EDUCACIÓN EN COMPETENCIAS ATENDIENDO A LA DIVERSIDAD

Tomás Ortega, ortega@am.uva.es www4.uva.es/didamatva
www.uamex.mx/iberomat

Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática.
Universidad de Valladolid, España.

EDUCAR EN COMPETENCIAS

En MEC (2005) se hace un estudio del rendimiento escolar en matemáticas que alcanzaron los alumnos españoles en las pruebas del proyecto PISA 2003 y en esta publicación, entre otras cosas, PISA trata de medir los logros educativos en matemáticas mediante la evaluación de competencias, una, general y, otras, específicas:

Competencia general (alfabetización matemática): capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos mediante cálculos sencillos en una variedad de dominios y situaciones.

Competencias específicas: capacidades de los alumnos que les permiten aplicar sus conocimientos destrezas y habilidades en la ejecución de procedimientos matemáticos.
El proyecto PISA distingue las siguientes competencias específicas y cada una de ellas incluye las capacidades que se relacionan a continuación:

1. *Pensar y razonar:* Plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿Qué...? ¿Cómo...? ¿Cuántos...? ¿Cuál...? Valorar el tipo de respuestas matemáticas. Distinguir entre los diferentes tipos de enunciados (definiciones, ejemplos, cálculos, demostraciones)
2. *Argumentar:* Seguir cadenas de razonamientos. Distinguir entre razonamientos universales y particulares. Valorar la heurística (búsqueda de solución por métodos no rigurosos) y la función explicativa de la argumentación.
3. *Comunicar:* Entender y saber expresar temas de contenido matemático de forma verbal (oral y escrita) simbólica gráfica y numérica.
4. *Modelizar:* Expresar matemáticamente situaciones problemas de contextos reales, tratamiento matemático del problema e interpretar la solución matemática en términos contextuales.

5. *Plantear y resolver problemas:* Plantear y formular problemas matemáticos de diferentes tipos (teóricos, numéricos, gráficos, algebraicos, de respuesta abierta o cerrada) Resolverlos mediante diferentes procedimientos.
6. *Representar:* Utilizar los sistemas de representación apropiados al contexto y hacer las traducciones oportunas entre ellos.
7. *Utilizar el lenguaje matemático:* Manipular los símbolos numéricos y algebraicos propios de cada nivel educativo observando las reglas sintácticas del lenguaje matemático, pasando del lenguaje natural al formal.

Para valorar estas competencias se consideran tres niveles de complejidad.

- Reproducciones: Uso de procedimientos rutinarios.
- Conexiones: Resolución de problemas estándar en contextos cercanos.
- Reflexiones: Razonamiento, argumentación, generalización o justificación de ....resultados al tratar con problemas originales.

También en Calleja, Ortega, Calleja, Árias y Crespo (2007) se pone de manifiesto que nuestros alumnos no reciben una educación matemática en competencias y, por tanto, el puesto 26 que ocupa España en la lista de los 40 países de la OCDE, que participaron en la evaluación curricular del proyecto PISA 2003, no refleja los rendimientos de nuestros alumnos en Matemáticas.

TRATAMIENTO LEGAL

El currículo de Educación Secundaria Obligatoria, influenciado por PISA 2003, está redactado en términos de competencias y, por tanto, es natural que la instrucción educativa se oriente en ese sentido y que se propongan en el aula tareas que faciliten la alfabetización matemática y la puesta en práctica de las competencias específicas enunciadas en Pisa 2003.

El currículo oficial español en numerosas ocasiones hace referencia a la educación en la diversidad y a educar en competencias, como formas de organizar la educación de los alumnos de Educación Secundaria obligatoria. Sirvan estas dos citas como ejemplo:

> *La Educación secundaria obligatoria se organiza de acuerdo con los principios de educación común y de atención a la diversidad del alumnado (Punto 3 del Preámbulo).*
>
> *Las medidas de atención a la diversidad en esta etapa estarán orientadas a responder a las necesidades educativas concretas del alumnado y a la consecución de las*

competencias básicas y los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria (4 cursos, 12-16 años) y no podrán, en ningún caso, suponer una discriminación que les impida alcanzar dichos objetivos y la titulación correspondiente (Artículo 12, punto 1).

Esta declaración de intenciones no interpreta la realidad y no indica cómo llevarla a la práctica, no expresa cómo hay que desarrollar la docencia, no dice qué hay que hacer en las aulas.

