iberoamericana de Matemática (OIM) y en la Olimpiada Matemática Centroamérica y del Caribe (OMCC). La OIM se ha desarrollado durante 21 años, en esta competencia participan 22 países los cuales son representados por un Jefe de Delegación, un profesor tutor y cuatros estudiantes. En la OMCC participan 12 países, igualmente cada país es representado por un jefe de delegación, un profesor tutor y 3 estudiantes. Las dos competencias consisten en la resolución de 6 problemas matemáticos, los cuales se distribuyen en dos días. La ponderación máxima por problema es de 7 puntos.

La OMCC se ha desarrollado durante 9 años, la última de estas desarrollada en la ciudad de Mérida, Venezuela. En la VI OMCC, que se desarrollo en Nicaragua, Honduras fue representada por 2 estudiantes obteniéndose un total de 8 puntos para el país. En la VII OMCC evento desarrollado en El Salvador, con tres estudiantes se obtuvo una puntuación de 20. Para la VIII OMCC, competencia desarrollada en Panamá, se participo con equipo completo obteniendo una puntuación de 25, resultado que sólo sobrepaso a República Dominicana. En la IX OMCC Honduras fue representado por el Lic. Mario Roberto Canales, como jefe de la delegación; Lic. Juan Carlos Iglesias, como profesor tutor del equipo, y por los estudiantes Sergio David Manzanarez (18 puntos) del Instituto Técnico Alemán, Néstor Alejandro Bermúdez (18 puntos) del Instituto Primero de Mayo, estos dos estudiantes de la Ciudad de San Pedro Sula, y finalmente por el estudiante Jesús Albero Cuello (14 puntos) del CIIE de la Ciudad de Tegucigalpa, obteniéndose una puntuación total de 50, resultado que sobrepasó a 5 países, hecho que nunca había ocurrido. Hay que hacer resaltar que los tres estudiantes están inscritos en el proyecto Academia Sabatina, en este programa se capacita a los estudiantes para que obtengan un mejor rendimiento académico en matemáticas, este proyecto es patrocinado por la **FUNDACION UNO**. Gracias a esto, en los últimos tres años se han obtenido buenos resultados a nivel internacional. Además, en esta ocasión el viaje a Venezuela fue patrocinado por **GTZ**.

Por el buen desempeño fue otorgado a Honduras la COPA EL SALVADOR, premio que es entregado al país que presenta mejorías significativas con respectos a sus participaciones de los dos años anteriores.



Aquí se comentará el desarrollo de los problemas en los que los Hondureños obtuvieron una puntuación de 5 como mínimo, debe aclararse que se obtuvieron otros puntos parciales por los estudiantes que no serán comentados aquí. Es imperativo aclarar además, que se han realizado correcciones de forma pero no de fondo, principalmente ortográficos y de redundancia.

Inicialmente presentamos las pruebas aplicadas en la IX OMCC, para después comentar las resoluciones de los estudiantes Hondureños

PRIMER DÍA

MARTES 5 DE JUNIO DE 2007

Problema 1

La OMCC es una competencia anual de Matemáticas. En el 2007 se lleva a cabo la novena olimpíada. ¿Para cuáles enteros positivos n se cumple que n divide al año en que se realiza la n- ésima olimpiada?

Problema 2

Sean ABC un triángulo, D y E puntos en los lados AC y AB, respectivamente, tales que las rectas BD , CE y la bisectriz que parte de A concurren en un punto P interior al triángulo. Demuestre que hay una circunferencia tangente a los cuatro lados del cuadrilátero ADPE si y solo si AB = AC.

Problema 3

Sea S un conjunto finito de números enteros. Suponga que para cualquier par de elementos p,q de S, con $p \neq q$, hay elementos a , b , c de S, no necesariamente diferentes entre sí, con $a \neq 0$, de manera que el polinomio $F(x) = ax^2 + bx + c$ cumple que $F(p) = f(q) = 0$. Determine el máximo número que puede tener el conjunto S .

Duración de la prueba: 4 horas y media.

SEGUNDO DÍA

MIERCOLES 6 DE JUNIO 2007

Problema 4

Los habitantes de cierta isla hablan un idioma en el cual todas las palabras se pueden escribir con las siguientes letras: *a,b,c,d,e,f,g*. Se dice que una palabra produce a otra si se puede llegar de la primera a la segunda aplicando una o más veces cualquiera de las siguientes reglas:

1. Cambiar una letra por dos letras de acuerdo a la siguiente regla:

a→bc, b→cd , c →de, d→ ef , e→fg, f→ga, g→ab.

2. Si se encuentran dos letras iguales rodeando a otra, ellas se pueden quitar. Por ejemplo: *dfd→f*

Por ejemplo, *cafed* produce a *bfed* porque;

Cafed →cbcfed→bfed

Demuestre que en esta isla toda palabra produce a cualquier otra palabra.

Problema 5

Dado dos números enteros no negativos ***m*** **,** ***n*** con ***m*** > ***n***, se dirá que m termina en ***n*** si es posible borrar algunos dígitos de izquierda a derecha de ***m*** para obtener ***n***. Por ejemplo, 329 termina en 9 y en 29, únicamente. Determinar cuántos números de tres dígitos terminan en el producto de sus dígitos.

