METODOS DE RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sidney Adolfo Corea.

Generando una ecuación
se da el primer paso a la solución,
de un problema singular
matemático que nos hace refunfuñar,
pero no vasta intentar, probar y ensayar
lo que vamos a lograr
sino resolviendo y solamente resolviendo
para que terminemos solucionando y sonriendo.

Una ecuación es una igualdad de dos expresiones, o bien de una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas, que se verifican para determinados valores de las mismas. Estas expresiones están unidas por un signo igual. Las que están colocadas a la izquierda de este signo forman el primer miembro y las que están a la derecha el segundo miembro (Miranda, 1980). Y cada miembro está compuesto de uno o más términos que se llaman términos de la ecuación. Las incógnitas se representan generalmente con las últimas letras del alfabeto. El grado de una ecuación que consta de una sola incógnita es el mayor exponente de dicha incógnita y el grado de una ecuación que consta de varias incógnitas es la mayor sumatoria de las incógnitas de cada término. Las raíces o soluciones son aquellos valores que satisfacen la ecuación y la convierten en ecuación identidad. Resolver una ecuación es encontrar sus raíces, o sea, los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación. Las clases de ecuaciones son: identidad, numéricas, literales o generales, enteras, fraccionarias, racionales, algebraicas, irracionales, complejas, diofánticas, exponenciales, logarítmicas, incompatibles, simultaneas, trigonométricas, diferenciales, de grado n, etc.

Un sistema de ecuaciones es conjunto de ecuaciones cuyas soluciones comunes se pretende hallar. Para indicar que varias ecuaciones forman un sistema, se abarca el conjunto de todas ellas con una llave. Las ecuaciones de un sistema suelen tener dos o más incógnitas, por lo que cada una de ellas puede tener infinitas soluciones. Se llama solución del sistema a una solución común a todas las ecuaciones que lo forman. Resolver un sistema de ecuaciones es hallar todas sus soluciones o concluir que no tiene solución. Si dos sistemas de ecuaciones tienen las mismas soluciones o ambos carecen de solución, se dice que son equivalentes, indeterminadas, dependientes, con un número infinito de soluciones, puntos de intersección o coincidentes. Los sistemas de ecuaciones sin solución, sin puntos de intersección o inconsistentes, o sea que son rectas paralelas, se llaman incompatibles. Los sistemas de ecuaciones que tienen solución única, con un solo punto de intersección, determinadas, consistentes o independientes, se llaman compatibles (Grossman, 2005). Muchos estudiantes piensan que las matemáticas y especialmente el algebra, junto con un tema tópico de esta que son las ecuaciones, solo se inventaron para fastidiarles la vida o para poner trabas en sus notas finales y que no sirven para nada o no tienen aplicaciones prácticas que ellos deban utilizar, por lo que no deberían estudiarlas. Pero los sistemas de ecuaciones lineales son especialmente interesantes por las múltiples aplicaciones que tienen en diversas ciencias, se usan en Física en el movimiento rectilíneo uniforme y otros, en Química en el equilibrio de ecuaciones químicas o sistemas termodinámicos y otros, en Matemáticas financieras y comercio en el análisis de equilibrio, tasas de producción y otros, etc., (Barnett-Ziegler-Byleen, 2000).

También solo se ha conocido comúnmente los métodos Grafico, de Gauss y de Sustitución. Pero existen muchos métodos para resolver sistemas de ecuaciones, entre ellos, incluyendo los rutinarios (según Nieves-Domínguez, 1995) son:

1. Método grafico
2. Método de eliminación de Gauss o eliminación por suma-resta
3. Método de eliminación por sustitución
4. Método de eliminación por igualación
5. Método de Diofantes
6. Método de determinantes o de Kramer
7. Método de la matriz inversa
8. Método de eliminación de Gauss-Jordán
9. Método de eliminación Gaussiana
10. Método de Thomas
11. Método de Doolitle
12. Método de Cholesky

Los sistemas de ecuaciones lineales se expresan de la siguiente manera (según Grossman, 2005):

$$\begin{array}{c} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots\ldots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots\ldots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots\ldots + a_{mn}X_n = b_n \end{array}$$