LA REALIDAD DE LAS AULAS

Entendiendo que inteligencia es la habilidad para solucionar problemas cotidianos, generar nuevos problemas, y diseñar productos y servicios de relevancia en un escenario cultural particular. H. Gadner (1989) afirma que no sólo existe un único y monolítico tipo de inteligencia que resulte esencial para el éxito, sino que hay no menos de siete variedades distintas de inteligencia (lingüística, lógico-matemática, artística, musical, kinestésica, interpersonal, intrapersonal). Goleman (1999) se refiere a la inteligencia emocional como conjunto de capacidades relacionadas con las emociones, que permiten resolver problemas y que, de alguna forma, ejerce un control sobre las anteriores. La teoría de las inteligencias múltiples nos propone comenzar a ver al alumno desde siete perspectivas y no sólo valorar las habilidades lógica y matemática que tiene el alumnado.
Es un hecho contrastado que los niños, conforme avanzan en edad, difieren más unos de otros, tanto en conocimientos como en capacidades y actitudes, y que, en múltiples ocasiones, esas diferencias en conocimientos vienen motivadas porque las actitudes de los alumnos hacia el aprendizaje de las matemáticas son muy diferentes.

Howson (1990) ya estudió este fenómeno en Inglaterra y vio que en el aula coexisten alumnos con niveles tan dispares hace difícil la enseñanza. La figura 1 muestra la evolución media y los niveles presentes en el aula, según la edad, en el 80% de los alumnos que muestran menores divergencias. Cada niño tiene una velocidad de aprendizaje y García Hoz (1988),

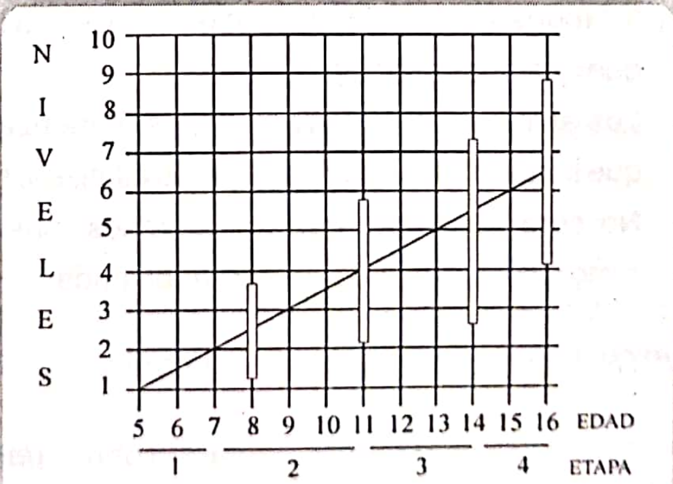


Figura 1. Niveles en el aula de Howson

indica que *los alumnos difieren unos de otros, principalmente, por la capacidad que tienen para aprovechar las posibilidades de aprender,* diferencias que van aumentando con la edad, estimándose que en educación intermedia, *la variabilidad en el rendimiento escolar es aproximadamente dos tercios de la edad media cronológica.* Así, en un aula de 3º de Educación Secundaria (15 años) puede haber alumnos con rendimientos equiparables a niños de 10 años y otros a niños de 20 años.

EDUCACIÓN EN LA ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

En García (2007) se presenta una metodología experimentada que resulta ser enormemente efectiva cuando la clase es muy heterogénea y el número de alumnos es demasiado elevado. El objetivo fundamental de esta metodología es mantener trabajando en el aula a todos los alumnos la totalidad del período lectivo y para ello, todos los alumnos, en todo momento, deben tener propuestas de trabajo que sean adecuadas a sus necesidades educativas específicas.

Se observarán las cuatro fases educativas propuestas por Baddeley (2003) (Presentación, Práctica, Relación y Consolidación) y en esta metodología es crucial organizar el trabajo en grupos colaborativos, respetar el ritmo de aprendizaje de los alumnos e introducir elementos de autocontrol del trabajo (valora de 1 a 5 lo que has hecho sin ayuda) y, además, debe observar las siguientes pautas en relación con las actividades de los grupos de trabajo (coordinación y control mutuo del trabajo):

- Tiene que haber actividades adecuadas a las características de todos los grupos.
- Las tareas tienen que aparecer en orden creciente de dificultad.
- Cuando una pareja de alumnos haya terminado una actividad, ellos mismos tienen que ponerse a trabajar en la siguiente.
- No todos los alumnos tienen que trabajar a la vez en las mismas actividades ni tienen que hacer las mismas.
- Los alumnos menos aventajados comenzarán en las primeras y no será necesario que lleguen a las últimas (las más difíciles), si no están a su alcance.
- No será necesario que los alumnos más brillantes hagan las primeras (las más sencillas), si con ellas no aprenden nada.

CONSTRUCCIÓN DE UNA MAQUETA

Presentación: Muy breve y versará sobre: perímetros, áreas, semejanza y razones trigonométricas, esferas y cono.

Práctica: Actividades teóricas y aplicadas de los alumnos.
Relación: Plantear y resolver ciertas cuestiones que relacionen los conceptos nuevos con otros ya aprendidos (Por ejemplo, teorema del ángulo inscrito).
Consolidación: Pasado un tiempo volver a trabajar con estos conceptos.

