SOLUCIONES POR LOS ESTUDIANTES QUE OBTUVIERON MEDALLA DE ORO

Como un tributo a los estudiantes que obtuvieron medalla de oro en la 29ª Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, se presenta las soluciones dadas por ellos. Se puede estudiar la diversidad de estrategias que se utilizaron para resolver los problemas.

BRASIL: I

MURILO CORATO ZANARELLA

Problema 1:

Para cada inteiro positivo n, define-se s(n) como a soma dos dígitos de n. Determine o menor inteiro positivo k tal que: $s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k)$:

Solução:

-Primeiramente provemos que $k = 9999$ funciona.

Vamos provar que $s(kl) = s(k)$ para $l = 1, \ldots, 10000 - 1$:

$$s(k) = s(kl) \leftrightarrow s(10^4 \cdot l - l) = 9 \cdot 4 \leftrightarrow s(10^4(l-1) + 10^4 - l) = 9 \cdot 4$$

Como $10^4 - l < 10^4$, $s(10^4(l-1) + 10^4 - l) = s\big((l-1)\big) + s(10^4 - l\big) = s(l-1) + s(10^4 - l)$

Basta então provarmos que $s(l-1) + s(10^4 - l) = s(10^4 - 1)$ para $1 \leq l < 10^4$

Seja $l - 1 = \overline{abcd}$ e $10^4 - l = \overline{xyzw}$, onde a base é a decimal,

ou seja, $l - 1 = 10^3a + 10^2b + 10c + d$ e $10^4 - l = 10^3x + 10^2y + 10z + w$.

Como $l - 1 + 10^4 - l = 9999$, temos $\overline{abcd} + \overline{xyzw} = 9999$.

Logo $d + w = 9$, pois $0 \leq d + w \leq 18$ e $d + w = 9 \ (mod.\ 10)$

Assim, $\overline{abcd} + \overline{xyzw} = 10(\overline{abc} + \overline{xyz}) + (d + w) = 9 + 10(\overline{abc} + \overline{xyz})$, logo $\overline{abcd} + \overline{xyzw} = 9999$

$$\rightarrow \begin{cases} \overline{abc} + \overline{xyz} = 999 \\ d + w = 9 \end{cases}$$

Analogamente, provamos que $c + z = 9$ e, assim, que $\overline{ab} + \overline{xy} = 99$ e finalmente, de maneira análoga, provamos $b + y = 9 \rightarrow a + x = 9$.

Logo $s((l-1)) + s(10^4 - l) = s(\overline{abcd}) + s(\overline{xyzw}) = a + b + c + d + x + y + z + w = (a+x) + (b+y) + (c+z) + (d+w) = 9.4 = s(9999) = s(k)$

$\boxed{\text{Portanto } k = 9999 \text{ funciona}}$

Suponha $k < 1000, k = \overline{abc}$, logo $s(k) = s(1001k) \rightarrow a+b+c = s(\overline{abcabc}) \rightarrow a+b+c = 2(a+b+c) \rightarrow a+b+c = 0$, absurdo por $a, b, c \in k^+$, portanto $k \geq 1000$.
Suponha por contradição que 9999 não seja o k mínimo, ou seja, existe $1000 \in k < 9999$ tal que $s(k) = s(2014k)$.

Seja $k = \overline{abcd}$ esse mínimo. Temos $s(k) = s(1001k) \rightarrow s(\overline{abcd}) = s(\overline{abcd000} + \overline{abcd})$

Seja $1001k = \overline{xefghijk}$, sabemos que $k = d, j = c$ e $i = b$, logo $s(k) = s(1001k) \rightarrow a+b+c+d = x+e+f+g+h+i+j+k \rightarrow a = x+e+f+g+h$.
Se $x = 0$, temos que $e \geq a$, o que implica $f = g = h = 0 \wedge e = a$, mas assim $\overline{abcd} + \bar{a} = \overline{a000}$, um absurdo se $s > 0$.
Logo $x = 1$, ou seja, $\overline{abcd} + \bar{a} = \overline{1efgh}$. Como $e+f+g+h = a-1$, $\overline{efgh} \geq a-1$, logo $\overline{abcd} + a \geq 10^4 + a - 1 \rightarrow \overline{abcd} \geq 10^4 - 1$, ou seja, $a = b = c = d = 9$ e portanto $k = 9999$, uma contradição com $1000 \leq k < 9999$
Portanto o k mínimo que satisfaz $s(k) = s(2k) = \ldots = s(2014k)$ e $k = 9999$

Problema 2

Ache todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais tais que $P(2014) = 1$ e, para algum inteiro c, se tem: $xP(x-c) = (x-2014)P(x)$:

Solução:

- Se $c + 2014$ e $c \neq 0$, vamos provar por indução que $p(kC) = 0$ para $k \in$

Base: $k = 0$: $x \leftarrow 0 \rightarrow 0 = -2014p(0) \rightarrow p(0) = 0 \rightarrow p(0 \cdot c) = 0$
Hipótese: $p(kc) = 0, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Passo indutivo: $x \leftarrow (k+1)c$: $(k+1)c\, P(kc) = ((k+1)c - 2014)p((k+1)c)$
Como $p(kc) = 0$ e $(k+1)c \neq 2014$, pois $c + 2014$, temos $p((k+1)c) = 0$, o que completa a indução.
Nesse caso, como $P(x)$ e zero para infinitos x, P tem que ser o polinômio nulo.
Logo $c + 2014$ e $c \neq 0 \rightarrow p(x) \equiv 0$, o que contradiz $p(2014) = 1$

- Se $c = 0$, temos $x\,p(x) = (x-2014)p(x) \rightarrow p(x) \equiv 0$, contradição com $P(2014)$: portanto $c|2014$, i.e., $\exists k \in \mathbb{Z}^*: 2014 = kc$

  Seja $G(x) = p(cx)$.

  Assim temos $x\,P(x-c) = (x-2014)p(x) \rightarrow G\left(\frac{x}{c} - 1\right) = (x - kc)G\left(\frac{x}{c}\right) \rightarrow \frac{x}{c} G\left(\frac{x}{c} - 1\right) = \left(\frac{x}{c} - k\right) G\left(\frac{x}{c}\right) \rightarrow$

  $x\,G(x-1) = (x-k)G(x)$ Portanto $\begin{cases} x\,G(x-1) = (x-k)G(x) \\ G(k) = 1 \text{ (pois } p(2014) = 1 \end{cases}$

Seja $T[x]a$ expressão $x\,G(x-1) = (x-k)G(x)$

- Se $k > 0$: Vamos provar por indução em l que $G(l) = 0$ para $l = 0, \ldots, k-1$

Base: $l = 0$: $T[x]$: $G(0) = 0$

Hipótese: $G(l) = 0$

Passo indutivo: $T[l+1]$: $(l+1)G(l) = (l+1-k)G(l+1) \rightarrow G(l+1)(l+1-k) = 0$

$l < k-1 \leftrightarrow k > l+1$. logo $G(x+1) = 0$

o que completa a indução assim, se $k > 0$, temos que $x(x-1)\ldots(x-k+1)\,|G(x)$.