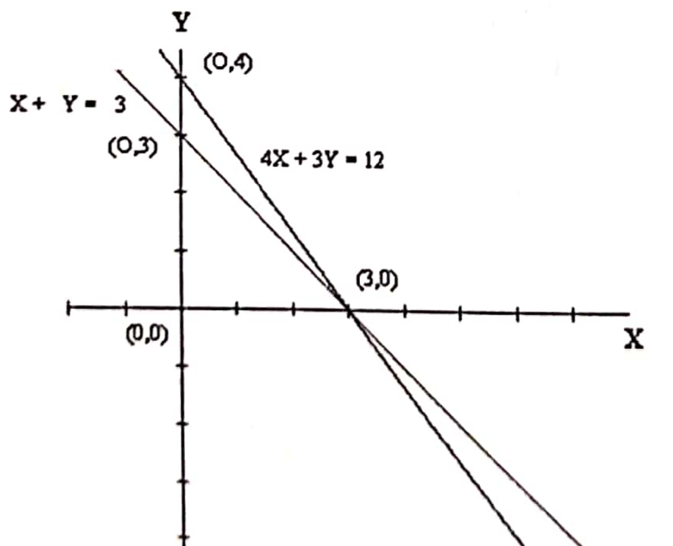
A continuación voy a explicar y aplicar todos estos métodos en la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas; por ser el más accesible, aceptable, fácil de explicar, interpretar y entender; considerando que así como se puede con dos incógnitas, también se puede con n incógnitas, siguiendo los mismos pasos que a continuación explicaré muy detalladamente. Para esto voy a escoger como ejemplo al siguiente sistema:

$$a_1X + b_1Y = c_1 \qquad 4X + 3Y = 12$$
$$a_2X + b_2Y = c_2 \qquad X + Y = 3$$

METODO GRAFICO

Este método consiste en graficar cada una de las ecuaciones, ya sea construyendo una tabla de valores (dándole valores arbitrarios a X, para encontrar los de Y) o encontrando los interceptos de dichas ecuaciones con los diferentes ejes (recordando que para encontrar el intercepto en X se le da a Y el valor de 0 y se despeja para X., y para encontrar el intercepto en Y se le da a X el valor de 0 y se despeja para Y) (Barnett-Ziegler-Byleen, 2000).

Los interceptos para la ecuación 4X + 3Y =12, son (0,4) y (3,0), y los interceptos para la ecuación X + Y = 3, son (0,3) y (3,0), se procede a trazar las respectivas graficas. Y entonces la solución de este sistema de ecuaciones es el punto común en ambas ecuaciones, es decir el punto en el cual se cortan o interceptan sus graficas, que es (3,0), tal como se muestra en la siguiente representación:



De esta manera se obtiene el conjunto solución que satisface al sistema:

CS = {3,0}

METODO DE ELIMINACION DE GAUSS O ELIMINACION POR SUMA-RESTA

Este método consiste en agrupar las dos ecuaciones de manera simultánea y multiplicar toda la primera ecuación por un escalar cualquiera y toda la segunda ecuación por otro escalar cualquiera, de tal manera que el primer o segundo término del primer miembro de las dos ecuaciones tengan el mismo valor absoluto pero con signo contrario, o sea que uno sea el inverso aditivo del otro para poderse cancelar (Barnett-Ziegler-Byleen, 2000), es decir:

$$\begin{array}{ll} 4X + 3Y = 12 & (1) \\ X + Y = 3 & (-4) \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4X + 3Y = 12 \\ \underline{-4X - 4Y = -12} \\ 0 - Y = 0 \end{array}$$