Construcción de las cónicas

Aunque en muchas ocasiones se hace referencia a que todas las cónicas proceden de secciones planas de un cono de revolución, sin embargo, en general no se establece ninguna relación entre el cono y los parámetros que definen las cónicas. Aquí se va a construir una maqueta para evidenciar estas relaciones en la elipse.

La maqueta consta de un cono de revolución, dos esferas inscritas en el cono y tres planos: uno es oblicuo al eje, que es el que determina la cónica y dos son perpendiculares al eje, que contienen las sendas circunferencias de tangencia del cono con las esferas.

Para su construcción se necesitan los siguientes materiales: transparencia para construir el cono, 2 cartulinas para los planos, 2 esferas de radios apropiados, regla y compás, tijeras y cello.

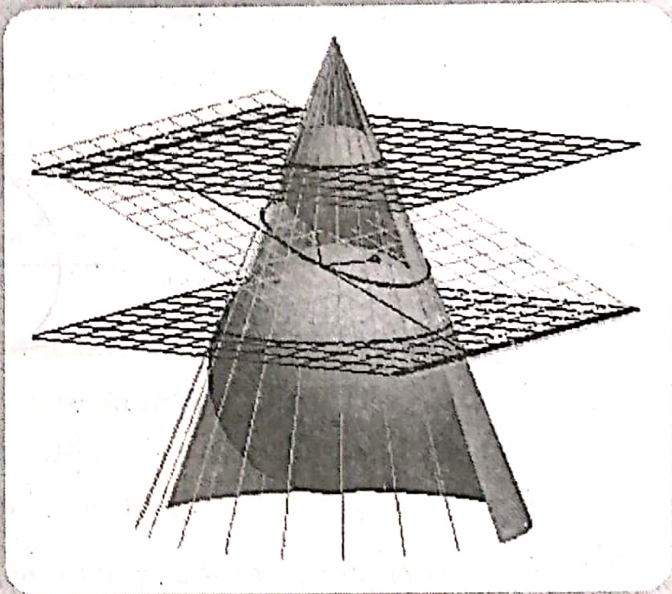


Figura 0. Nuestro propósito.

Pensar y representar, modelizar (Conexionar): Para fijar ideas, se considera que las generatrices forman un ángulo α con el eje del cono, que el plano oblicuo, π, forma con el eje un ángulo β mayor que α, y que los planos perpendiculares al eje que contienen a los círculos de tangencia de las esferas con el cono son φ y δ.

Argumentar, modelizar (Conexionar): Lo primero que hay que fijar es el ángulo α para que las esferas inscritas en el cono estén suficientemente separadas, para ello hay que construir las tangentes exteriores a dos círculos máximos que sean sus proyecciones.

Representar, argumentar, Utilizar el lenguaje matemático, pensar y razonar (Reflexiones): Explica razonadamente cómo se trazan las tangentes exteriores a las circunferencias de centros O1 y O2 . Hacedlo con un programa gráfico y exponedlo.

Pensar y razonar, comunicar: Los diámetros de las esferas miden 3,8 y 6 cm., respectivamente, pero quizás no sea tan fácil hacer estas mediciones, ¿cómo se harían?

Modelización: A continuación hay que construir el *sector circular* que corresponde al desarrollo del cono, pero antes conviene hacer unos cálculos para que sea viable la construcción de la maqueta, teniendo en cuenta las dimensiones de las esferas (de qué tamaños se pueden adquirir) y de las transparencias sobre las que hay que dibujar el sector circular. Conviene aprovechar al máximo esta dimensión y separar las esferas

