LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

MsC. Mario Roberto Canales

El plan de estudio de la carrera de matemáticas está formada por 3 partes: formación docente, matemáticas elementales, matemáticas superiores. De las dos primeras existen muchas investigaciones que sustentan el mejoramiento de la enseñanza de ellas, sin embargo de la enseñanza de las matemáticas superiores no existe un planteamiento de cómo enseñarse. No obstante existen trabajos encaminados, como de Recio, De Guzmán, Polya etc., este es un proceso que está en incremento, pero muy lento, y esto debido a la naturaleza de las clases.

Y es que asignaturas como Lógica Matemática, teoría de Conjuntos, Teoría de Números, Estructuras Algebraicas, Análisis Real, Algebra Lineal, Estadística Matemática, Geometría I y II que son parte de las matemáticas superiores son de naturaleza demostrativa, y aquí es donde viene el problema. La primera argumentación de los estudiantes es que las asignaturas antes mencionadas "son las más difíciles por las demostraciones". Es por ello que es muy frecuente escuchar expresiones como: "¿Para qué demostrar?" y otras que están íntimamente ligadas al hecho de que la demostración no es justificable ni necesaria para estudiar matemáticas.

De hecho, el primer punto a considerar es la importancia de la demostración, Polya (2005,161) distingue dos tipos de problemas: problemas por resolver y problemas por demostrar, Los problemas por resolver tienen mayor importancia en las matemáticas elementales, mientras que los problemas por demostrar son más importantes en las superiores. Bajo esta perspectiva Dreyfus (2000,129) afirma que en las matemáticas elementales la tendencia es más al cálculo que argumentar o convencer. Azcarate (2) también comparte la idea de que uno de los rasgos más notable entre la matemática elemental y la avanzada radica en el cambio de adjudicación de importancia y en la frecuencia de aparición de ciertos comportamientos matemáticos. Esto es, la aparición más frecuente de la definición y la demostración.

Y esto nos lleva a concluir que si existen asignaturas de matemáticas superiores en el currículo de matemáticas, es imposible dejar de lado la demostración en ellas. Dreyfus (2000,132) confirma lo anteriormente dicho al afirmar que en matemáticas, la demostración no solo es importante sino que constituye uno de los componentes del núcleo central de la misma. Por ello, si queremos enseñar matemáticas y queremos que nuestros alumnos aprendan matemáticas, la demostración, de una u otra forma, debe impregnar nuestros currículos, por consiguiente, los alumnos deberían vivirla a lo largo de todo el currículum. Debería jugar un papel fundamental, constituyendo así el legado más esencial de la naturaleza de la matemática a la naturaleza del currículo escolar de matemáticas.

Esto nos lleva claramente a afirmar que si vamos a estudiar matemáticas superiores, de la cual el currículo de matemáticas de nuestra Universidad las tiene incluidas, es ineludible hacer demostraciones. Pero por otro lado, las reformas que se están dando en nuestro sistema educativo nos llevan a replantear el pensamiento positivo a favor de las demostraciones, los Estándares de los Estados Unidos llevan incluido los aspectos en torno a capacitar al estudiante en esta vía (Recio,2000).

Este pensamiento de los Estándares de Estados Unidos está influenciando directamente a las reformas presentadas en nuestro país, por tal motivo debemos esperar que los docentes deben de estar preparados para brindar el servicio que estas reformas requieran. De aquí que De Guzmán, y Rico (1997,187) nos expresen que para reconocer en alguien una formación matemática, necesitamos poner de manifiesto una capacidad de abstracción o de generalización, una versatilidad en el uso de un pequeño número de principios elementales.

Todo esto nos ha llevado a plantear la importancia de la demostración:

1. Por ser parte fundamental en las asignaturas superiores.
2. Por los cambios en nuestro sistema educativo.

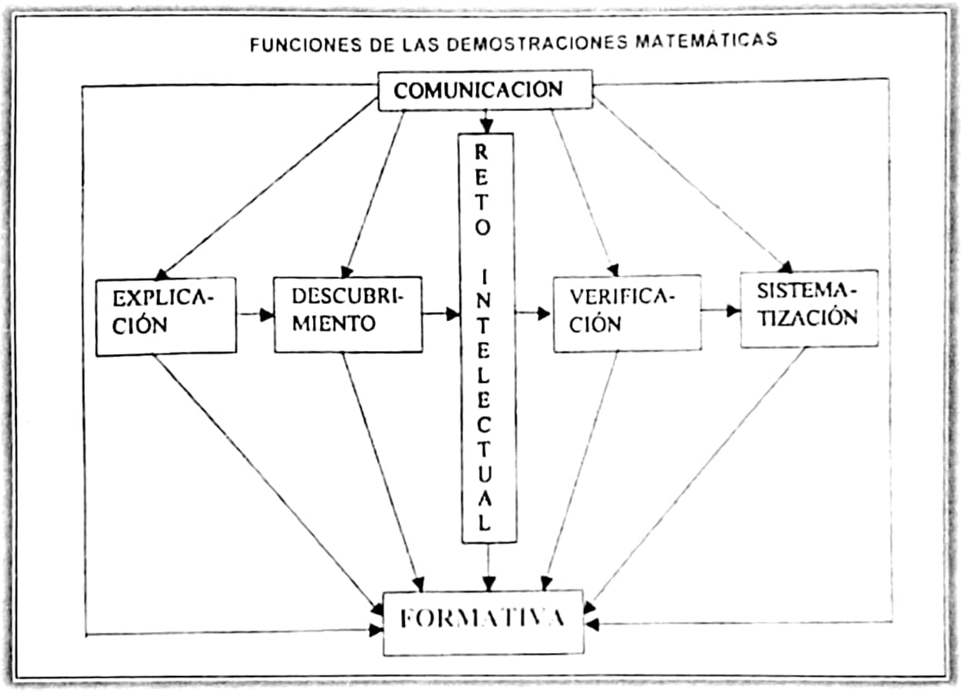
Ahora viene la otra parte, ¿Cómo enseñar a demostrar?, la pregunta no es fácil de contestar ya que según Recio (2001) existen dos situaciones que se presentan en este sentido:

1. Demostrar en la enseñanza (lo que ocurre con la demostración en el quehacer docente)
2. Enseñanza de la demostración (lo que habría que hacer para enseñar a demostrar)

Lo que la mayoría de docentes hacen es demostrar en la clase y no enseñar a demostrar, pero la demostración implica otras cosas además de terminar la demostración, De Villiers (Citado por Crespo y Ponteville, 2005,309) presenta un modelo en que se evidencian las siguientes funciones de la demostración:

1. Verificación o convicción: establece la verdad de una afirmación.
2. Explicación: Exhibe los por qué de la demostración.
3. Sistematización: organiza diversos resultados en un sistema que incluye axiomas, conceptos básicos y teoremas.
4. Descubrimiento o creación: permite llegar a nuevos resultados.
5. Comunicación: transmite el conocimiento matemático.

Bravo y Arrieta (2005, 3) son de la idea que los docentes solamente se quedan en las funciones 1 y 2 , las demostraciones deben de ser una poderosa herramienta sobre el desarrollo de capacidades generales para argumentar, fundamentar, inferir, refutar y deducir. Contribuye al desarrollo de operaciones mentales generales tales como abstraer, concretar, analizar, sintetizar, comparar, clasificar, particularizar y generalizar. Contribuye al trabajo racional, planificado y orientado. Hace manifestar cualidades como la sinceridad, la crítica y la autocrítica y propicia al compañerismo, la complacencia y la conducta colectiva. Entonces si se añade lo instructivo y lo educativo al proceso de demostración, se está incorporando la función formativa. Considerando esto, se plantean el siguiente esquema:



A partir de este esquema, Recio (2001,1) considera que si es posible, conveniente y necesario enseñar a demostrar en un sistema educativo generalizado.

En relación a este tema, existe una corriente en alto crecimiento acerca de la Didáctica del análisis matemático, que en sus principios de acuerdo con Azcarate y Machín (2003,135) el objetivo era estudiar el pensamiento Matemático avanzado, sin embargo al avanzar el proceso la demostración ocupó un paso fundamental en las investigaciones, por el papel preponderante que este tiene en los currículos de cualquier licenciatura de matemáticas en la cual existan asignaturas superiores. Y no es que la demostración llegó a ser el centro de las investigaciones, pero si un tema en tomar en cuenta, de allí que Balacheff, Antibí, Duval hayan realizado trabajos relacionados con el tema.

Y aquí nace otra pregunta, ¿En qué asignatura se debe enseñar a demostrar?, parece preciso decir que claramente debe de ser en la primera asignatura de análisis matemático que se imparte en la Licenciatura, ya que según, Duval (2000,45) la demostración requiere un aprendizaje específico e independiente. Pero en las asignaturas elementales se debe de propiciar el momento para comenzar a conjeturar, abstraer, analizar y generalizar. Estos son los primeros pasos para comprender la demostración.