Problema 6

Desde un punto P exterior a una circunferencia S se trazan tangentes que la tocan a A y en B. Sea M el punto medio de AB. La mediatriz de AM corta a S en C (interior al Δ ABP), la recta AC corta a la recta PM en G, y la recta PM corta a S en el punto D exterior al triángulo Δ ABP. Si BD es paralelo a AC, demuestre que G es el punto donde concurren las medianas del Δ ABP.

Soluciones presentadas por Sergio David Manzanares

PROBLEMA 1 (7 puntos).

Se cumple para los números enteros n positivos que satisfacen el siguiente requisito:

$$(n-1)+1999 \equiv 0 \pmod{n}$$
$$n+1998 \equiv 0 \pmod{n}$$
$$1998 \equiv 0 \pmod{n}$$

Por lo que n debe tomar el valor de uno de los divisores de 1998, y puesto que:

$$1988 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$$

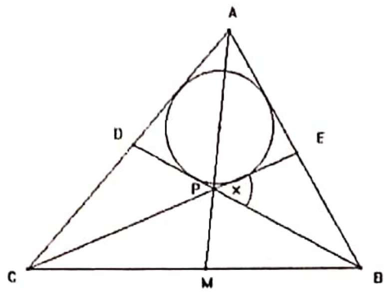
se tiene que son 16 divisores ya que el total de divisores es $(1+1)(3+1)(1+1)=16$

así que el conjunto de los posibles valores para n es

$$\{1,2,3,37,6,74,111,9,27,18,54,222,666,333,999,1998\}.$$

PROBLEMA 2 (5 puntos)

Este problema será desarrollado por contradicción inicialmente, sin perder generalidad supóngase entonces que $\sphericalangle CMA > \sphericalangle AMB$ *, ya que si fueran iguales es la otra implicación que la desarrollare después. Entonces se debe cumplir que* $AC > AB$ *y usando el teorema de la bisectriz se tiene que:*



$\dfrac{AC}{CM} = \dfrac{AB}{MB}$ *Pero usando el hecho de que* $AC > AB$, *digamos que* $AC = AB + d$ *entonces sustituyendo en el resultado anterior tengo que:* $\dfrac{AB+d}{CM} = \dfrac{AB}{MB}$ *y de esto es fácil deducir que* $CM > MB$, *además* $CP > PB$ *ya que por hipótesis* $\sphericalangle CMA > \sphericalangle AMB$. *También* $\sphericalangle APC > \sphericalangle APB$ *puesto que* $AC > AB$, *como* $\sphericalangle DPC = \sphericalangle EPB = x$ *entonces* $\sphericalangle DPA > \sphericalangle APE$ *por lo que* $AD > AE$. *Además el* $\sphericalangle ACP > \sphericalangle ABP$ *, lo cual es fácil de deducir. Adicionalmente* $\sphericalangle APB < \sphericalangle APC$ *y además* $\sphericalangle ACP > \sphericalangle ABP$ *, por lo que de esto se concluye que* $PE > PD$.

Pero si $PE > PD$ *y además* $AD > AE$ *entonces* $AD + PE > AE + PD$ *lo cual contradice el teorema de Pitot que establece que para que en un cuadrilátero se pueda inscribir una circunferencia debe cumplirse que* $AD + PE = AE + PD$. *Esto contradice la hipótesis, así que* $\sphericalangle CMA > \sphericalangle AMB$, *esto mostraría que el triangulo es isósceles.*

Recíprocamente, supóngase que $AC = AB$ *entonces* $\sphericalangle CMA = 90°$, *por lo que el* $\sphericalangle CAE = \sphericalangle DBA$, *como* $CP = PB$ *por estar en la mediatriz entonces* $AD = AE$ *y por congruencias LAL se concluye que* $\Delta DAP \cong \Delta APE$ *por que contiene a* $\overline{AP}$ *y* $AD = AE$, *además* $\sphericalangle DAP = \sphericalangle PAE$.

Soluciones presentadas por Néstor Alejandro Bermúdez

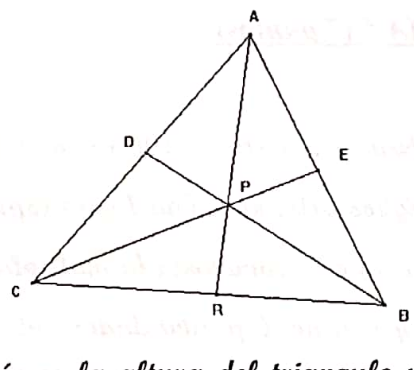
PROBLEMA 1 (6 puntos)