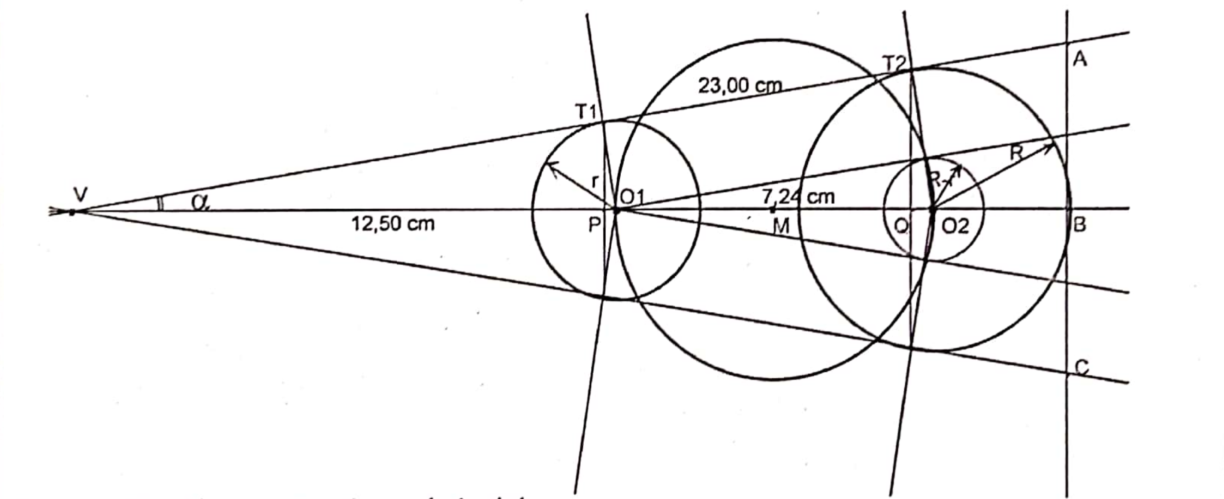


Figura 1. Sección que contiene al eje del cono.

convenientemente para que el plano secante al cono tangente a las esferas tenga una inclinación apropiada. Para ello hay que resolver muchas de las siguientes actividades, no todas, que están inspiradas en el modelo de educación en a atención a la diversidad y sobre las que se marcan las competencias asociadas.

A continuación se relacionan una serie de tareas orientadas a la construcción de la maqueta teniendo en cuenta la Metodología de Educación en la Atención a la Diversidad. A cada una de ellas le precede la relación de competencias asociadas y el nivel de las mismas. Se integra el uso de un programa gráfico.

TAREAS PARA EDUCAR EN COMPETENCIAS ATENDIENDO A LA DIVERSIDAD

1. *Básica, pensar y calcular (Reproducciones):* Calcular el volumen y el área de las esferas.
2. *Pensar y calcular, comunicar (Reproducciones):* Calcular la amplitud del ángulo que forma el eje *VB* y la generatriz *VA* y expresar el resultado en forma decimal y compleja.

   Las dos tareas siguientes están relacionadas y tienen que ver con la construcción del desarrollo del cono en un A4.
3. *Pensar y calcular, comunica (Conexiones):* Redactar un problema para calcular la distancia entre los centros de las circunferencias, explicando razonadamente los pasos resolutores.
4. *Pensar y calcular, argumentar (Reproducciones y Conexiones):* Calcula la longitud de la generatriz *AV*, y la del eje del cono *VB*.
5. *Básica, plantear problemas, comunicar (Reproducciones):* Redactar alguna tarea para calcular perímetros y áreas sencillas: triángulo, rectángulo, trapecio.
6. *Plantear y resolver problemas, comunicar (Reproducciones):* Redactar algunas otras buscando relaciones angulares y hacer de forma explicativa los cálculos necesarios.
7. *Pensar y calcular (Reproducciones):* Si calculas el radio de la base del cono podrás hallar el área de dicha base. ¿Puedes completar el área del cono? Haz lo que puedas.
8. *Plantear y resolver problemas (Conexiones):* Plantea un problema para calcular la amplitud del ángulo del sector circular (desarrollo del cono) y calcula el área del cono.
9. *Utilizar el lenguaje matemático, modelizar (Conexiones):* Dibujar con CABRI el sector circular para construir la maqueta (el dibujo es demasiado grande para el cuadro de impresión y se tiene que pasar a Word utilizando una escala apropiada. También es interesante dibujar el desarrollo de las circunferencias que son las tangencias de las esferas).
10. *Plantear y resolver problemas, representar, argumentar, comunicar (Conexiones):* Redactar actividades en las que se tengan que calcular la altura del cono, su área, el volumen, y áreas y volúmenes de troncos rectos de cono.
11. *Plantear y resolver problemas, representar, argumentar, comunicar (Reflexiones):* Bastante más difícil puede ser una actividad en la que se tenga que calcular el área cónica de la región comprendida entre el cono y una de las esferas. Por ejemplo, la región contigua al vértice delimitada por la esfera de radio r con la base el casquete. Plantea el problema, resuélvelo, y explica y justifica los pasos.

12 *Plantear y resolver problemas, representar, argumentar, comunicar (Reflexiones):* Ídem para la región delimitada por el cono y ambas esferas.

13. *Pensar y representar, modelizar (Conexiones), comunicar, utilizar el lenguaje matemático:* Dibuja la sección plana del cono y de las esferas determinada por el plano que contiene al eje y al diámetro mayor de la elipse. Señala los puntos de tangencia de las esferas y el plano, los planos δ y φ qué contienen a las circunferencias de tangencia, y, finalmente, las rectas intersección de π con δ y φ. Explica el proceso.