De esta manera se obtiene una sola ecuación con una sola incógnita y así poder despejarla y hallar su valor:

$$\begin{aligned} 0 - Y &= 0 \\ -Y &= 0 \\ Y &= 0 \end{aligned}$$

Luego lo sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones originales y operamos:

$$\begin{aligned} 4X + 3(0) &= 12 \\ 4X + 0 &= 12 \end{aligned}$$

Con esto se obtiene otra ecuación con una sola incógnita que es la otra variable y se procede a despejarla:

$$\begin{aligned} 4X &= 12 \\ X &= \frac{12}{4} \\ X &= 3 \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene el conjunto solución que satisface al sistema:

$$CS = \{3,0\}$$

METODO DE ELIMINACION POR SUSTITUCION

Este método consiste primero, en escoger cualquiera de las dos ecuaciones del sistema que escogimos y luego despejar cualquiera de las dos incógnitas o variables de dicha ecuación, esto es:

$$\begin{aligned} X + Y &= 3 \\ Y &= 3 - X \end{aligned}$$

Luego sustituimos este valor encontrado en la otra ecuación y procedemos a operar, de tal manera que encontremos la primera solución, esto es:

$$4X + 3(3 - X) = 12$$
$$4X + 9 - 3X = 12$$
$$4X - 3X = 12 - 9$$
$$X = 3$$

(Según Zill-Dewar, 2004)

Enseguida sustituimos este valor en la primera ecuación que escogimos al inicio y procedemos a operar de tal manera que encontremos la segunda solución:

$$3 + Y = 3$$
$$Y = 3 - 3$$
$$Y = 0$$

De esta manera se obtiene el conjunto solución que satisface al sistema:

$$CS = \{3,0\}$$

METODO DE ELIMINACION POR IGUALACION

Este método consiste en primer lugar en despejar la misma incógnita o variable en las dos ecuaciones de nuestro sistema de ecuaciones, esto es:

$$X + Y = 3 \qquad\qquad 4X + 3Y = 12$$
$$Y = 3 - X \qquad\qquad 3Y = 12 - 4X$$
$$Y = \frac{12 - 4X}{3}$$

Después igualamos los dos resultados para que nos quede una sola variable, proceder a operar y poder despejarla para hallar nuestra primera solución:

$$Y = Y$$
$$3 - X = \frac{12 - 4X}{3}$$
$$3(3 - X) = 12 - 4X$$
$$9 - 3X = 12 - 4X$$
$$-3X + 4X = 12 - 9$$
$$X = 3$$

Enseguida sustituimos este valor en cualquiera de las dos ecuaciones para así poder operar y despejar la siguiente variable y hallar nuestra segunda solución:

$$4(3) + 3Y = 12$$
$$12 + 3Y = 12$$
$$3Y = 12 - 12$$
$$3Y = 0$$
$$Y = \frac{0}{3}$$
$$Y = 0$$

(Según Swokowski, 2006)

De esta manera se obtiene el conjunto solución que satisface al sistema:

$$CS = \{3,0\}$$

METODO DE DIOFANTES

Este método consiste en utilizar el algoritmo de Euclides, el procedimiento de Diofantes y las congruencias modulares para resolver un sistema de ecuaciones. Como este método es el más tedioso y largo, voy a tratar de ser lo más sencillo y explicito posible. En la gran mayoría de los casos solo se utiliza para sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y para hacer énfasis en la clase de teoría de números, en encontrar el máximo común divisor mediante el algoritmo de Euclides y expresarlo como una combinación lineal de números; y en practicar las de congruencias modulares.

Ahora bien, para empezar vamos a construir una sola ecuación de nuestro sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4X + 3Y &= 12 \\ X + Y &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4X + 3Y - 12 &= X + Y - 3 \\ 3X + 2Y &= 9 \end{aligned}$$

Luego vamos a encontrar el máximo común divisor mediante el algoritmo de Euclides y expresarlo como una combinación lineal de números:

$$3 = 2(1) + 1$$
$$2 = 1(2) + 0$$

$$1 = 3 - 2(1)$$
$$[1 = 3(1) + 2(-1)](9)$$
$$9 = 3(9) + 2(-9)$$

En donde:

$$(a,b) = (3,2) = 1$$

$$aX + bY = c \rightarrow 3X + 2Y = 9$$

$$a'X' + b'Y' = (a,b) \rightarrow 3(1) + 2(-1) = 1$$
$$aX_0 + bY_0 = c \rightarrow 3(9) + 2(-9) = 9$$