Seja $H(x) = \frac{G(x)}{x(x-1)\ldots(x-k+1)}$

$$T(x): X \cdot H(x-1)\cdot(x-1)\ldots(x-k) = (x-k)\cdot H(x)\cdot x(x-1)\ldots(x-k+1) \rightarrow H(x-1)$$
$$= H(x) \rightarrow H \text{ é } constante, H(x) \equiv c$$

Logo $G(x) = C \cdot x(x-1)\ldots(x-k+1)$

$G(x) = 1 \rightarrow 1 = C\,k(k-1)\ldots\cdot 1 \rightarrow c = \frac{1}{k!}$

Logo $G(x) = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!} \rightarrow P(x) = \frac{\frac{x}{c}\left(\frac{x}{c}-1\right)\ldots\left(\frac{x}{c}-\frac{2014}{c}+1\right)}{k!} \rightarrow P(x) = \frac{x(x-c)(x-2c)\ldots(x-(2014-c))}{\left(\frac{2014}{c}\right)!\cdot c^{\frac{2014}{c}}}$ *e P*,

para $c|2014$, $c > 0$, funciona.

- Se $c|2014$, $c < 0 \rightarrow k = \frac{2014}{c} < 0$, vamos provar por indução em l que $G(l) = 0$ para $l \in \mathbb{Z}^+$.

Base: $l = 0$: $T(0)$: $k\,G(0) = 0 \rightarrow G(0) = 0$
Hipótese: $G(l) = 0$
Passo indutivo: $T(l+1)$: $(l+1)G(l) = (l+1-k)G(l+1) \rightarrow G(l+1)(l+1-k)$

mas como $l+1-k > 0$, por $k < 0$, temos $G(l+1) = 0$.

Assim G tem infinitos zeros $\rightarrow G(x) \equiv 0$, o que contradiz $G(k) = 1$.

$\therefore$ As soluções possíveis são $p(x) = \frac{x(x-c)\,(x-2c)\ldots(x-(2014-c))}{\left(\frac{2014}{c}\right)!\cdot c^{\frac{2014}{c}}}$ para $c > 0$, $c|2014$, i.e., $c \in$

$\{1,2,19,53,38,106,1007,2014\}$

$P(x) = \frac{x(x-c)(x-2c)\ldots(x-(2014-c))}{\left(\frac{2014}{c}\right)!\cdot c^{\frac{2014}{c}}}$ Funciona, pois $p(2014) = 1$ e $x\,P(x-c) = (x-2014)P(x) \rightarrow$

$\frac{x(x-c)\ldots(x-(2014-c))(x-2014)}{\left(\frac{2014}{c}\right)!\cdot c^{\frac{2014}{c}}} = \frac{(x-2014)x(x-c)\ldots(x-(2014-c))}{\left(\frac{2014}{c}\right)!\cdot c^{\frac{2014}{c}}}$ que é verdade.

Obs.: Se P tem infinitos zeros, de tem, mas zeros que deg.

Logo $P \equiv 0$

Se $H(x) = H(x-1), H(x) = 0 \rightarrow H(x-1) = 0$. Se H tem algum zero, tem infinitos (nesse caso H$\equiv 0$), senão H é constante, logo de qualquer forma, H é constante.

Problema 3

Sobre uma circunferência marcam-se 2014 pontos. Sobre cada um dos segmentos cujos extremos são dois dos 2014 pontos escreve-se um número real não negativo. Sabe-se que, para qualquer polígono convexo cujos vértices são alguns dos 2014 pontos, a soma dos números escritos nos seus lados é menor ou igual a 1. Determine o maior valor possível para a soma de todos os números escritos.

Solução:

Vamos provar que se temos 2n pontos, a soma máxima é $\frac{n^2}{2}$ para $n > 1$ e $2 + 1$

Primeiro o exemplo para tal soma é tal que, para cada segmento seu valor é $\frac{1+x}{n}$, onde x é a quantidade de pontos no arco, determinado por segmento, que possui menos pontos, ou seja, se os vértices determinar um polígono regular cuja circunferência circunscrita tem comprimento 1, cada segmento tem como valor o comprimento do menor arco determinado por esse segmento.

Esse exemplo funciona, pois o valor de cada lado em um polígono é no máximo o tomando do arco determinado por ele (o de Poá do polígono) e o comprimento da circunferência é 1.

Esse exemplo tem soma total $\frac{n^2}{2}$ pois temos 2n segmentos de valor $\frac{k}{2n}$ para $1 \leq k < n$ e n segmentos de valor $\frac{n}{2n}$, totalizando uma soma de $2n \cdot \left(\frac{1}{2n} + \frac{n-1}{2n}\right) + n \cdot \frac{n}{2n} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$

OBS.: o valor de um segmento é o número real associado a ele e sempre que palor mos em segmento estaremos nos referindo a um que seus extremos são vértices do polígono.

Agora vamos provar que a soma máxima é $\leq \frac{n^2}{2}$

Consideremos que os n pontos Forman um polígono regular de circunraio $\frac{n}{\pi}$ →comprimento 2n da circunferência circunscrita. Para um polígono convexo P, escolha um vértice inicial P_1 e Game os pontos de $P_2, \ldots, Px$, no sentido anti-horário.

Seja $f(AB)$ o valor do segmento AB e $g(AB)$ a medida do arco $\widehat{AB}$ (no sentido anti-horário), seja $A_k = \sum f(AB)$, vértices (A, B) $g(AB) = k$

Assim, $f(P_1P_2) + \cdots + f(P_{x-1}P_x) + f(P_xP_1) \leq 1$ **(1)**

Rotacionando o P por ângulos de $0, \frac{2\pi}{2n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{2n}, \ldots, \frac{(2n-1)2\pi}{2n}$, (sem rotacional os 2014 por , ou seja, mudamos o segmentos escolha para formar uma rotacional) e somando as 2n desigualdades análogas a **(1)**, obtemos $A_{g(p_1p_2)} + A_{g(p_2p_3)} + \cdots + A_{g(p_{x-1}p_x)} + A_{g(p_xp_1)} \leq 2n$ (*)

Como podemos escolher P de modo que seja convexo e $g(p_1p_2) = a_1, g(p_2p_3) = a_2, \ldots, g(p_{x-1}p_x) = a_{x-1}, g(p_xp_1) = a_x$ se

$$x \geq 3 \sum_{i=1}^{x} a_i = 2n, temos, de \{a_i \in \mathbb{Z}^+, \sum_{i=1}^{x} a_i = 2n \rightarrow \sum_{i=1}^{x} Aa_i \leq 2n \qquad (2)$$

Seja

$$B_i = A_i - i, (2) \rightarrow \left\{ a_i \in \mathbb{Z}^+, \sum_{i=1}^{x} a_i = 2n \rightarrow \sum_{i=1}^{x} Ba_i \leq 0 \right. \qquad (3)$$

De (3): $B_k + B_k + B_{n-k} + B_{n-k} \leq 0 \rightarrow 2B_k + 2B_{n-k} \leq 0$ (4)

De (3): $B_1 + B_{n-1} + B_n \leq 0$ (5)

Desse modo, somando (5) com (4) para $k = 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ e com metade de (4) para $k = 1$ obtemos:

$$(B_1 + B_{n-1} + B_n) + (B_1 + B_{n-1}) + \left[(2B_k + 2B_{n-k}) + \cdots + 2B_{\frac{n-1}{2}} + 2B_{\frac{n+1}{2}})\right] \leq 0 \rightarrow$$

$$2\sum_{i=1}^{n-1} B_i + B_n \leq 0 \rightarrow 2\sum_{i=1}^{n-1} A_i + A_n \leq 2\sum_{i=1}^{n-1} i + n \leq 0 \rightarrow$$

$$2\sum_{i=1}^{n-1} A_i + A_n \leq 2\,\frac{n(n-1)}{2} + n = n^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} A_i + \frac{A_n}{2} \leq \frac{n^2}{2}, mas \sum_{i=1}^{n-1} A_i + \frac{A_n}{2}$$ é

exatamente a soma de todos os valores dos segmentos , pois $A_n$conta cada $\{A, B\}$com $g(AB) = g(BA) = n$ duas vezes e cada $A_i, 1 \leq i \leq n$, conta cada$\{A, B\}$ com $g(AB) = i \vee g(BA) = i$ uma única vez.