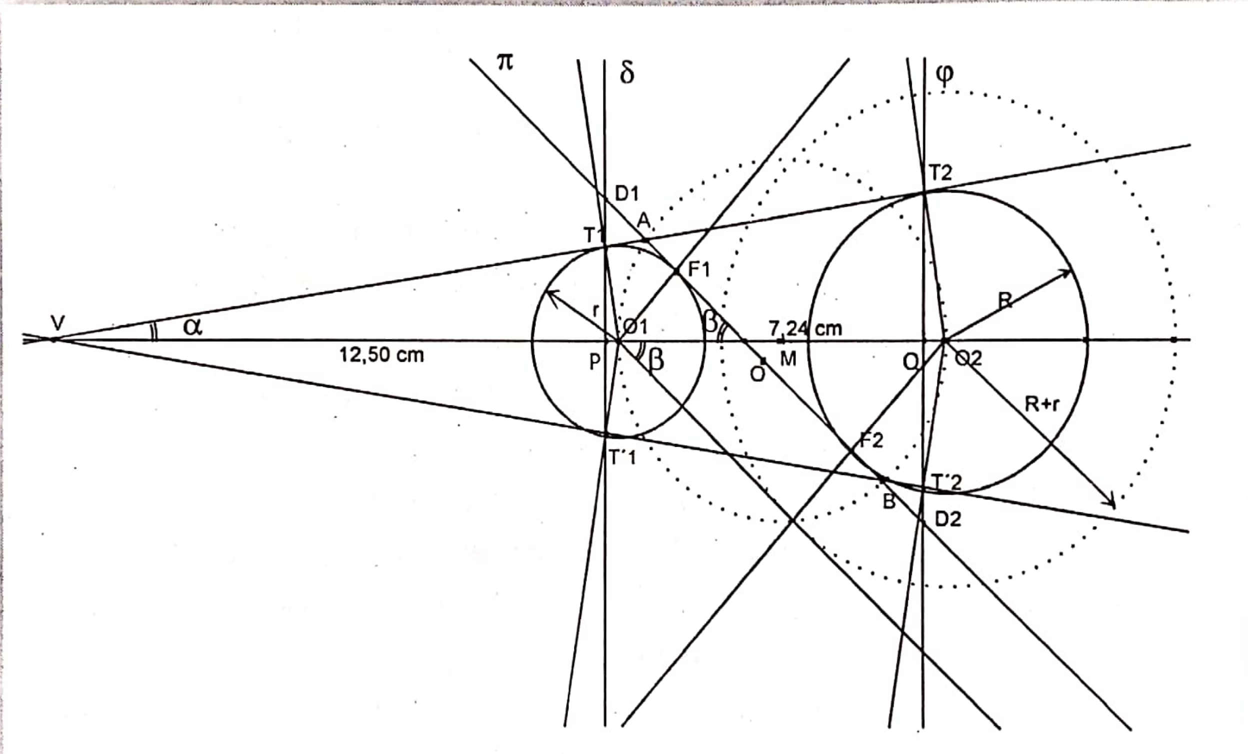


Figura 2. Sección que contiene al eje del cono y al eje mayor de la elipse

Solución esquemática: En la figura 2 se representa el diámetro mayor de la elipse por el segmento AB, que está situado sobre el plano oblicuo, π. F1 y F2 son los puntos de tangencia de las esferas de centros O1 y O2 con el plano π. Las rectas denotadas por δ y φ representan los planos determinados por las circunferencias de tangencia del cono y las esferas, y son perpendiculares al eje del cono. En la misma figura, los puntos denotados por D1 y D2 representan a las rectas (de punta) que son las intersecciones del plano π con los planos δ y φ.

Pensar y calcular, plantear y resolver problemas, representar, argumentar, comunicar, modelizar, utilizar el lenguaje matemático (Reflexiones): Construir la maqueta para establecer las relaciones de la elipse con las siguientes definiciones:

i. Es una curva cerrada y plana, tal que la suma de las distancias de uno cualquiera de sus puntos a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Esta constante es el diámetro principal de la elipse.

ii. Es una curva cerrada y plana, tal que la razón de las distancias de uno cualquiera de sus puntos a un punto fijo, llamado foco, y a una recta fija, llamada directriz, es una constante menor que la unidad. Esta constante es la excentricidad.

Más concretamente, se establecerán los teoremas de Dandelín:

iii. La elipse que determina la sección de un cono por un plano oblicuo tangente a dos esferas inscritas en el cono tiene sus focos en los puntos de tangencia de dicho plano con las esferas, y la longitud del eje mayor de la elipse es la del segmento de cualquier generatriz delimitado por las circunferencias que son las tangencias del cono con las esferas.

iv. La elipse que determina la sección de un cono por un plano oblicuo tangente a dos esferas inscritas en el cono tiene sus focos en los puntos de tangencia de dicho plano con las esferas, y sus directrices son las rectas intersección de dicho plano con los planos determinados por circunferencias que son las tangencias del cono con las esferas.

Para construir la maqueta se supone que se verifica el primer teorema, y se recorta la elipse en la cartulina que representa al plano oblicuo. Una vez recortada, se encaja la elipse en el cono y éste en el hueco de la cartulina dejado por la elipse, los planos secantes.... Para ello, hay que resolver estas tareas parciales.