Para después resolverlo de la siguiente manera:

$$aX_0 \equiv c \pmod b \qquad bY_0 \equiv c \pmod a$$

$$X = X_0 + \frac{b}{(a,b)}k \qquad Y = Y_0 - \frac{a}{(a,b)}k$$

Esto es:

$$X = 9 + 2/1\ k \qquad Y = -9 - 3/1\ k$$
$$= 9 + 2k \qquad = -9 - 3k$$

Ahora bien, vamos a escoger el número con mayor valor absoluto de la ecuación diofantica, que en este caso es 9, para luego encontrar un k de -9 a 9; de tal manera que nos dé un valor para X y Y respectivamente, que al sustituirlo en el sistema de ecuaciones original, satisfaga dicho sistema. Por eso es que es tedioso porque en este caso son diecinueve posibilidades que hay estar probando mediante ensayo y error (sin considerar que pueden ser números racionales en este intervalo). Y después de hacerlo, encontramos un $k = -3$ que nos da un $X = 3$ y un $Y = 0$, esto es:

$$X = 9 + 2(-3) = 3 \qquad \text{y} \qquad Y = -9 - 3(-3) = 0$$

(Según Jiménez-Gordillo-Rubiano, 1999).

De esta manera se obtiene el conjunto solución que satisface al sistema:

$$CS = \{3,0\}$$

METODO DE DETERMINANTES O DE KRAMER

Este método consiste en reescribir nuestro sistema de ecuaciones en notación matricial, de tal manera que nos ayude a visualizar mejor el problema para poder atacarlo de la mejor manera posible; es decir acomodar los coeficientes de los términos de las ecuaciones (solamente los primeros miembros) en un sistema matemático cuyos elementos sean arreglos de números, o sea un arreglo rectangular llamado matiz, esto es:

$$A = \begin{pmatrix} 4 \ldots 3 \\ 1 \ldots 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

En donde Ax=b; y después vamos a remplazar cada columna de la matriz A por la matriz columna o vector b para quedar:

$$A_1=\begin{pmatrix}12...3\\3....1\end{pmatrix} \quad y \quad A_2=\begin{pmatrix}4...12\\1....3\end{pmatrix}$$

Para luego encontrar los respectivos determinantes:

$$D=4\cdot1-3\cdot1=1 \qquad D_1=12\cdot1-3\cdot3=3 \qquad D_2=4\cdot3-12\cdot1=0$$

Y la solución del sistema la encontraremos:

$$X=\frac{D_1}{D}=\frac{3}{1}=3 \qquad Y=\frac{D_2}{D}=\frac{0}{1}=0$$

(Según Grossman, 2005)

De esta manera se obtiene el conjunto solución que satisface al sistema:

$$CS=\{3,0\}$$

METODO DE LA MATRIZ INVERZA

Este método consiste en encontrar la matriz inversa de nuestra matriz original A, para luego aplicando el modelo Ax=b y despejando x encontramos el conjunto solución $(x = A^{-1} \cdot b)$:

$$x=A^{-1}\cdot b$$

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a...b\\c...d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}$$

Podemos encontrar la matriz inversa ya sea por el método de reducción por renglones, aplicando operaciones elementales con renglones para simplificar la matriz aumentada construida con la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix}4...3.\downarrow 1...0\\1...1.\uparrow 0...1\end{pmatrix}$$

Resolviéndola con un sistema de ecuaciones solucionada por cualquiera de los métodos 2, 3 o 4:

$$\begin{pmatrix} 4...3 \\ 1...1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a...b \\ c...d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+3c...4b+3d \\ a+c.......b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1...0 \\ 0...1 \end{pmatrix}$$

O con el determinante y la matriz adjunta:

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \cdot \text{Adj } A$$

$$= 1/D \cdot \begin{pmatrix} b_2... - b_1 \\ -a_2...a_1 \end{pmatrix}$$

En cualquier caso nos da $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1...-3 \\ -1...4 \end{pmatrix}$

Para luego:

$$x = A^{-1} \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1...-3 \\ -1...4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 12 - 3 \cdot 3 \\ -1 \cdot 12 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Según Grossman, 2005)

De esta manera se obtiene el conjunto solución que satisface al sistema:

CS = {3,0}

METODO DE ELIMINACION DE GAUSS-JORDAN

Este método consiste en reducir por renglones la matriz de coeficientes a la forma escalonada reducida por renglones usando el procedimiento de reducción por renglones, es decir aplicar las operaciones elementales con renglones para simplificar una matriz aumentada; con las siguientes operaciones (Según Grossman, 2005):

1. $R_i \rightarrow cR_i$: quiere decir "reemplazar el i-esimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por c"
2. $R_j \rightarrow R_j + cR_i$: quiere decir "sustituye el j-esimo renglón por la suma del renglón j mas el renglón i multiplicado por c"
3. $R_i \Leftrightarrow R_j$: quiere decir "intercambiar los renglones i y j"

Aplicando todo esto a nuestro sistema de ecuaciones, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 4\ldots 3 \downarrow 12 \\ 1\ldots 1 \uparrow 3 \end{pmatrix} \text{--}R_1\rightarrow 1/4R_1\text{--------} \begin{pmatrix} 1\ldots 3/4 \downarrow 3 \\ 1\ldots 1\ldots \uparrow 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{--}R_2\rightarrow R_2\text{-}R_1\text{—}\text{—} \begin{pmatrix} 1\ldots\ldots 3/4 \downarrow 3 \\ 0\ldots\ldots 1/4 \uparrow 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{--}R_2\rightarrow 4R_2\text{--------} \begin{pmatrix} 1\ldots 3/4 \downarrow 3 \\ 0\ldots 1\ldots \uparrow 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{--}R_1\rightarrow R_1\text{-}3/4R_2\text{--} \begin{pmatrix} 1\ldots 0 \downarrow 3 \\ 0\ldots 1 \uparrow 0 \end{pmatrix}$$

Quedando entonces:

$$X=3$$
$$Y=0$$

De esta manera se obtiene el conjunto solución que satisface al sistema:

$$CS = \{3,0\}$$

METODO DE ELIMINACION GAUSSIANA

Este método consiste en reducir por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones, se despeja la última incógnita y después se usa la sustitución hacia atrás para las demás incógnitas. Es decir es el método de Gauss-Jordan parcial con pivoteo.

Al resolver sistemas de ecuaciones en una computadora, se prefiere este método que el anterior y que los otros, para sistemas grandes; porque significa menos operaciones elementales por renglones. Ya que para el método anterior se requieren aproximadamente $n^3/2$ sumas y multiplicaciones, mientras que este método se requieren solo $n^3/3$ sumas y multiplicaciones. Sin embargo, existe un problema computacional con este método; si se divide entre un numero pequeño que se ha redondeado, el resultado puede contener un error de redondeo muy significativo. Para evitar este problema, se usa un método llamado eliminación gaussiana con pivoteo parcial, que es el que vamos a usar. La idea es siempre dividir entre el mayor elemento en valor absoluto de la columna, evitando así cuanto sea posible, el tipo de error. Ya que el pivoteo completo involucra encontrar la componente en la matriz con mayor valor absoluto, no solo la componente en la primera columna no cero; sin embargo el problema con este método es que siempre incluye el reetiquetado de variables cuando se intercambian las columnas para colocar el pivote en la primera. En la mayor parte en los problemas el pivoteo completo no es mucho más exacto que el pivoteo parcial, al menos no lo suficiente para justificar el trabajo adicional que implica (Grossman, 2005). Por esta razón el método del pivoteo parcial que vamos a usar es el que se usa mas.

Ahora bien, como nuestra matriz, producto de nuestro sistema de ecuaciones, ya tiene en la primera fila y en la primera columna el número de mayor valor absoluto, no necesitaremos usar la operación elemental de permutación de renglones; entonces aplicando todo lo demás, resultaría:

$$\begin{pmatrix} 4...3 \downarrow 12 \\ 1...1 \uparrow 3 \end{pmatrix} \text{------------} R_1 \rightarrow 1/4R_1 \text{----------} \begin{pmatrix} 1...3/4 \downarrow 3 \\ 1...1.... \uparrow 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{-------------} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \text{-------------} \begin{pmatrix} 1.....3/4 \downarrow 3 \\ 0.....1/4 \uparrow 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, utilizando la sustitución regresiva para encontrar la solución al sistema, nos queda:

$$1/4Y=0$$
$$X + 3/4Y=3$$

Y despejando y sustituyendo, nos queda:

$$X=3$$
$$Y=0$$

De esta manera se obtiene el conjunto solución que satisface al sistema:

$$CS = \{3,0\}$$

METODO DE THOMAS

Este método es una simplificación del algoritmo de Gauss, valida solamente para sistemas tridiagonales, o sea para sistemas de ecuaciones en donde solo se pueden sacar tres diagonales en la matriz construida. Se trabaja solo con matrices vectores que son columnas, no se requiere pivotear, solo se elimina durante el i-esimo paso de la triangulación la variable X_i en la ecuación i +1, con lo que se reduce el número de operaciones y por último, en la sustitución regresiva debe reemplazarse solo X_{i+1} en la i-esima ecuación para obtener X_i (Nieves-Domínguez, 1995).

En nuestro sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4X + 3Y &= 12 \\ X + Y &= 3 \end{aligned}$$

Obtenemos las matrices vectores columnas de las tres diagonales que se forman en los primeros miembros y una matriz columna con los segundos miembros, esto es:

$$a=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\ \text{y}\ d=\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}$$

Como $b_1 \neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned} b'_2 &= b_2 - a_2 \cdot c_1/b_1 \\ &= 1 - 1(3)/4 \\ &= 1/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c'_2 &= c_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d'_2 &= d_2 - a_2 \cdot d_1/b_1 \\ &= 3 - 1(12)/4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $b'_2 \neq 0$ entonces:

$$b'_3 = b_3 - a_3 \cdot c_2/b'_2$$

$$d'_3 = d_3 - a_3 \cdot d'_2/b'_2$$

Pero como no existe a_3, b_3, c_3 y d_3, (el ciclo termina también cuando b_1, b_2' o b_3' sea igual a cero) entonces nos queda:

$$a=\begin{pmatrix}b_2'\\b_3'\end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix}b_1\\c_2'\end{pmatrix} \qquad c=\begin{pmatrix}c_1\\0\end{pmatrix} \qquad d=\begin{pmatrix}d_1\\d_2'\\d_3'\end{pmatrix}$$

$$=\left(1/4\right) \qquad =\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \qquad =\left(3\right) \qquad =\begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix}$$

Y construyendo el sistema equivalente (recuerde que estamos trabando con diagonales), nos queda:

$$\begin{aligned} 4X + 3Y &= 12 \\ 1/4Y + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo, nos queda:

$$\begin{aligned} Y &= 0 \\ X &= 3 \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene el conjunto solución que satisface al sistema: $CS = \{3,0\}$

METODO DE DOOLITLE

Este método consiste en construir una matriz triangular superior y una inferior (con unos en la diagonal), a partir de nuestra matriz base A, para las siguientes operaciones: como Ax = b, donde A = LU → Lc = b → Ux = c.

Esto es, de nuestro sistema de ecuaciones:

$$4X + 3Y = 12$$
$$X + Y = 3$$

$$Ax=b$$

$$\begin{pmatrix} 4...3 \\ 1...1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Las matrices triangular superior e inferior quedarían:

$$A = LU$$

$$\begin{pmatrix} a_1...b_1 \\ a_2...b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1...0 \\ l_1..1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_1...b_1 \\ 0....u_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4...3 \\ 1...1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1...0 \\ l_1...1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4...3 \\ 0...u_1 \end{pmatrix}$$

$1 = l_1(4) + 1(0)$
$1 = 4l_1$
$l_1 = ¼$

$1 = l_1(3) + 1(u_1)$
$1 = (1/4)(3) + 1(u_1)$
$1 = ¾ + u_1$
$u_1 = ¼$

$$\begin{pmatrix} 4...3 \\ 1...1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.......0 \\ 1/4...1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4.......3 \\ 0...1/4 \end{pmatrix}$$

Entonces la siguiente operación seria:

$$Lc = b$$

$$\begin{pmatrix} 1......0 \\ 1/4...1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$1(c_1) + 0(c_2) = 12$
$c_1 = 12$