Es claro que si se va a enseñar a demostrar, el primer paso debe de ser enumerar que técnicas de demostración existen, Ibañes y Ortega (1997,66), hacen una propuesta de clasificación de demostraciones:

TIPO, si atendemos a la estructura lógica del enunciado:

- En relación a la implicación:
  a. De condición necesaria o suficiente
  b. De condición necesaria y suficiente.
- En relación al cuantificador existencial:
  a. No existencial
  b. De existencia:
     - Simple
     - De imposibilidad
     - De unicidad

MÉTODO, si atendemos a los procedimientos lógicos:

- Por silogismos
- Por casos
- Por inducción Completa
- Constructivo (ejemplo o contraejemplo)
- Por analogía
- Por dualidad

ESTILO, si atendemos a los procedimientos matemáticos:

- Geométrico
- Algebraico
- De las coordenadas
- Vectorial
- Del análisis matemático
- Probabilístico
- Topológico, etc.

MODO, si atendemos al procedimiento de exposición:

- Sintético o directo
- Analítico o indirecto.

Y las posibles combinaciones de algunas de ellas. Muy probablemente no se logren utilizar todas en un curso normal, pero sin embargo si es necesario el conocimiento de todas ellas por parte del docente y del estudiante.

No obstante, será muy difícil enseñar todas las técnicas, pero si se deben de ensenar las esenciales y las que se van a utilizar en un curso dado, por ejemplo en la asignatura teoría de números que se imparte en nuestra Universidad es esencial para comenzar el curso enseñar la demostración por inducción y demostración directa, sin estos dos elementos el estudiante está íntimamente ligado al fracaso.

Para evitar esos fracasos, el primer paso fundamental es según Gonzales y otros autores (2002, 164) es la adecuada utilización de estrategias cognitivas y metacognitivas. Dentro de las estrategias cognitivas se pueden mencionar selección, repetición, organización y elaboración y dentro de las estrategias metacognitivas se pueden mencionar la planificación, control y evaluación del propio desempeño. El adquirir estas estrategias puede llevar a que el estudiante adquiera el poder matemático, que según Klinger y Vadillo (1999, 141) involucra el entendimiento de esta disciplina, la habilidad para participar en los procesos de cuestionamiento matemático y una disposición para aprenderlas y utilizarlas.

Gonzales y otros (2002, 172) proponen las siguientes estrategias integrales en el currículo de matemáticas:

Estrategias metacognitivas para cualquier tarea de matemáticas:

Qué tengo que hacer, cómo lo voy hacer, voy siguiendo el plan, cómo me ha quedado.

Para ello proponen algunas formas de estimulación metacognitivas en clase:

Para los incisos a y b proponen: Piensa un momento lo que vas a hacer, describe los pasos que vas a dar, divide las tareas en partes

Para el inciso c proponen: vas haciendo parte por parte, valora si todo va como habías pensado, ajusta aquello que creas no del todo correcto, cambia lo que va mal

Para el inciso d proponen: cómo lo has hecho, dificultades encontradas, cuál ha sido lo más fácil, cuál lo más difícil, con qué lagunas te has encontrado, qué errores has cometido pero corregido a tiempo, qué cambiarías si tuvieras que hacerlo de nuevo

Para las estrategias cognitivas, a ensenar, proponen: repaso, acrósticos, relacionar, aplicar, autopreguntas, paráfrasis, mapas conceptuales, diagramas, presentación (respuesta escrita)

Continuando con este proceso y recordando que Polya (161, 2005) hizo una distinción entre problemas por resolver y problemas por demostrar, explica lo siguiente:

1. El propósito de un problema por demostrar consiste en mostrar de manera concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada.
2. Un problema por demostrar es un problema matemático de la forma más usual, sus elementos principales son las hipótesis y la conclusión del problema que hay que demostrar o refutar.
3. Si tiene que resolver un problema por demostrar debe conocer sus partes principales, hipótesis y conclusión.

Además, sugiere preguntas y consejos útiles correspondientes a este tipo de problemas:

a. ¿cuál es la hipótesis? , ¿cuál es la conclusión?
b. Distinga las diversas partes de la hipótesis.
c. Encuentre la relación entre la hipótesis y la conclusión.
d. Mire bien la conclusión. Trate de pensar en algún teorema que la sea familiar y que tenga la misma conclusión o una familiar.
e. No conserve más que una parte de la hipótesis, descarte la otra parte; ¿ sigue siendo válida la conclusión? ; ¿podría pensar en otra hipótesis de la cual usted pudiera deducir fácilmente la conclusión? ; ¿podría cambiar la hipótesis o la conclusión o las dos si es necesario, de modo que la nueva hipótesis y la nueva conclusión estuviesen más relacionadas entre sí?
f. ¿ha empleado la hipótesis completa?