$\therefore$ A soma total máxima dos valores, dos segmentos é $\frac{n^2}{2}$. Ou seja, para $2n = 2014$, o máximo é $\frac{1007^2}{2}$

Problema 4

Tem-se N moedas, das quais $N - 1$ são autênticas de igual peso e uma é falsa, de peso diferente das demais. O objetivo é, utilizando exclusivamente uma balança de dois pratos, achar a moeda falsa e determinar se é mais pesada ou mais leve que as autênticas. Em cada vez que se possa deduzir que uma ou várias moedas são autênticas, todas estas moedas são imediatamente separadas e não podem ser usadas nas pesagens seguintes. Determine todos os N para os quais se pode garantir que o objetivo seja atingido. (Podem-se fazer tantas pesagens quantas se deseje).

Solução: Vamos a probar que es posible para 2|N, N ≥ 4.

Lema: Dadas "k" monedas, "$k - 1$" de igual peso y una es más/menos pesada, es posible descubrir cuál es la diferente; considerando las condiciones del enunciado. Si no hay una moneda diferente, podemos determinar que las "k" son autenticas si $2|k$.

Demostración del lema: Por inducción fuerte en "k".

Base: $k = 1 \rightarrow$ Solo una opción para la moneda.

$k = 2 \rightarrow$ Pesa una de cada lado. La más/menos pesada será la diferente. Si no lo hace descubriremos que no tenemos una moneda diferente.

Paso inductivo: Suponga que vale para $k < k_0$.

Para k_0 tendrá dos monedas a comparar. De ser igual las dos monedas son autenticas y caemos en el caso $k_0 - 2 \geq 1$. Si se ponen de pesos diferentes la más/menos pesada es la falsa. Como $2|k$ entonces $2|\ k_0 - 2$, si no hay moneda diferente también funciona.

Por otra parte, sea "p" el peso de una moneda normal. Si pesamos cantidades diferentes de monedas, el peso de la moneda diferente $k < 2p$ y no obtenemos información; porque el conjunto más pesado será siempre el que tiene más monedas, porque $0 < k < 2p \Rightarrow xp < xp + k < (x+2)p$.
Entonces podemos suponer que todos los pesajes tienen cantidades iguales de monedas. Por lo tanto, para N impar, no es posible por inducción fuerte.
Base $N = 3$ $\rightarrow$ Al pesar dos monedas si pesan igual no es posible saber si la tercera es más liviana o más pesada.

Paso inductivo: Suponga que no es posible para $N < 2l > 1$.
Para $N = 2l + 1$, si pesamos "x" monedas de cada lado, puede ocurrir que tenemos el mismo peso y por tanto son auténticas. Si esto ocurre $x < l$ y caemos en el caso $2(l - x) + 1$ y $x = l$ no podemos determinar si la última moneda es más liviana o más pesada.
Para $N = 2$ es obvio que no podemos determinar cuál es la falsa.

Para $N \geq 4, 4|N$ pesamos $\frac{N}{2}$ monedas con otras $\frac{N}{2}$ y para cada conjunto de $\frac{N}{2}$ aplicamos el lema, porque si los conjuntos son A y B, con A más liviano que B, la moneda se encuentra en A y es más liviana o se encuentra en B y es más pesada que las auténticas.

Como $N \geq 4 \Rightarrow \frac{N}{2} \geq 2$ y podemos aplicar el lema porque $2 \mid \frac{N}{2}$.
Si $N \equiv 2 \ (mod\ 4), N \geq 6$, pesamos $\frac{N}{2}$ contra $\frac{N}{2}$. Sean A y B los conjuntos pesados. Si A es más liviano que B, siendo $A = \{a_{1,} \dots, a_{n/2}\}$, y $B = \{b_{1,} \dots, b_{n/2}\}$ pesamos entonces $A' = \{a_{1,} \dots, a_{n/2-1}\}$, contra $B' = \{a_{n/2,} b_{1,} \dots, b_{n/2-2}\}$. Si son iguales la diferente está entre $b_{n/2-1}$ y $b_{n/2.}$ Basta ver cuál es la más pesada para descubrir la diferente.
Si A' es más liviano que B'y la moneda diferente esta en $A' = \{a_{1,} \dots, a_{n/2-1}\}$, y es mas liviana o está en $B' = \{a_{n/2,} b_{1,} \dots, b_{n/2-2}\}$ y es mas pesada. Entonces aplicamos el lema en A' y después en B', porque $2 \mid |A'|$ y $2 \nmid |B'|$.
Mas si no encontramos la moneda diferente A' esta tiene que estar en B'.
Si A' es más pesado que B' la única posibilidad es que la moneda es $a_{n/2}$ y es más liviana, porque si en las otras esta la diferente tenían que ser más livianas, pero en el pesaje son más pesadas que las otras. No puede ser una diferente a $a_{n/2}$ porque ella tenia ser mas liviana en el primer pesaje y más pesada en el segundo.

Problema 5

Seja ABC um triângulo acutângulo e H o ponto de interseção de suas alturas. A altura relativa ao vértice A corta BC em D. Sejam M e N os pontos médios de BH e CH, respectivamente. DM e DN intersectam AB e AC em X e Y , respectivamente. Se XY intersecta BH em P e CH em Q, demonstre que H, P, D e Q estão numa mesma circunferência.

Solución: Como el $\measuredangle HDC = 90°$ N es el circuncentro del ΔHDC, luego $ND = NC \rightarrow$ $\measuredangle NDC = 90° - B$
Análogamente $\measuredangle MDC = 90° - C$.
Por la ley de senos: $\Delta DYC \rightarrow \frac{CY}{Sen\,(90° - B)} = \frac{CD}{Sen\,(180 - (90° - B) - C)} \rightarrow \frac{CY}{Cos\,(B)} = \frac{CD}{Sen\,(90° + B - C)} \rightarrow CY = \frac{Cos\,B \cdot CD}{Cos\,(C - B)}$

Como $CD = AC\ Cos(C)$, tenemos que $CY = \frac{Cos\ B\ Cos\ C\ (AC)}{Cos\ (C-B)} \to \frac{CY}{AC} = \frac{Cos\ B\ Cos\ C}{Cos\ (C-B)}$

Como $Cos\ (C-B) = Cos\ (B-C)$, tenemos análogamente,

$\frac{BX}{AB} = \frac{Cos\ B\ Cos\ C}{Cos\ (C-B)} \to \frac{BX}{AB} = \frac{CY}{AC} \to \frac{AX}{AB} = \frac{AY}{CY} \to XY//BC$

Sea $Z = AH \cap XY$. Sea D' la reflexión de D en XY. Como $XY//BC$ y AD es perpendicular a $BC \to XY$ es perpendicular a AD, luego $DZ = ZD'$ y $D' \in AD$.