$¼(c_1) + 1(c_2) = 3$
$¼(12) + c_2 = 3$
$3 + c_2 = 3$
$c_2 = 0$

Y la ultima operación seria:

$$Ux = c$$

$$\begin{pmatrix} 4......3 \\ 0...1/4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4X + 3Y &= 12 \\ 4X + 3(0) &= 12 \\ 4X &= 12 \\ X &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 + 1/4Y &= 0 \\ 1/4Y &= 0 \\ Y &= 0 \end{aligned}$$

(Según Nieves-Domínguez, 1995)

De esta manera se obtiene el conjunto solución que satisface al sistema:

$$CS = \{3,0\}$$

METODO DE CHOLESKY

Este método, en el caso de tener un sistema Ax = b, con A positiva definida, la factorización de A en la forma LU es posible y muy sencilla ya que toma la forma de LL^t, donde L es triangular inferior sin unos en la diagonal y L^t es la traspuesta de L ($A = LL^t$ funciona si A es simétrica sino A = LU donde L no tiene unos en la diagonal). Los cálculos se reducen, ya que ahora basta estimar n(n+1)/2 elementos (los $i_{ij} \neq 0$), en lugar de n^2 elementos de una factorización nominal (los i_{ij} tales que i<j y los u_{ij} tales que i≥j). El número de cálculos es prácticamente casi la mitad (**Nieves-Domínguez, 1995).**

Esto es, de nuestro sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4X + 3Y &= 12 \\ X + \ \ Y &= \ \ 3 \end{aligned}$$

$$Ax=b$$

$$\begin{pmatrix} 4...3 \\ 1...1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matriz triangular inferior quedaría:

$$A = L\,U$$

$$\begin{pmatrix} 4...3 \\ 1...1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a...o \\ c...d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a...b \\ o...d \end{pmatrix}$$

$4 = a(a) + 0(0)$
$4 = a^2$
$a = \pm\sqrt{4}$
$= 2$

$3 = ab + 0(d)$
$3 = ab$
$3 = (2)b$
$b = 3/2$

$1 = c(a) + d(0)$
$1 = c(2)$
$1 = 2c$
$c = ½$

$1 = c(b) + d(d)$
$1 = (1/2)(3/2) + d^2$
$1 = ¾ + d^2$
$¼ = d^2$
$d = \pm\sqrt{1/4}$
$= ½$

$$\begin{pmatrix} 4...3 \\ 1...1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2........0 \\ 1/2...1/2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2...3/2 \\ 0...1/2 \end{pmatrix}$$

Entonces la siguiente operación seria:

$$Lc = b$$

$$\begin{pmatrix} 2.......0 \\ 1/2...1/2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$2(c_1) + 0(c_2) = 12$
$2c_1 = 12$
$c_1 = 6$

$½(c_1) + ½(c_2) = 3$
$½(6) + 1/2c_2 = 3$
$3 + 1/2c_2 = 3$
$1/2c_2 = 0$
$c_2 = 0$

Y la última operación seria:

$$L^t x = c$$

$$\begin{pmatrix} 2...1/2 \\ 0...1/2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2X + 1/2Y = 6$
$2X + ½(0) = 6$
$2X + 0 = 6$
$2X = 6$
$X = 3$

$0 +!/2\ Y = 0$
$Y = 0$

De esta manera se obtiene el conjunto solución que satisface al sistema: CS = {3,0}

Como vio en el transcurso del artículo, por cualquiera de los métodos que estudiamos siempre llegamos a la misma solución, esto es si aplicamos bien todos los procedimientos necesarios para la resolución y se puede comprobar si es necesario (si seguimos investigando encontraremos que hay por lo menos 25 métodos de resolución de sistemas de ecuaciones, ya sea con algoritmos algebraicos o numéricos); en base a esto lo reto a que logre dominar por lo menos 2 métodos no rutinarios a parte de los comunes que ya domina. Siempre es bueno tener varias alternativas para lograr una demostración o comprobación, porque eso ayuda a respaldarnos en una discusión seria a nivel científico y a desarrollarnos más. Si nos lo proponemos todo es posible, solo hay que creer, disponernos y practicar.