Siguiendo con la idea de Polya, Davidson y otros (1987, 5) sugieren que hacer al tratar de demostrar una proposición:

1. Hacer una clara distinción entre hipótesis y tesis. Al analizar la hipótesis hay que diferenciar las partes en que pueda subdividirse.
2. Reflexionar acerca de las relaciones que vinculan la hipótesis o premisa con la tesis o conclusión.
3. En problemas de esta índole conviene a veces examinar la tesis e intentar construir el camino de la posible demostración en forma inversa y , en ocasiones, trabajar en ambos sentidos, es decir, de la hipótesis a la tesis y recíprocamente, hasta que los pasos o eslabones de la demostración se concatenen.
4. Examinar la proposición para conocer si se trata que una demostración que establece determinadas propiedades o bien si es una prueba de existencia o de unicidad y destacar su diferencia.
5. Enjuiciar la vía de demostración que hay conviene aplicar: directa, indirecta, por inducción matemática o presentando un contraejemplo.

Una vez que las ideas anteriores nos muestran un camino, el siguiente paso importante es ¿qué teorema voy a utilizar? y ¿cómo lo voy a utilizar? Duval (2004,99) confirma lo anterior al afirmar que la búsqueda de la demostración es la búsqueda de los teoremas que se han de aplicar para derivar la conjetura a partir de la hipótesis constitutivas del problema para el cual la conjetura fue planteada como solución.

Una ayuda muy importante en este caso, cuando se está enseñando a demostrar es el modelo propuesto por Gries y Scheneider en su libro "A logical aproach to discrete" que tiene como base las reglas de inferencia de la sustitución textual, principalmente la regla de inferencia de Leibniz.

Dos ejemplos utilizando este modelo, es el siguiente:

Demostrar P

1. $P \vee Q$ premisa
2. $\neg T$ premisa
3. $Q \rightarrow T$ premisa
   a. $\neg Q$ $\langle axioma\ 3,3,2; P,Q := Q,T\rangle$ esto significa que se usa el axioma 3, en los incisos 3 y 2, pero el axioma 3 tiene las proposiciones P y Q, entonces se aplica haciendo uso de la sustitución textual de Q y T, esto es $E[P,Q := Q,T]$.
4. P $\langle axioma\ 7,1,4; P,Q := P,Q\rangle$ esto significa que usa el teorema 7, en los incisos 1 y 4, el axioma 7 tiene las proposiciones P y Q y las sustituye por P y Q, esto es $E[P,Q := P,Q]$.

Demostrar $p \wedge q \equiv q \wedge p$

1. $p \wedge q$ premisa
2. $p \equiv q \equiv p \vee q$ $\langle axioma\ 12,1,p,q := p,q\rangle$
3. $q \equiv p \equiv p \vee q$ $\langle axioma\ 2,2.p,q := p,q\rangle$
4. $q \equiv p \equiv q \vee p$ $\langle axioma\ 7,3.,p,q := p,q\rangle$
5. $q \wedge p$ $\langle axioma\ 12,3.,p,q := q,p\rangle$

La regla de oro o el axioma 12 es la siguiente:

$p \wedge q \equiv p \equiv q \equiv p \vee q$

Y lo que se tiene en el cuarto paso es:

$q \equiv p \equiv q \vee p$

Se va a utilizar la regla de oro, pero con cambios de variables, se colocaran las dos partes que coinciden, para aplicar la regla de oro:

$p \equiv q \equiv p \vee q$

$q \equiv p \equiv q \vee p$

Observe que en la regla de oro el orden de las variables es p,q, mientras que en el paso 4 es q,p, luego se utilizara:$E[p,q := q,p]$, esto nos lleva en la regla de oro a

$q \equiv p \equiv q \vee p$, que es el paso 4, luego la conclusión es $q \wedge p$.

En este modelo, la memorización no tiene cabida para poder elegir el axioma que se necesita y para poder aplicarlo. No hay un camino predeterminado para realizar la demostración y esto es lo positivo del mismo. Como argumenta Duval (2004, 100) cuando los alumnos han descubierto el funcionamiento específico del razonamiento deductivo, se puede observar una modificación en sus estrategias y una mayor eficacia en la fase de búsqueda de la demostración.