Vamos a probar que $D'PQ$ es homotético a ABC con centro H. para eso vasta desmostar que $\frac{HD'}{HA} = \frac{HQ}{HC}$ porque $\frac{HD'}{HA} = \frac{HP}{HB}$ y análogamente $\frac{HD'}{HA} = \frac{HQ}{HC} \leftrightarrow \frac{ZD-HZ}{HA} = \frac{HZ}{HD} \leftrightarrow \frac{2ZD-HD}{HA} = \frac{MD-ZD}{HD}$ (*)

Como $XY//BC, ZD = CY$ Sen (C) $= \frac{AC\ CosB\ CosC\ SenC}{Cos(C-B)}$

Luego (*) $\leftrightarrow 2ZD * HD - HD^2 = HA * HD - ZD * HA \leftrightarrow ZD(2HD + HD) = HD(HD + HA) \leftrightarrow ZD = \frac{HD \bullet AD}{AD+HD} \leftrightarrow \frac{HD' \bullet AD}{AD+HD} = \frac{ACCosBCosCSenC}{Cos(C-B)}$ (* *)

Pero $AD = AC\ Sen(C), MD = CD\ Tan(\measuredangle MCD) = AC\ Cos(C)Cot(B)$

Luego $\frac{HD \bullet AD}{AD+HD} = \frac{AC^2 SenCCosCCotB}{AC(\ Sen\ C + Cos\ C\ Cot\ B} = AC\frac{SenCCosCCosB}{(\ Sen\ C + SenB\ CosC\ Cos\ B}$

$\to \frac{HD \bullet AD}{AD+HD} = \frac{ACSenCCosCCosB}{Cos\ (B-C)}$, lo que demuestra (* *)

Luego el $\Delta\ D'PQ \sim \Delta\ ABC \to \Delta\ DPQ \sim \Delta\ ABC \to \measuredangle DPQ = \measuredangle B$ y como

$\measuredangle DHC = 90° - \measuredangle HDC = 90° - (90° - B) = \measuredangle B$, tenemos $\measuredangle DPQ = \measuredangle DHC \to MPDQ$ es cíclico.

O Como $XY//BC, \measuredangle CQY = \measuredangle QCD = 90° - B = \measuredangle YDC = QYD$, luego las mediatrices de QY y de CD coinciden. Luego $QYCD$ es que un trapecio simétrico por esa mediatriz, luego $\measuredangle\ QDY = \measuredangle\ QCY = 90° - A$, y $\measuredangle\ XDP = 90° - A$, análogamente. Luego$\measuredangle PDQ = 180 - 2(90° - A) - (90° - B)(90° - C) = \measuredangle A$. Como $\measuredangle PMQ = 180° - A = 180° - \measuredangle PDQ$, $PHQD$ es Cíclico.

Problema 6

Dado um conjunto X e uma função $f : X \to X$, denotamos, para cada $x \in X$, $f^1(x) = f(x)$ e, para cada $j \geq 1, f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Dizemos que $a \in X$ é um ponto fixo de f se $f(a) = a$.
Para cada número real x, definimos $\pi(x)$ como o número de primos positivos menores ou iguais a x.
Dado um número inteiro positivo n, dizemos que $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ é catraca se $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Prove que:

a) Se f é catracha, então f tem pelo menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ pontos fixos.
b) Se $n \geq 36$, então existe uma função catracha com exatamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ pontos fixos.

Solução:

A) Sea $g(k) = \min\{ X \geq 1 : f^{x}(k) = k\}\, para\ k \in \{1,2,\ldots,n\}$ para f catracha (g existe porque $g(k) \leq f(k)$ porque $f^{f(k)}(k) = k$). Lema: sea $f^{x}(k) = k$, entonces $\frac{g(k)}{x}$. en particular $\frac{g(k)}{f(k)}$.

Demostración del lema: supongamos que $g(k)/x$. sea $X = g(x)e + \pi$, con $1 \leq \pi \leq g(k)$. $f^{x}(k) = k \rightarrow f^{g(k)e+\pi} = k \rightarrow f^{\pi}(f^{g(k)i}(k)) = k$. Como $f^{g(k)}k = k$, obtenemos, por inducción que $f^{g(k)e0}(k) = k \rightarrow f^{g(k)}(f^{g(k)e0}(k)) = f^{g(k)}(k) = k \rightarrow f f^{g(k)(e0-1)}(k) = k$. Así, $f^{g(k)e+\pi}(k) = k \rightarrow f^{\pi}(f^{g(k)e}(k)) = k \rightarrow f^{\pi}(k) = k$, lo que contradice la definición de $g(k)$, porque $\pi < g(k)$. Así $\frac{g(k)}{x}$.

Además que, f es biyectiva, porque es sobreyectiva: $f(f^{(f(k)-1)})(k)) = k\ o\ f(k) = 1 \rightarrow f^{f(k)}(k) = k \rightarrow F(k) = k \rightarrow k = 1$; y es inyectiva porque $f(x) = f(y) \rightarrow f^{f(x)}(y) = f^{f(y)}(y) \rightarrow x = y$.
Luego f es la unión de ciclos, o sea, una unión de secuencias $a_1, \ldots, a_n$, tal que $f(a_{i+1}) = a_{i+1}$ para $1 \leq i \leq e$ $f(a_e) = a_1$. Como $f(a_i) = e,\ e\,/f(a_i)$ para $1 \leq i \leq e$, porque es una función biyectiva finita.
A). Como f es biyectiva, sea $\alpha = f^{-1}(p)$ para p primo.

Suponga que $g(\alpha) = x > 1$. Entonces existen $a_i = p^{i}(\alpha)$, $1 \leq i \leq x$, con $a_x = \alpha_e\ \ a_{(f(p)-1)(mod x)\,x)} = p$, porque $f^{f(p)-1}(\alpha) = f^{f(p)}(p) = p$.

Como $g(a_i) = x$ para $1 \leq i \leq x$, por el lema, $x/a_i \rightarrow x/p \rightarrow x = p$ porque $x > 1$.
Pero también $p/a_i\ 1 \leq i \leq x = p$, pero hay a lo sumo un máximo $\frac{n}{p}$ múltiplo de p distinto en $\{1,2,\ldots,n\}$,
logo $x \leq \frac{n}{p} \rightarrow p \leq \frac{n}{p} \rightarrow p \leq \sqrt{n}$
Es decir, si p es primo, $p > \sqrt{n}, f^{-1}(p)$ es un punto fijo, es decir, $f(f^{-1}(p)) = f^{-1}(p) \rightarrow f^{-1}(p) = p$
Es un punto fijo. Por otra parte 1 tiene que ser punto fijo porque $g(1)/1 \rightarrow g(1) = 1$
Por el lema.
Así, tenemos los puntos fijos $\{p\ primo: \sqrt{n} < p \leq n\} \cup \{1\}$, que son $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

B). Dado $n \geq 36$ vamos a construir una función catracha $f, f\ \{1,2,\ldots,n\} \rightarrow \{1,2,\ldots,n\}$
Sea $2 < p_1 < \ldots < p_e < p_{e+1} < \ldots < p_k$ Los Primos $\leq\ n_e\, p_e \leq \sqrt{n}, p_{e+1} > \sqrt{n}$ Sabemos que tenemos que tener los puntos fijos $p_{e+1}, \ldots, p_k$ y añadir 1 al resto de los valores, los separaremos en conjuntos $Ai = \{a_1, \ldots, a_k\}\, con \frac{k}{a_i}\ \forall\, 1 \leq i \leq k$ y formará para cada conjunto de éstos, un ciclo, i.e., $f(a_i) = a_{i+1}\ \forall\, 1 \leq i \leq k\ y\, f(k) = a_1$. como $g(a_i) = k\ \forall\, 1 \leq i \leq k, f^{f(a_i)}(a_i) = a_i$ porque $g(a_i) = k\,/\,f(a_i) = a_{i+1}$ ($donde\ a_{k+1} = a_i$)
Decimos que un conjunto es bueno si es posible separarlos en conjuntos que satisfacen $|\,A_i|/a\ \forall\, a \in A_i$ con A_i disjuntos y $|\,A_i| > 1$
vamos a probar por inducción en α que si $S \subseteq \{1,2,\ldots,n\}\, con\, n \geq 36$, tal que, $1 \notin S, si\, x \leq n, x = p\alpha^{\frac{1}{1}} \ldots p\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$ para $y_1, \ldots, y_\alpha \in Z \geq 0$ entonces $x \in S$, y si $x = p_{\alpha+1}{}^{(1/\alpha+1)}, \ldots, p_k{}^{(1/k)}\, para\, y_{\alpha+1}, \ldots, y_k \in Z \geq 0$ entonces $x \notin S$, entonces S es bueno si $2 \leq \alpha < e$ o $\alpha = e$ y $p_e(p_{e+1}) \leq n$.
Base: $\alpha = 2$; como $n \geq 36$, tenemos por lo menos 6 múltiplos, como todo elemento de S posee factores 2 0 3, sin tres conjuntos separados;

$S_1 = \{s \in S : G/1\}$, $S_2 = \{s \in S : 2/s, 3 \,/\, s\}$, $S_3 = \{s \in S : 2 \,/\, s, 3/s\}$ sabemos que $|S_1| \geq 5$, porque $S_1 = \{6, 12, 18, 24, 36\}$ solo tiene factor 2.