14. *Pensar y calcular, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (conexiones y Reflexiones):* Explica cómo se puede calcular la distancia entre las circunferencias de tangencia T1T2 y la distancia entre las esferas. Calcula ambas distancias.

15. *Pensar y calcular, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (conexiones y Reflexiones):* Ídem para calcular el volumen del casquete esférico formado por la esfera de centro O1 y el plano δ. Calcúlalo. Ahora ya es fácil determinar la región del cono de vértice V que tiene como base este casquete.

16. *Pensar y calcular, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (conexiones y Reflexiones):* Explica por qué se puede considerar que O2 es el vértice de un cono, cuyas generatrices se apoyan en la circunferencia de centro Q y radio QT2. el segmento O2T2 está en una generatriz de este cono. Halla su longitud.

17. *Pensar y calcular, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (conexiones y Reflexiones):* Es evidente que los triángulos O1T1T'1 y O2T2T'2 son semejantes. Explica el porqué y calcula su razón de semejanza. Explica también cuál es la razón de sus áreas y compruébalo.
18. *Pensar y calcular, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (conexiones y Reflexiones):* Explica por qué la distancia entre los centros y la longitud de los radios de las esferas determina el ángulo β. ¿Puede ser cierta la siguiente igualdad $\beta = arcsen\,\beta = arcsen\,((R+r)/O1O2)$?

19. *Comunicar, modelizar, utilizar el lenguaje matemático (Reflexiones):* Explica qué relación hay entre *AF1* y *BF2*.

Las cinco tareas siguientes están orientadas a dibujar la elipse en el plano del papel. Para ello hay que calcular las longitudes de los diámetros principales de la elipse y recortarla después.

20. *Pensar y calcular, argumentar, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (Conexiones).* Explica cómo se podría determinar la longitud del eje mayor, 2a, y calcúlala. Hay que tratar de que los alumnos vean la relación *2a=T1T2*.

21. *Pensar y calcular (Conexiones):* Calcular la distancia focal ($2c=F1F2=O1O2\cos(\beta)$).

22. *Pensar y calcular (Reproducciones):* Determinar la longitud del semieje menor ($b^2=a^2-c^2$).

23. *Representar, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (Reproducciones).* Revisar la construcción de los ejes de la elipse, figura 3, considerando el eje mayor y los focos de la figura. Explica los pasos.

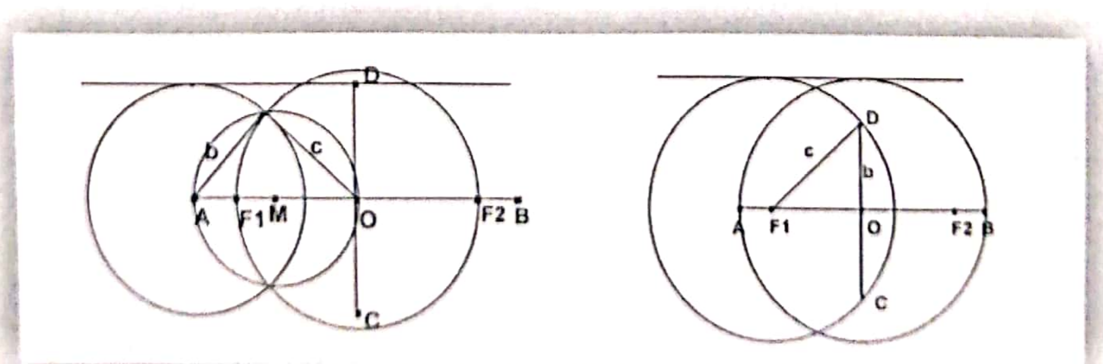


Figura 3. Determinación de los ejes.

24. *Representar, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (Reproducciones):* Dibuja la elipse en la cartulina, explica los pasos y recortarla.

Para analizar el segundo enunciado, además de las tareas anteriores hay que recortar las circunferencias en las cartulinas que representan los planos determinados por ellas y encajarlas en el cono.

25. *Pensar y calcular, Representar (Conexiones y eproducciones):* Ya se han calculado el radio de la circunferencia de tangencia de la esfera pequeña. ¿Se verifican también que *r1=VO1cos(α)sen(α) y que r2= Vo2cos(α)sen(α)?*. Calcular el de la grande y dibujar las circunferencias en las respectivas cartulinas y recortarlas.

26. *Pensar y calcular, argumentar, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (conexiones y reflexiones):* Obtener las longitudes de los segmentos AD1 y BD2 para engarzar el plano oblicuo en la maqueta. ¿Qué relación cumplen?

27. *Pensar y calcular, argumentar, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (conexiones y reflexiones)* Obtener las longitudes de los segmentos T1D1 y T´2D2 para engarzar los planos horizontales en la maqueta.