Una vez que el estudiante está identificado con la demostración en la primera asignatura, hay que dar el siguiente nivel, en este caso es la asignatura de Teoría de números, en todos los libros que se utilizan como texto en nuestras clases, la mayoría de teoremas están demostrados, pero según Pava (4, sf) los matemáticos utilizan métodos de análisis y síntesis para presentar las demostraciones, dejando a los estudiosos de ese tema encontrar los caminos para tener la demostración completa.

Un ejemplo es el siguiente:

Teorema 2,22 (Jímenez, Gordillo,Rubiano, 1999)

Si a | c y b | c y (a , b) = 1 entonces ab | c.

La demostración presentada es la siguiente:

Puesto que a | c y b | c existen enteros u y v tales que c = ua = bv, de donde b | au.

Como (a , b) = 1 entonces b | u, es decir , u = br para algún r. En consecuencia, c = au = a (br) = (ab) r es decir ab | c.

Lo que el docente debe de enseñar es a descifrar la demostración completa, indicando los pasos y los teoremas utilizados:

1. $a \mid c$	hipótesis
2. $\exists\, p \in Z / c = ap$	definición de divide
3. $b \mid c$	hipótesis
4. $\exists\, t \in Z / c = bt$	Definición de divide
5. $bt = ap$	igualando 2 y 4
6. $b \mid ap$	definición de divide
7. $b \mid p$	hipótesis $(a , b) = 1$
8. $\exists\, k \in Z / p = bk$	definición de divide
9. $c = ap = a (bk)$	sustitución de 8 en 2
10. $c = (ab) k$	propiedad asociativa de la multiplicación
11. $ab \mid c$.	definición de divide

Llegar a este nivel no es fácil, Guzmán (51), afirma que: "solo se llega a desarrollar cierta capacidad en el ejercicio de la demostración con una dedicación personal, reflexiva, contante y prolongada a la demostración de proposiciones cada vez más complejas, y observando atentamente las demostraciones que uno mismo logra construir y las que otros matemáticos han elaborado".

Además, todo estudiante debe de presentar un nivel de creatividad necesaria para desarrollar demostraciones, ya que estas no son una receta, esto tienen que ver con el desarrollo del pensamiento lógico matemático, ya que como asegura De Guzmán, hay que encontrar el camino del laberinto para llegar a lo que se desea, y este camino nadie lo puede enseñar, sino que sólo se puede mostrar. Cuándo el estudiante logre hacer lo anterior, entonces estaremos en el camino de pensar que se ha iniciado en el camino de demostrar en matemáticas.

Bibliografía

Davidson, Luis. Reguera, Raimundo.Frontela, Rolando. Castro, Sergio (1987). Problemas de Matemáticas elementales I, Editorial Pueblo y Educación, La habana, Cuba.

De Guzmán, Miguel. Rico, Luis. (1997). Bases Teóricas del Currículo de Matemática en educación secundaria. Editorial Síntesis, Madrid, España.

Polya, G. 2005. Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, México.

Recio, Ángel Martínez. 2000. Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática. Servicios de publicaciones de la Universidad de Córdoba, España.

Bravo, María Lourdes. Arrieta, José Joaquín. 2005. Algunas Reflexiones sobre las funciones de la demostración matemática. En www.rieoeiorg/deloslectores/838bravo.PDF

Recio. Ángel Martínez.2001. La mecánica de la demostración y la demostración mecánica. En http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/Recio01.pdf

Azcarate, Carmen. Definiciones, demostraciones ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿Cómo?. En http://www.fing.edu.uy/imerl/didactica_matematica/Documentos/Carmen%20Azc%C3%A1rate%20Gimenez_%20Def%20y%20dem.pdf

Azcárate, Carmen. Machín, M atías Camacho. 2003. Sobre la investigación en Didáctica del análisis matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, pag. 135-149. Vol. X N. 2. En http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/matias-carmen.pdf.

Ibañez, Marcelino. Ortega, Tomás. 1999. La demostración en Matemáticas clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria en Educación Matemática (65 – 104). Editorial Iberoamericana. México.

Duval, Raymond. 2000. Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?. Grupo Editorial Iberoamericana. México.

Pava, Cesar.Sf. Acerca de la demostración en matemática. En www.geocities.com/cogestores/material/matematicapava.pdf

Klingler, Cynthia. Vadillo, Guadalupe.1999. Psicología Cognitiva. Estrategias en la práctica docente. Editorial McGraW Hill. México.

Duval, Raymond.2004.Los problemas fundamentales en el aprendizaje de la matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Instituto de Educación y Pedagógica. Colombia