Para el conjunto S_2, agrupamos sus elementos de dos en dos para formar los conjuntos A_i, posiblemente dejando un elemento, que agruparemos con un elemento S_1

Para S_3 tenemos lo mismo, agrupamos sus elementos de tres en tres y, si sobran uno o dos elementos, $Q(s)$ agrupemos con dos o un elemento de S_1.
Al final, tenemos 2 o más elementos de S_1 utilizados, como existen $x, y \geq 0$ tal que $2x + 3y = n$ para $n \geq 2$ (Si $2 \,/\, n$, basta $y = 1$ y $x = \frac{n-3}{2}$, si $2/n$, basta $y = 0, x = \frac{n}{2}$), podemos agrupar S_1 en X conjuntos A_i de 2 elementos y Y conjuntos A_i de 3 elementos. Como esto, conseguimos agrupar todos los elementos de S en conjuntos A_i, o sea, S es Buena.

Para el paso inductivo, separaremos S en S' y Y conjunto A_i, Donde S' satisface: $X = {p_1}^{1/\alpha} \ldots {p_{\alpha-1}}^{1/\alpha-1} \in S'(1)$ $si\ x < n$
$X = {p_1}^{1/\alpha} \ldots {p_k}^{1/k} \notin S'(1)$, la que se completara.

Inducción.

Separemos S en:
$S_1 = \{s \in S : p_i/s \ 1 \leq i < \alpha\}$, $\{s \in S : p_i p_\alpha/s \ para\ algún\ i < \alpha\}$ $S_3 = S - (S_1 \cup S_2)$
Si $s \in S_1$ debemos tener $p_x \,/\, s$, de lo contrario $p_1, \ldots, p_\alpha / s \rightarrow s \notin S$. Entonces podemos agrupar los elementos de S_1 en grupos de p_α elementos para formar conjuntos A_i. Si se dejan $0 < x < p_\alpha$ elementos de S_1 no agrupados, los agrupamos con $p_\alpha - x$ elementos de S_2, formamos así un conjunto A_i.

Los restantes dos elementos de S_2 y el conjunto S_3 formaran S'. Como $S' \left\{s \in S : p_1^{\frac{1}{1}} \ldots p_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} = s,\ y_1, \ldots, y_\alpha \in Z \geq 0\right\} - S2 - S1, X = {p_1}^{1/\alpha} \ldots {p_{\alpha-1}}^{\frac{1}{\alpha}-1} \in S'$ y como $(\{X = {p_{\alpha+1}}^{1/\alpha+1} \ldots {p_k}^{1/k},\ y_\alpha, \ldots, y_k \in Z \geq 0\} \cup S_1) \cap S' = \emptyset$, $X = {p_\alpha}^{1/\alpha} \ldots {p_k}^{1/k} \notin S'$. Entonces basta probar que $|S_2| \geq p_\alpha$.

Si $p_\alpha (p_\alpha + 1) \leq n$, $2p_\alpha, 3p_\alpha, \ldots, (p_\alpha - 1)p_\alpha, (p_\alpha + 1)p_\alpha \in S_2$, $luego |S_2| \geq p_\alpha - 1$.
$Si\ (p_\alpha + 1) > n \rightarrow p_\alpha + 1^2 > (p_\alpha + 1)^2 > p_\alpha(p_\alpha + 1) > n$, $luego\ {p_\alpha}^2 \leq n \leq {p_\alpha}^2 + 1 \rightarrow \alpha = e$, $pero\ suponemos\ que\ \alpha < e$. $Si\ p_e\ (p_e + 1) > n$. esto completa la Inducción.
Si $p_e\ (p_e + 1) \leq n$, tenemos por inducción que $\{1,2, \ldots, n\} - \{1\} - \{p\ primo: \sqrt{n} < p \leq n\}$ es buena de modo que conseguimos una función catracha que posee los ciclos de los conjuntos A_i. de Inducción los $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos $\{1\} \cup \{p\ primo: \sqrt{n} < p \leq n\}$ y $S = S_0 - \{p_e, 2p_e, \ldots, {p_e}^2\}$, por inducción tenemos que S es buena y cómo podemos formar un A_i como $B = \{p_e, 2p_e, \ldots, {p_e}^2\}$ porque $|B| = p_e, S_0$ también es buena, de modo que también conseguimos la función catracha que queremos.

MEXICO: 2

KEVIN WILLIAM BEUCHOT CASTELLANOS

Problema 1

Para cada entero positivo n, se define s(n) como la suma de los dígitos de n. Determine el menor entero positivo k tal que $s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k)$:

Solución:

Lema 1: Si k es un entero positivo $\rightarrow s(10^k - 1) = s(r(10^k - 1))\, si\, r \leq 10^k + 1$

Para esto veamos que si $r = a_1, a_2, \ldots, a_n\, y\, con\, n \leq k$

$10^k(10^k + 1)$ obviamente es $s(10^k - 1)$ pues esto se debe a que solo se agregan 9 $\rightarrow$ vemos que $(10^k + 1)$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1a_2 \ldots (a_n - 1)9 \ldots 9(9 - a_1)(9 - a_2) \ldots (10 - a_n)$ la suma de los dígitos es $a_1 + a_2 + \ldots + a_n - 1 + (9 - a_1) + (9 - a_2) \ldots + (10 - a_n) + 9(k - k) = 9k = s(10k - 1) \rightarrow s(r(10k - 1)) = s(10k - 1)$.

Además $s(10^k - 1)\, s((10^k - 1)(10^k - 1)) = s(10^{2k} - 1) = 9 * 2k \neq 9k$

$s(k) = s(10k)$ pues solo se le agrega el digito 0 a la derecha y se cumple para $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}0$ que su suma es $s(10^k - 1)$ se cumple para $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ y viceversa.

Por el lema 1 vemos que $K = 9999$ cumple $s(k) = s(2k) = s(2014k)$. y además $s(999) \neq s(1001 - 999) \rightarrow 999$ no cumple y si $k < 999 \rightarrow s(k) = s(k * 999) = 27 \rightarrow k \geq 999$.

Lema 2.