En el 2007 se celebra la IX OMCC entonces la primera fue en 1998, ahora el problema se convierte en encontrar para qué n *se cumple que* $n|1998+n$. *Llamemos* $k \in Z$ *el cociente de dividir* $1998+n$ *por* n *esto es:*

$$k = \frac{1998+n}{n} = 1 + \frac{1998}{n}$$

Para que k sea un entero n debe ser un divisor de 1998 y puesto que $1988 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$. *Entonces los posibles valores de* n *son las maneras de formar los divisores, esto es: cada uno de los divisores de 1998 que son 2, 3 , 3 , 3 , 37; las formas de multiplicarlos de dos en dos, es decir 6 , 9 , 74 , 111; las formas de multiplicarlos de tres en tres, es decir 18 , 27 , 333 , 222 y 999; y los resultados de multiplicarlos de cuatro en cuatro es decir 1998.*

Entonces todos los valores de n *que cumplen la relación son 2, 3 , 37 , 6 , 9 , 74 , 111 , 18 , 27 , 333 , 222 , 999 y 1998*



PROBLEMA 2 (5 puntos)

Como es un si y solo si supongamos que $AC = AB$

Resulta ser que si $AC = AB$ *la bisectriz del* $\measuredangle A$ *también es la altura del triangulo y también su mediana. Llamaremos* R *al pie de la bisectriz, tenemos que* $\Delta CPR \cong \Delta BPR$ *por el criterio LAL. También se tiene que* $\Delta ACP \cong \Delta ABP$ *nuevamente por LAL. Además* $\measuredangle CAR \cong \measuredangle BAR$ *por hipótesis,* $AP = AP$, *además* $\measuredangle CPR + \measuredangle DPC + \measuredangle DPA = \measuredangle RPB + \measuredangle BPE + \measuredangle APE = 180°$

Pero ya sabemos que $\measuredangle CPR = \measuredangle RPB$ *y que* $\measuredangle DPC \cong \measuredangle BPE$ *por ser opuestos por el vértice entonces cancelando* $\measuredangle DPA \cong \measuredangle APE$, *así que se tiene que* $\Delta ADP \cong \Delta AEP$ *y entonces* $PD = PE$ *y* $AD = AE$, *usando el teorema de Pitot y notando que* $PD + AE = PE + AD$ *concluimos que es posible inscribir una circunferencia en el cuadrilátero* $AEPD$.

Ahora demostraremos que si se puede inscribir una circunferencia es triangulo es isósceles.

Soluciones presentadas por Jesús Alberto Cuello

PROBLEMA 1 (7 puntos)

En primer lugar el número mayor de una olimpiada es 1998, porque seria el año 3996 y este seria divisible entre 1998, es decir la división sería 2, sabiendo esto se puede hacer la congruencia: $1999+(n-1)\equiv 0 \mod (n)$. *Esto podría ser un poco tedioso, pero en una ecuación se escribiría así, para saber qué olimpiada seria la multiplicación de 2 por el año se tendría que:*

$$1999+(n-1)=2n \quad \Rightarrow \quad n=1998$$

Después para 3:

$$1999+(n-1)=3n \quad \Rightarrow \quad 2n=1998$$

Como se va viendo, para que la división del año a la olimpiada se un determinado número entonces tiene que ser divisor de 1998, entonces basta con sacar los divisores de 1998 que son: 2 , 3 , 37 , 9 , 27 , 6 , 18 , 54 , 74 , 111 , 333 , 999 , 1998 , 1 , 222 , 666

PROBLEMA 5 (7 puntos)

Se escribiría así: $a\cdot b\cdot c=10b+c$ *ó* $a\cdot b\cdot c=c$. *De la segunda ecuación se ve que* a *y* b *son 1, pero de los 10 dígitos existentes, hay 1 caso especial: el cero porque independientemente de la multiplicación de* a *y* b, *si* c *es cero cambiaría la multiplicación, así que* a *tiene 9 posibilidades porque no puede empezar con cero y* b *tiene 10 posibilidades, entonces (9 x 10) = 90 números que dan su multiplicación cero.*

Sabiendo esto, los otros nueve serían 111,112,..., 119 y sumando con los otros serían un total de 99 números que la multiplicación de sus dígitos sería igual a su último dígito.

De la primera ecuación $a\cdot b\cdot c=10b+c$, *se tiene que* $a\cdot c=10+\frac{c}{b}$, *lógicamente b divide a c, así que hay que buscar los divisores de 9 , 8 , 7 , ... , 2 , 1; o sea* $\frac{9}{9},\frac{9}{3},\frac{9}{1},\ldots,\frac{2}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{1}$ *porque si b no divide a c, la suma de la segunda parte de la ecuación sería decimal y no coincidiría con la primera parte, ya que se sabe que* a *y* c *son dígitos y su multiplicación es entera positiva, en este caso, dando valores a* c *y* b, *cuidando que* b *divida a* c, *o sea sus divisores, habría que probar 23 casos, pero de estos se quitan*

$\frac{9}{9},\frac{8}{8},\frac{7}{7},\ldots,\frac{2}{2},\frac{1}{1}$ porque la suma de la segunda parte de la ecuación sería 11 y no tiene sentido porque 11 es primo y a y c son dígitos.

Sabiendo esto solo quedan 14 casos que cumplen por probar y de estos sólo 4 cumplen: 612 , 315 , 324 y 236. Sumando con los otros 99 casos de la segunda ecuación quedaría que 103 números de tres dígitos terminan en el producto de sus dígitos.