Finalmente, hay que armar la maqueta y, con ella, hacer los razonamientos necesarios para deducir los teoremas de Dandelín:

28. *Modelizar y represetar (Reproducciones):* Montar la maqueta como se muestra en la figura 4.

29. *Modelizar, argumentar, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (conexiones y reflexiones):* Deducir el teorema i.

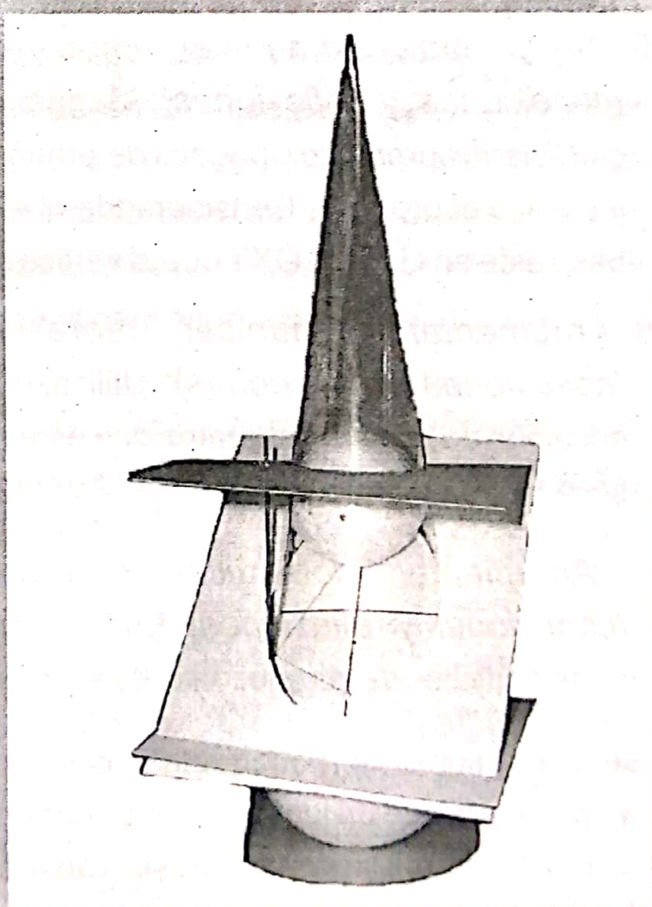


Figura 4. Maqueta de las esferas y cono de Dandelín.

30. *Modelizar, argumentar, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (conexiones y reflexiones):* Deducir el teorema ii.

Quizás sea más ventajoso construir la maqueta seccionando el cono y pegando los dos troncos de cono resultantes sobre una cartulina que represente el plano oblicuo. Piénsese en cómo llevar a cabo esta acción y redactarla.

31. *Pensar y calcular, argumentar, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (conexiones):* Calcular el área de la elipse resultante.

32. *Pensar y calcular, argumentar, comunicar y utilizar el lenguaje matemático (conexiones y reflexiones):* Calcular la longitud de la elipse resultante.

33. *Pensar y calcular (conexiones).* Calcular el volumen del tronco de cono resultante de seccionarlo por el plano oblicuo π.

34. *Argumentar, comunicar, modelizar y utilizar el lenguaje matemático (conexiones y reflexiones):* Establecer que cualquier elipse se puede obtener como una sección cónica.

35. *Argumentar, comunicar, representar, utilizar el lenguaje matemático (conexiones y reflexiones):* Seguro que puedes situar al cono en un sistema cartesiano apropiado y puedes determinar la ecuación del eje y de las esferas. Inténtalo y explica el proceso. Considerando el eje coincida con OZ, ¿es más ventajoso que la base esté en el plano OXY que el vértice esté en (0,0,0)?

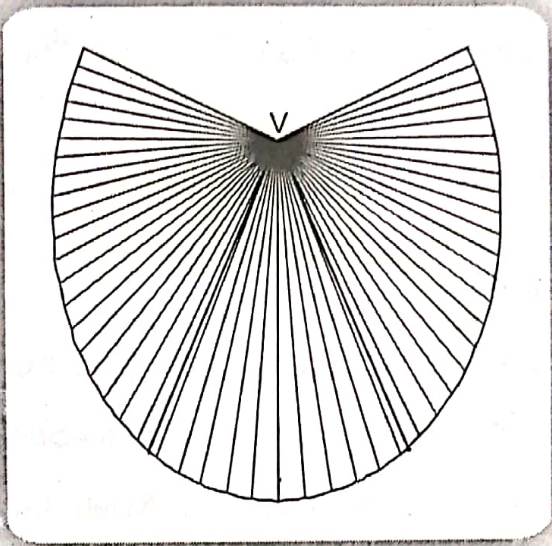
36. *Argumentar, comunicar, representar, utilizar el lenguaje matemático (conexiones y reflexiones):* Utilizando el sistema cartesiano anterior y escribe la ecuación de la de la generatriz que está en OYZ y la ecuación de la generatriz que está situada en el plano bisector de OXZ y OYZ . Explica el proceso.