Ahora vamos a demostrar que si un número n tiene kh dígitos y $s(n(10^{kh} + 1)) = \mathrm{s(n)} \rightarrow \mathrm{n} = 10^{\mathrm{k+1}} - 1, 10^{\mathrm{k+2}} - 2, \ldots, 10^{\mathrm{k+2}} - 10. \rightarrow$ sea $\mathrm{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}) \rightarrow (10^{\mathrm{k}} + 1)(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}) = a_1a_2a_3 \ldots (a_{n+1} + a_1)a_2a_3 \ldots a_{k+1}$ esto si $\mathrm{a_{k+1}} + a_1 < 10$ y claramente $s(n(10^k + 1) > s(n)$ pues $s(n(10^{\mathrm{k}} + 1)) = 2s(n) \rightarrow$ supongamos que $a_{n+1} + a_1 \geq 10$ pero vemos que $s(n(10^k + 1) \geq a_2a_3 \ldots a_{k+1}$ pues los últimos k dígitos no se les pueden sumar ni restar algo. Ahora veamos que $a_{n+1} + a_1 < 20 \rightarrow$ si $a_{k+1} + a_1 > 10$ a los mas se acarrea un 1 con $a_k \rightarrow$ vemos que de igual manera $(a_i + 1) < 20$ para toda $i \rightarrow si\, a_1 < a \rightarrow$ el ultimo digito seria $(a_1 + 1) > a_1 \rightarrow s(n(10^k + 1) \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}$!

$s(n(10^k + 1) > s(n) \rightarrow a_1 = 9$ pero para que el acarreo de 1 llegue hasta a_1 se debe tener $(a_i + 1) \geq 10$ para cualquier $i \leq k \rightarrow a_1, a_2, \ldots, a_k = 9$ si no el ultimo digito el que está en el lugar $2kh$ es al menos a_1 pero al acarrear del $(a_{n+1} + a1)$ se debe sumar a algún otro digito desde el lugar de $k + 2$ hasta el $2k + 1 \rightarrow s(n) + 1 \leq s\left(n\left(10^k + 1\right)\right)$ ¡$\rightarrow a_1, a_2, \ldots, a_k = 9 \rightarrow$ debe ser 999 ... 90, a99 ... 9, ... 999 ... 9

Recordemos que vimos que $9999 \geq k > 999 \rightarrow k$ tiene cuatro dígitos y $1001 = 10^3h$

Por el lema 2 si $s(k) = s(1001k) \rightarrow k = 9999{,}9998, \ldots 9991{,}9990\, pero\, si\, s(k) = s(9k) \rightarrow 9/s(k)\, pues\, 9/s(9k)$ (por el criterio de divisibilidad del 9). Si $s(k) = s(1001k) \rightarrow k = 9999\, o\, 9990\, pero\, si\, 9990$ cumpliera la haría 999 pero ya vimos que 999 no cumple pues $s(1001 * 999) \neq s(999)$.

$$\therefore\; k = 9999\, y\, es\, el\, menor\, entero\, que\, cumple\, s(k) = s(2k) = \ldots = s(2014k)$$

Problema 2

Halle todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que $P(2014) = 1$ y, para algún entero c, se cumple que: $xP(x - c) = (x - 2014)P(x)$:

Solución:

$2014\,p(2014 - c) = 0 \qquad p(2014 - c) = 0$

$0 = -2014\,p(0) \rightarrow p(0) = 0, \quad \rightarrow p(c) = 0$

Veamos que con $x = 0$ nos queda que $0\,p(-c) = -2014\,p(0) \rightarrow 0 = -2014\,p(0) \rightarrow p(0) = 0 \rightarrow$ con $x = c \rightarrow$ $c\,p(0) = c\,(-2014)p(c) \rightarrow 0 = (c - 2014)p(c) \rightarrow c = 2014$ o $p(c) = 0$. Ahora si $p(c) = 0 \rightarrow con\, x = 2c$ $\;2c\,p(c) = (2c - 2014)\,p(2c) \rightarrow 0 = (2c - 2014)\,p(2c) \rightarrow c = 1001\, o\, p(2c) = 0$. Ahora vemos que pasa si $p(2c) = 0, si\ c = 0 \rightarrow x\,p(x) = (x - 2014)\,p(x)$ esto no se cumple para $x = 2014\, pues\ 2014\,(1) = 0\,(1) \rightarrow$ $2014\,! \rightarrow c \neq 0 \rightarrow 2c \neq c$.

Ahora veamos por inducción que $p(kc) = 0\ desde\ k = 0\ hasta\ k = \frac{2014}{c} - 1\ con\ k \in N$

Si $p(kc) = 0 \rightarrow$ veremos para $(k + 1). \rightarrow$ ponemos $x = (k + 1)c \rightarrow \big((k + 1)c\big)p(k\,c) = ((k + 1)c - 2014)\,p((k + 1)\,c) \rightarrow 0 = ((k + 1)c - 2014)\ pc(k + 1)\,c) \rightarrow (k + 1)\,c = 2014$ o $p((k + 1)\,c) = 0$.

Si $c\ \not/2014\ \nexists k\ tal\ que\ kc \neq 2014, \therefore p(kc) = 0\, \forall\, k$.

Como el polinomio tendría infinitas raíces debe ser $p(x) = 0$ pero $P(2014) = 1\ ! \rightarrow c\,/\,2014$. Pero además c es positivo pues si c no fuese positivo, y como k lo es entonces $kc \neq 2014$, entonces c debe ser positivo.

Ahora tenemos que $c\,/\,2014$ y que $p(0), p(c), \dots, P(2014 - c) = 0. \rightarrow$ encontremos que polinomios cumplen para cada c.

Veamos que para c existe un único polinomio que cumpla estas condiciones pues si $Q(x) = P(x - c) \rightarrow$ $Q(x) = (x - c)(x - 2c)\dots(x - 2014)R(x)$, pues $c, 2c, \dots, 2014$ son raíces de $P(x - c)\ y\ P(x) = (x)(x - c)\ \dots\ (x + c - 2014)\,S(x)$.

$\rightarrow x\,Q(x) = (x - 2014)P(x) \leftrightarrow x\,(x - c)(x - 2c)\dots(x - 2014)R(x) = (x)(x - c)\dots(x + c - 2014)(x - 2014)S(x) \leftrightarrow x\,(x - c)(x - 2c)\dots(x - 2014)\big(R(x) - S(x)\big) = 0\,\forall\, x, pero\ si\ x \neq 0, c, 2c, \dots, 2014 \rightarrow R(x) = S(x) \rightarrow$ para infinitos valores $R(x) = S(x)$

$\therefore R(x) \equiv S(x)$

$R\ y\ S$ son los mismos polinomios, esto porque $Q(x) = P(x - c)$.

Veamos que $R\ y\ S$ son una constante pues si no fuese así existiría m tal que $S(m) = 0 \rightarrow R(m) = 0$ $pero\ P(m) = 0 \rightarrow a(m) = 0 \rightarrow m * c$ es raíz de P.

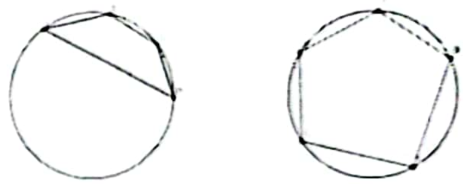
Sea S la raíz más grande de $S(x) \rightarrow P(s) = 0 \rightarrow Q(s + c) = P(s) = 0 \rightarrow R(s + c) = 0 \rightarrow$ $s\ y\ s + c$ son raíces distintas pues $s + c > s$ (pues c es positiva) $\rightarrow S(x) \equiv R(x)\,! \rightarrow$ No existen raíces para $S(x)$ y para $R(x) \therefore P(x) = x\,(x - c)\,(x - 2c)\ \dots\ (x + c - 2014)a$, donde a es el coeficiente principal (pues eso es $S(x)$) $\rightarrow P(2014) = a\,(2014)\,(2014 - c)\,(2014 - 2c)\,(c) = 1 \rightarrow$ $a = \frac{1}{\left(\frac{2014}{c}\right)!\,c^{\left(\frac{2014}{c}\right)}} \rightarrow$ estos polinomios cumplen $P(x) = \frac{1}{\left(\frac{2014}{c}\right)!\,c^{\left(\frac{2014}{c}\right)}}\,(x)(x - c)\,(x - 2c)\ \dots\ cx + (-2014)$, cumplen las dos condiciones $P(2014) = 1\, y\, xP(x - c) = (x - 2014)\,P(x)$, y el polinomio existe para toda c que divide a 2014 que son $1, 2, 19, 38, 53, 106, 1001, 2014$, solo teniendo en consideración que si $c = 2014$ el polinomio es $P(x) = \frac{1}{2014}x$

Problema 3

Sobre una circunferencia se marcan 2014 puntos. Sobre cada uno de los segmentos cuyos extremos son dos de los 2014 puntos, se escribe un número real no negativo. Se sabe que para cualquier polígono convexo cuyos vértices son algunos de los 2014 puntos, la suma de los números escritos en sus lados es menor o igual que 1. Determine el máximo valor posible de la suma de todos los números escritos.

