NO SOLO ES ENSEÑAR, HAY QUE SABER HACERLO

MsC: Enech García Martínez
UNIVERSIDAD DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS
LA HABANA, CUBA

Para nadie es un secreto la importancia de la resolución de problemas en la formación de nuestros alumnos, en particular, la función desarrolladora encaminada a fomentar en ellos el pensamiento científico y teórico dotándolos de métodos efectivos de actividad intelectual, por tal motivo es de suma importancia incluir en la formación matemática de un docente la preparación y adiestramiento que lo capacite para enfrentar el trabajo metodológico en el tratamiento de problemas, de manera que logre desarrollar en sus alumnos capacidades y habilidades para encontrar, formular y solucionar los mismos.

En nuestros países algunos exolímpicos se han insertado al trabajo de formación de las nuevas generaciones lo cual representa una valiosa contribución al desarrollo de nuestros países en este campo, sin embargo, a pesar de la fuerza en el manejo de las matemáticas carecen de la metodología para saber "cómo enseñar lo que se quiere". No solo es exponer un tema, explicar algunos ejemplos y proponer problemas de corte olímpico, hay que saber cómo enseñar un modo de actuación consecuente.

Nuestros docentes deben manejar a su antojo los elementos heurísticos que están presentes en la resolución de problemas, entiéndase, los procedimientos y los medios auxiliares heurísticos. Es muy útil conocer los procedimientos heurísticos como apoyo a las actividades mentales, es decir, los principios, reglas y estrategias que nos deben acompañar en el proceso de la resolución.

Entre los principios podemos citar:

- analogía
- reducción (recursión, demostración, modelación)
- inducción
- generalización
- movilidad

Entre las reglas:

- separar lo dado y lo buscado
- recordar conocimientos que relacionen lo dado y lo buscado
- buscar todo tipo de relaciones entre lo dado y lo buscado
- figura de análisis
- uso de variables adecuadas
- reformular

Entre las estrategias más conocidas:

- trabajo hacia adelante
- trabajo hacia atrás
- descubrir subproblemas

- hacer un diagrama
- analizar varios intentos o ensayos
- descubrir una ley de formación
- encontrar un problema similar.

Del mismo modo que los alumnos desarrollan la capacidad de resolver problemas, resolviéndolos, también el profesor tiene la oportunidad de desarrollar sus habilidades de actuación practicando la resolución de problemas en sus clases, para ello, es necesario realizar un sistema de acciones mediante las formas del trabajo heurístico con intenciones bien marcadas. Tanto las acciones del profesor, como las intenciones se deben corresponder con las fases o etapas del "Programa Heurístico General".

Es importante destacar, que este instrumento en manos del profesor, es la herramienta universal para la dirección del proceso de resolución de problemas y a su vez, para los alumnos, el fundamento completo de orientación en el complejo trabajo de resolver problemas.

Referirnos al "Programa Heurístico General" es equivalente a mencionar las distintas fases que se deben tener en cuenta en este proceso:

1ra Fase: Orientación hacia el Problema.

- Búsqueda del problema o motivación
- Planteamiento del problema
- Comprensión del problema

2da. Fase: Trabajo con el Problema.

- Análisis y precisión
-Búsqueda de la idea de la solución.

Fase central del proceso de resolución que comprende la reflexión sobre los métodos y el complejo problema de elaboración del plan de solución. El profesor debe estar consciente de que el alumno no conoce un procedimiento de carácter algorítmico y por tanto, en esta búsqueda se debe explotar al máximo el gran caudal de las herramientas heurísticas y que los alumnos aprendan a utilizarlas.

El maestro, debe tener siempre presente, que lo más importante, cuando se trabaja con el problema, es el establecimiento del plan de solución. A tales efectos, la búsqueda sistemática de relaciones y medios de resolución adecuados puede conducir al éxito y esto es posible mediante las estrategias heurísticas, o sea, la aplicación de las estrategias heurísticas conduce directamente al plan de solución. Para los estudiantes, no puede faltar una pregunta. ¿Cómo se llega al "Plan de Solución?.

3ra. Fase: Solución del Problema.

- Realización del plan de solución.
- Representación de la solución.

4ta. Fase: Evaluación de la Solución y de la Vía.

- Comprobación de la solución.

- Determinación del número de las soluciones.
- Subordinación de la solución en el sistema existente.
- Memorización de la ganancia de información metodológica.
- Consideraciones perspectivas.

Cabe preguntarse ¿Cómo se materializan estas ideas en el accionar del profesor en el proceso de resolución de problemas?