37. *Argumentar, comunicar, representar, utilizar el lenguaje matemático (conexiones y reflexiones):* En la maqueta aparecen tres planos, cuyas ecuaciones no son difíciles de obtener. Intenta escribirlas y explica el proceso.

Si se quiere construir la maqueta seccionando el cono por la elipse, conviene dibujar la curva plana a la que da lugar la elipse cuando se desarrolla la superficie del cono, pero este es un problema que requiere resolver varias tareas. Sólo escribiré dos.

38. *Argumentar, comunicar, representar, utilizar el lenguaje matemático (conexiones y reflexiones):* Analizar la curva plana que se corresponde con la elipse

en el desarrollo del tronco de cono seccionado por el plano del dibujo la curva transformada de la elipse cuando se desarrolla el cono: Ecuaciones de las generatrices, ecuación del plano secante, intersecciones de ambos, distancias desde el vértice a estos puntos de intersección, llevar estas distancias desde el vértice del sector circular sobre los radios correspondientes a las generatrices.



39. *Argumentar, comunicar, representar, utilizar el lenguaje matemático (conexiones y reflexiones).* Analizar la curva plana que se corresponde con la elipse en el desarrollo del tronco de cono seccionado por el plano π.

40. *Utilizar el lenguaje matemático, representar (conexiones y reflexiones):* ¿Existirá un cono, tal que al ser cortado por un plano oblicuo reproduzca una elipse dada?

Se pueden redactar innumerables problemas más de geometría métrica, de geometría analítica y de geometría descriptiva (Ecuaciones de rectas, de planos, de las esferas, del cono, intersecciones, tangencias...). El primero de ellos, sin duda, consiste en elegir un sistema de coordenadas adecuado. Algunas podrían ser resueltas en 2º de bachillerato (17-18 años), pero otras serían más apropiadas para alumnos de niveles universitarios.

Escribe 15 enunciados en orden creciente de dificultad para tu clase, de manera que haya enunciados apropiados para los niveles de todos los alumnos. También puedes utilizar alguno o todos que aquí se han presentado.

BIBLIOGRAFÍA

BADDELEY, A. (2003): *Memoria humana: Teoría y práctica.* Ed. McGrawHill/Interamericana de España. Madrid.

CALLEJA, M.F; ORTEGA, T; CALLEJA, I; ÁRIAS, B; Y CRESPO, M.T. (2007): Determinantes psicológicos del rendimiento académico en Matemáticas. En Estudio de evaluación de las Matemáticas en Castilla y León. Resumen de las líneas de investigación. Junta de Castilla y León. Valladolid.

CASTRO, E. Y MOLINA, M. (2005): Rendimiento en competencias matemáticas de los estudiantes españoles en el informe PISA 2003. *Padres y Madres de Alumnos (CEAPA). Núm. 82, p. 14-17. Madrid.*

GADNER, H. (1989): Multiple Intelligences go to School. Educational Researcher, Vol. 18, Nº. 8.

GARCÍA, A. Y ORTEGA, T. (2003): Educación en la diversidad. Inicio de una investigación en didáctica de la matemática. Actas del VII SEIEM. Granada.

GARCÍA, A. (2007): Educación Matemática atendiendo a la diversidad. Análisis de una metodología específica. Tesis doctoral dirigida por T. Ortega. Biblioteca Reina Sofía Universidad de Valladolid. Valladolid.

GARCÍA HOZ, V. (1988): La práctica de la educación personalizada. Ediciones Rialp, S.A. Madrid.

GOLEMAN (1999): La inteligencia emocional. Kairós. Barcelona.

GUZMÁN, M. (2004): Mirar y ver. Nivola. ISSN: 84-95599-46-5.Tres Canto. Madrid.

HOWSON, G. (1991): National Curricula in Mathematics. The mathematical Association. London.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2005): PISA 2003. *Pruebas de Matemáticas y de solución de problemas.* Madrid.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006): LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE 4/5/2006. Madrid.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006): REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. BOE 5/1/2007. Madrid.

ORTEGA, T. (2005): Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática. GRAÓ, p. 213. ISSN: 84-7827-415-4. Barcelona.

SOCAS, M. (2002): Las interacciones entre iguales en clase de matemáticas. Consideraciones acerca del principio de complementariedad en educación matemática. RELIME. Vol. 5, Núm. 2, pp. 199-216. México D.F.

RICO, L. (2005): La alfabetización matemática y el proyecto PISA de la OCDE en España. *Padres y Madres de Alumnos (CEAPA). Núm. 82, p. 7-13. Madrid.*