Solución:

Un ejemplo para suma $\frac{n^2}{2}$ con $2n$ puntos es decir que los arcos entre vértices consecutivos valen $1/n$ y luego a un segmento asignarle el valor de su arco menor de la circunferencia → si uno puntos a lo más suman 1 pues si están así si los arcos que se forman entre los lados son todos los menores → suma 1 pero si hay alguno que sea el mayor → suma menos que toda la circunferencia por ejemplo:



AB es el menor, BC también, CD también, pero DA marca el arco mayor (viendo todo en el sentido de las manecillas del reloj) → el número en AD es menor que el arco DA → suma menos que 1 pero si DA fuera el arco menor sumaria 1 y así→ nunca suma más que 1 pues solo suma distinto de 1 si alguno es arco mayor pero entonces e menor.

→De cada vértice salen valores $\frac{1}{2n}, \frac{2}{2n}, \dots, \frac{n}{2n}, \frac{n-1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n}$→ la suma es $\frac{2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)+n}{n} = (n(n-1)+n)2 = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$ por cada vértice se cuenta 2 veces → la suma es $\frac{n^2}{2}$.

Vamos a demostrar que para $2n$ (en lugar de 2014) la mayor suma posible es $\frac{n^2}{2}$.
Tomemos un acomodo con suma de aristas máxima.
Primero…
Lema 1: Si tenemos una arista en un numero x escrito → existe un polígono convexo que tiene esa arista como lado de tal manera que la suma de los demás lados vales exactamente 1-x.
Si no existiera → tomamos el polígono que lo tiene con mayor suma de los demás lados, (claramente no es $1-x$ → si cambiamos x a $1-c$ la suma de esos lados) → x se puede incrementar y → no sería un acomodo de suma máxima.

Lema 2: Para cada diagonal existe un polígono convexo talque lo tiene a él cómo lado y la suma de los demás lados son a los más igual que el número de ese lado.

Se sigue del lema 1 pues existe uno con el que suma 1, sea $A_1A_2 \dots A_KAB$ (donde AB es el que nos importa) → sea |XY| el valor del numero en el segmento XY →$|A_1A_2| + |A_2A_3| + \dots + |AB| + |BA_1| = 1$→$|A_1A_2| + |A_2A_3| + \dots + |BA_1| = 1 - |AB|$ y como AB es diagonal → existe al menos un punto P en el otro semiplano de AB donde no están las A_i →$|A_1A_2| + |A_2A_3| + \dots + |A_kA_1| + |AP| + |PB| + |B| <= 1$ →$|A_kP| + |PA\_1| <= |AB|$ y en general eso pasa si tomo puntos $P_1P_2P_3, \dots, P_j$→$|AP_1| + |P_1P_2| + \dots + |P_jB| \leq |AB|$

Vamos a consideras ahora la medida de un arco AB en la circunferencia como si en el sentido de las manecillas están $C_1, C_2, \dots, C_k$ en el arco AB → su medida es $|AC_1| + |A_1C_2| + \dots + |C_kB|$

Vemos que si demostramos que cada segmento mide menor o igual que su arco menos → la mayor suma es $\frac{n^2}{2}$ya que cada arco aparece la misma cantidad de veces en la suma de los segmentos de esta forma y es análogo a como se cuenta en el ejemplo dado en la hoja 1. Como cada arco se cuenta cierto número de veces, (que es $\frac{n^2}{2}$ queda como fracción pues en un diámetro (o de n y n) cada uno se cuenta ½ de vez) y en total suman $x <= 1$ → la suma de todos los segmentos de kx donde k es constante en términos de n →$kx <= k = \frac{n^2}{2}$

Veamos que si la suma de los lados del convexo con los $2n$ puntos suma 1 acabamos pues si me fijo en el segmento AB →$|BC_1| + |C_1C_2| + \dots + |C_kA| + |AB| \leq 1$ y $|AD_1| + |D_1D_2| + \dots + |D_jB\ | + |AB| \leq 1$

Pero $|BC_1| + |C_1C_2| + \dots + |C_kA| + |AD_1| + \dots + |D_jB| = 1$

→$|AB| \leq 1 - (|AD_1| + \dots + |D_jB|)ó1 - (|BC_1| + |C_1C_2| + \dots + |C_kA|)$ que son $|BC_1| + |C_1C_2| + \dots\ y\ |AD_1| + \dots + |D_jP|$ respectivamente → es a lo más el más pequeño y ya terminamos.

Podemos demostrar o que deben sumar 1 los lados del $2n - agono$ o simplemente que cada segmento vale a lo más su arco de menor valor.

Para hacer estas cuentas consideramos el arco menos y no el arco de menor medida (los arcos menores se cuentan en cuantos vértices de los 2n hay entre los 2 vértices que tomaste) → esta suma si da kx y la suma de los de arco de menor medida de eso o menos ∴ si basta con ver que cada segmento vale su arco menor y/o de menor medida.
Veamos que cada segmento si está en un máximo es mayor o igual a su arco de menor medida pues si un arco mide a y otro b → si el segmento mide y, $y - a \geq y$ y $1 - b \geq y$ por el lema 2 existe un polígono que suma 1 usando a y como lado → el arco que quede del otro lado de ese polígono es menor

→Vamos a mostrar que en ese arco la suma puede aumentar $y \leq 1 - a, y \leq 1 - b$.

Supongamos que los lados del 2n no suman 1 → vamos a probar que no es de suma máxima

- → Para cada lado l_i, $\exists p_i$ un polígono convexo con l_i como lado y de manera que $s(p_i) = 1$ donde $s(p)$ es la suma de los números en sus lados.
- → p_i debe tener al menos un lado que no es del 2n-agono pues sino seria el mismo 2n-agono y

∴Tenemos (esquema → al menos existen AB tal que el arco AB contiene otros vértices del circulo → si ese arco mide x → $|AB| > x$ porque está del otro semiplano de AB que p_i además cada arista entre vértices del AB (cualquier p_i en ese arco suma a lo mas |AB| → ahora me fijo en AC tal que A_1C sean consecutivos en el circulo vere que no existe un p_i para AC ya que si solo tiene puntos dentro del arco AB no suma más que AB pues no hay lado que sume más que eso y cacho de polígono que sume más que eso y menos que $AB > \frac{1}{2}$ se podría que existiera pero veamos eso después → sino están pasando de p_i.

Problema 5

Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de sus alturas. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y, respectivamente. Si XY intersectan a BH en P y a CH en Q, demuestre que H, P, D y Q están en una misma circunferencia.