En el corazón mismo de la matemática se encuentra la resolución de problemas y nadie puede negar que en el estudio de esta ciencia se ha tenido que enfrentar con algún problema que le ha consumido horas, días, incluso semanas, para encontrar la solución; yo soy uno de ellos, inclusive hay algunos problemas que todavía no he podido hacer, me refiero a problemas no rutinarios con grado de dificultad 3 en adelante, pero no me doy por vencido, lo voy a lograr.

Es más, las corrientes modernas de la enseñanza de las matemáticas se orientan en un enfoque a la resolución de problemas y a competencias. En vista de esto es que he decidido retar su ánimo y su ingenio para que resuelva una lista de sistemas de ecuaciones que le daré a continuación con por lo menos un método no rutinario y mándenme sus soluciones junto con el procedimiento al correo electrónico **ingsidneyadolfocoreavargas@yahoo.es**, junto con sus comentarios, sugerencias, experiencias, ideas, nuevas investigaciones y propuestas de ejercicios con dificultades más elevadas; para futuros artículos.

1. $1/2X + 1/3Y = 0$
   $1/3X + 1/5Y = ½$

2. $0.2X + 0.66Y = 0.325$
   $0.1X - 0.45Y = -0.35$

3. $(\text{Sen}\ \pi/2)X + (\text{Cos}\ \pi/3)Y = \text{Tan}\ \pi/4$
   $(\text{Cos}\ \pi/4)X + (\text{Sen}\ \pi/2)Y = \text{Cos}\ \pi/4$

4. $(\text{Ln}\ \pi)X - (\text{Ln}\ \pi/4)Y = \text{Log}\ \pi$
   $(\text{Ln}\ \pi/3)X + (\text{Ln}\ \pi/6)Y = \text{Tan}\ \pi$

5. $-i^2X + 5i^3Y = 3i$
   $i^8X - 6i^5Y = 2i$

6. $2X_1 + 4X_2 + 6X_3 = 18$
   $4X_1 + 5X_2 + 6X_3 = 24$
   $3X_1 + X_2 - 2X_3 = 4$

7. $X_1 - X_2 + 3X_3 - 2X_4 = 1$
   $-2X_1 + 4X_2 - 3X_3 + X_4 = 0.5$
   $3X_1 - X_2 + 10X_3 - 4X_4 = 2.9$
   $4X_1 - 3X_2 + 8X_3 - 2X_4 = 0.6$

8. $6.1X_1 - 2.4X_2 + 23.3X_3 - 16.4X_4 - 8.9X_5 = 121.7$
   $-14.2X_1 - 31.6X_2 - 5.8X_3 + 9.6X_4 + 23.1X_5 = -87.7$
   $10.5X_1 + 46.1X_2 - 19.6X_3 - 8.8X_4 - 41.2X_5 = 10.8$
   $37.3X_1 - 14.2X_2 + 62.0X_3 + 14.7X_4 - 9.6X_5 = 61.3$
   $0.8X_1 + 17.7X_2 - 47.5X_3 - 50.2X_4 + 29.8X_5 = -27.8$

BIBLIOGRAFIA

1. Barnett, Raymund A., Ziegler, Michael R., Byleen, Karl E (2000. 4 Ed.). Precalculo: Funciones y Graficas. México: McGrawHill.

2. Grossman, Stanley I (4a Ed. 2005). Algebra Lineal. México: McGrawHill.

3. Jiménez Becerra, Luís Rafael., Gordillo Ardila, Jorge Enrique., Rubiano Ortegón, Gustavo Nevardo (1999). Teoría de Números. Bogota: Unibiblos Sección Imprenta.

4. Miranda, Hernany (1980). Diccionario Popular Matemático. San Salvador: Dirección de Publicaciones SA.

5. Nieves, Antonio., Domínguez, Federico C (1995). Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería. México: CECSA.

6. Swokowski, Earl W., Cole, Jeffery A (2006. 11 Ed.). Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México: Thomson.

7. Zill, Dennis G., Dewar, Jackeline M (2004. 2 Ed.). Algebra y Trigonometría. Colombia: McGrawHill.