PROBLEMAS OLIMPICOS PROPUESTOS

M.Sc. JUAN CARLOS IGLESIAS

En el corazón mismo de la matemática se encuentra la resolución de problemas, y nadie puede negar que en el estudio de esta ciencia se ha tenido que enfrentar con algún problema que le ha consumido varias horas, sino es que días, para encontrar la solución. Es más, las corrientes modernas de la enseñanza de la matemática se orientan en un enfoque a la resolución de problemas. Es así que hemos decidido colocar una sección de esta revista a la propuesta y solución de problemas con algún grado de dificultad e invitamos a los lectores a intentar solucionarlos y mandar sus soluciones al correo electrónico jciglesiasc@yahoo.com , marocanavi@yahoo.com o presentar una solución por escrito al Departamento de Matemática del Centro Universitario Regional de la Universidad Pedagógica Nacional, el comité redactor de ésta sección se compromete a publicar la solución más ingeniosa así como reconocer todos aquellos que presentaron una solución correcta. También invitamos a los lectores a proponer problemas para ser publicados en esta sección. Solo nos resta esperar que disfruten con estos problemas.

Problema 1. Encuentre todas las soluciones enteras para el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} a + b + c &= 24 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 210 \\ abc &= 440 \end{aligned}$$

Problema 2. En una pizarra se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 dos jugadores A y B juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra junto con todos sus múltiplos (si los hay). El jugador que borra el último número pierde. Si A juega primero determine si existe una estrategia ganadora para algunos de los jugadores y explíquela (un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria sin importar como juegue su rival).

Problema 3. En el triángulo ΔABC el producto de dos de sus medianas es tres medios del área del triángulo, demuestre que estas dos medianas son perpendiculares entre sí.

Problema 4. Demostrar que si los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no son iguales a cero y forman una progresión aritmética, entonces:

$$\frac{1}{a_1 a_2}+\frac{1}{a_2 a_3}+\frac{1}{a_3 a_4}+\cdots+\frac{1}{a_1 a_2}=\frac{n-1}{a_1 a_n}$$

Problema 5. En un triángulo isósceles de base ***a*** y lado ***b***, el ángulo del vértice es igual a 20º. Demostrar que $a^3+b^3=3ab^2$

Problema 6. Hallar el valor exacto de: $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)\cdots(1+\tan 45^\circ)$