PROCEDER DEL PROFESOR EN EL PROCESO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS		
ACCIONES DEL PROFESOR		INTENCIONES DEL PROFESOR
Discutir palabras o frases que puedan despertar dudas. Pedir a un alumno que repita el enunciado con sus propias palabras. Discutir con el grupo la comprensión del problema. Discutir con el grupo posible estrategia de resolución.	Orientación hacia el Problema	Mostrar la importancia de la lectura cuidadosa del problema y centrar la atención en ciertas palabras que tienen significado especial. Realzar la importancia que tiene la comprensión del enunciado y del problema. Centrar la atención en datos importantes y aclarar partes del problema. Hacer surgir ideas sobre posibles maneras de resolver el problema.
Observar el trabajo de los alumnos y dar impulsos cuando se requiera. Llamar la atención sobre problemas semejantes ya resueltos. Discutir la búsqueda de la idea de la solución y el establecimiento del Plan de Solución.	Trabajo en el Problema	Identificar los aspectos deficientes de los alumnos. Ayudar a los alumnos a sobrepasar el impasse. Destacar el uso de diferentes heurísticas en el proceso.
Dialogar sobre la realización del Plan de Solución. Verificar la adecuada presentación de la respuesta del problema.	Solución del Problema	Ayudar a los alumnos en la ejecución del Plan de Solución. Proporcionar que se confronten las respuestas obtenidas.
Pedir a los alumnos que expliquen y discutan las estrategias de resolución que aplicaron. Pedir a los alumnos que relacionen el problema con otros ya resueltos y ampliar el problema con otros incisos de ser necesario.	Evaluación de la Solución y de la Vía	Comprobar la solución e identificar las diferentes estrategias que permitieron resolver el problema y comprobar los pasos dados. Analizar la adquisición de conocimientos y las habilidades desarrolladas para enfrentar otros problemas.

Lo anterior es solo un acercamiento a lo que debemos hacer en materia de resolución de problemas.

Veamos a continuación la utilidad de la aplicación de una de las estrategias citadas con anterioridad.

Hace aproximadamente 9 años se propuso en la Olimpíada Bolivariana (2000) el siguiente dúo de problemas que en la actualidad sirven para ilustrar lo útil de una de las estrategias importantes en la resolución de problemas: "figuras y diagramas".

1- (OBM) 2000)

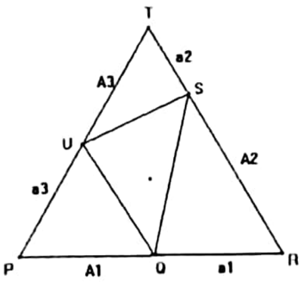
Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3 números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$ (k: constante dada).

a) Demostrar que $a_1 \cdot A_2 + a_2 \cdot A_3 + a_3 \cdot A_1 < k^2$

b) Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3,$a_4 A_4$ números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$ (k: constante dada). Si $a_i \geq A_i$, demostrar que:

$$a_1 \cdot A_2 + a_2 \cdot A_3 + a_3 \cdot A_4 + a_4 A_1 \leq k^2,$$ y determinar cuando se tiene la igualdad.

Solución: Cada una de las cantidades que aparece en esta desigualdad puede interpretarse geométricamente como la longitud de un segmento, y los productos de dos cantidades como áreas. La igualdades $a_i + A_i = k$ pueden representarse mediante un segmento de longitud k dividido en dos partes de longitudes a_i y A_i. Con estos segmentos se puede construir un triángulo equilátero como se muestra en la figura:



El producto $a_i \cdot A_i$ está relacionado con el área (QRS), en este caso $(QRS) = a_1 A_2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. **De manera análoga** $(STU) = a_2 A_3 \frac{\sqrt{3}}{4}$ **y** $(UPQ) = a_3 A_1 \frac{\sqrt{3}}{4}$

De lo anterior obtenemos:

(QRS) + (STU) + (UPQ) < (PRT) y bastaría multiplicar por $\frac{4}{\sqrt{3}}$ para obtener lo pedido en a)

b) Para esta parte basta dibujar un cuadrado de lado k y dentro del mismo cuatro rectángulos correspondientes a los productos del miembro izquierdo de la desigualdad.

2- (OBM) 2000

Sea un entero positivo n par. Halle todas las ternas de números reales (x,y,z) tales que:

$$X^n y + y^n z + z^n x = xy^n + yz^n + zx^n$$

Solución: La expresión $X^n y + y^n z + z^n x = xy^n + yz^n + zx^n$ es equivalente a

$$X^n(y - z) + y^n z = xy^n + z^n(y - z)$$

Restando y^{n+1} a ambos miembros resulta:

$$X^n(y - z) + y^n (z - y) = (x - y)y^n + z^n(y - x)$$

o bien:

$$(y^n - x^n) (z - y)= (z^n - y^n) (y - x) \qquad (1)$$

De lo anterior podemos concluir que si dos de las tres cantidades x, y, z

son iguales entonces la tercera también debe serlo, esto quiere decir que las ternas (x;y;z) cumplen la condición. Para las ternas con las tres componentes distintas, luego de dividir ambos miembros de (1) entre $(z - y)(y - x)$ resulta:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{y^n - z^n}{y - z} \qquad (2)$$

Esta ecuación (2) se puede interpretar como una igualdad entre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x;x^n)$ y $(y;y^n)$ y la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(y;y^n)$ y $(z;z^n)$, en otras palabras, la condición es equivalente a que los tres puntos $(x;x^n)$, $(y;y^n)$ y $(z;z^n)$ sean colineales.

Observemos que como n es par la función $f(x)=x^n$ es convexa y por lo tanto no puede tener tres puntos diferentes alineados.