Solución:

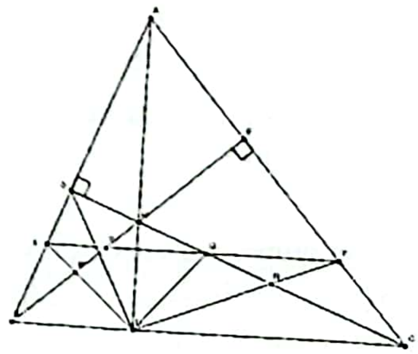
Sean E y f los pies de las alturas de B y C respectivamente.
Veamos que como DFAC es cíclico →$\measuredangle BFN = \measuredangle BCA\ y\ ademas\ \measuredangle FDA = \measuredangle FCA$ ahora como M es el punto medio de la hipotenusa del HDB→MB=MD →$\measuredangle MBD = \measuredangle MDB$→ como $\measuredangle FCA + \measuredangle EBD + \measuredangle BCF = 90º$ (por el ΔBEC)→$\measuredangle FDX = \measuredangle FCB$

Ahora veamos que análogo a $\measuredangle MBD = \measuredangle MDB \rightarrow \measuredangle NDC = \measuredangle NCD \rightarrow \measuredangle YDC = \measuredangle FDX\ y\ \measuredangle XFD = \measuredangle YCD \rightarrow FXD = \measuredangle DYC \rightarrow \measuredangle AXD + \measuredangle DYA = 180º\ pues\ \measuredangle DYA = 180º - \measuredangle CYD \rightarrow AYDX$ ES CICLICO →$\measuredangle DYX = \measuredangle XAD\ y \measuredangle DXY = \measuredangle DAY \rightarrow \measuredangle AYD = \measuredangle XAD = \measuredangle QCD$ (pues $\measuredangle XAD = \measuredangle FAD = \measuredangle FCD = \measuredangle QCD$) , $(FDCA\ ciclico)$, entonces AYCD es cíclico análogamente XPDB es cíclico →$\measuredangle HQP = \measuredangle YQC = \measuredangle YDC \rightarrow$ si vemos $\measuredangle HDP = \measuredangle YDC = \measuredangle FCD.$

Pero el $\measuredangle XDP = \measuredangle XBP = \measuredangle FDH\ (pues\ tambien\ FHDB\ es\ ciclico)$→$\measuredangle HQP = \measuredangle FDX = \measuredangle FCD.$

$$\therefore \measuredangle HQP = \measuredangle HDP \rightarrow HPQD\ es\ ciclico\ que\ es\ lo\ que\ queriamos.$$

*Observemos que P y Q están en los segmentos HB y HC, pues $\measuredangle PDB = \measuredangle AXY < 90º$ PUES $\measuredangle AXY = \measuredangle ABC$ y es acutángulo, ABC análogamente para Q y → todos los movimientos de ángulos se hacen en el dibujo.



Problema 6

Dado un conjunto X y una función $f: X \rightarrow X$, denotamos, para cada $x \in X$, $f^1(x) = f(x)$y, para cada $j \geq 1, f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Decimos que $a \in X$ es un punto fijo de si $f(a) = a$. Para cada número real x, definimos $\pi(x)$ como la cantidad de primos positivos menores o iguales que x. Dado un número entero positivo n, decimos que $f: \{1,2,\dots,n\} \rightarrow \{1,2,\dots,n\}$ es catracha si $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1,2,\dots,n\}$.
Pruebe que:

a) Si f es catracha, entonces f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.
b) Si $n \geq 36$, existe una función catracha con exactamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

Solución:

Veamos primero que si f es catracha → f es inyectiva pues sino, existen $a\ y\ b$ tal que $f(a) = f(b) = x$→$f^x(a) = a\ y\ f^x(b) = b$ pero $f^x = f^{x-1}(f(a)) = f^{x-1}(x)$ y $f^x(b) = f^{x-1}(x)$ análogamente $a = f^x(a) = f^{x-1}(x) = f^x(b) = b$→$a = b$→$f$ es inyectiva → f es biyectiva pues si no fuese así existe una k tal que no hay x con $f(x) =$

$k \rightarrow$ por el principio de las casillas hay 2 números a y b que su f es igual pues queremos acomodar n valores en $n-1$ valores de sus funciones $\rightarrow$ 2 son iguales. ∴Si f es catracha debe ser biyectiva.

Ahora definamos r_i como el menor entero tal que $f^{r_i} = i$ (que existe pues $f^{f(i)}(i) = i \rightarrow$ es conocido que $r_i|x$ si $f^{x}(i) = i$ (pues la demostración dice si existe x tal que $r_i + x \rightarrow$vemos que también $x - r_i$ cumple, $f^{x+r_i}(i) = i \rightarrow x - r_i$ cumple y por lo tanto por el algoritmo de la división existe k tal que $r_i > x - k_{r_i} > 0 \rightarrow f^{x-k_{r_i}}(i) = i$ y es menos a r_i).

Ahora vamos a demostrar que si p es un primo tal que $p > \sqrt{n} \rightarrow f(p) = p$.
Supongamos que no $\rightarrow$ como es f es una biyeccion $\rightarrow$ existe a tal que $f(a) = p \rightarrow$ vemos que $f^{p}(a) = a \rightarrow r_a|p \rightarrow r_a = 1, \quad p \ pero\ r_a \neq 1$ pues $a \neq p \rightarrow r_a = p \rightarrow a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{p-1}(a)$ son todos números distintos y los llamamos $a_1 = f'(a) \rightarrow a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p - 1$ son todos distintos pero ahora vemos que p/a_i por inducción p/a, ya que $a_1 = p$.

Hipótesis: para k se cumple que $p|a_k \rightarrow$ veremos que $p|a_{k-1}$

$\rightarrow$ Vemos que $f^{f(a_k)}(a_k) = a_k \rightarrow f^{a_{k+1}}(a_k) = a_k$ pero sabemos que $f'(a_k) = a_k + p = ak \rightarrow r_{a_k}|p\ pero\ r_{a_k} \neq 1 \rightarrow r_{a_k} = 1 \rightarrow p|a_k$

$\rightarrow p|a_{k+1}$ pues $f^{a_{k+1}}(a_k) = a_k \rightarrow$la hipótesis se cumple.

$\therefore\ p|a_k\ \therefore\ k\ para\ un\ k \geq 1 \rightarrow p|a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p-1}, a_p\ pero\ a_p = a_0 \rightarrow$ p divide a p números distintos en la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$
Pero eso no es posible pues si son p números distintos múltiplos de p positivos (pues 0 no está en $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$) $\rightarrow$ son de la forma $k_{1p}, k_{2p}, \ldots, k_{pp}$ pero (una de las k_i son distintos si en orden son $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \cdots \leq c_p \rightarrow c_p \geq p \rightarrow$ algún $a_i = c_p p \geq p^2 > no^r \rightarrow$ no existe a tal que $f(a) = p$ y $a \neq p$ si $p > \sqrt{n}$
$\rightarrow$Si p es primo y $p > \sqrt{n}$ se tiene que $f(p) =$ p ahora veamos también que existe un entero tal que $f(a) = 1$ pues f debe ser biyectiva.

$$\therefore f^{f(a)}(a) = a \rightarrow f(a) = a = 1$$

$\rightarrow$Todos los primos mayores a $\sqrt{n}$ y el 1 son puntos fijos.
∴ Hay $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos al menos pues $\pi(n) - \pi(\sqrt{n})$ son cuantos primos mayores a $\sqrt{n}$ y menor o iguales a n hay. Y el +1 es porque $f(1)$ es punto fijo.
$\therefore$ *a) queda demostrado. si f es catracha* $\rightarrow$ *f tiene al menos* $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ Puntos fijos

Veamos que hasta $\left[\frac{3}{2}p^2\right] + 2$ podemos encontrar al menos p-1 múltiplos de $2p$ y $3p$ (para $\left[\frac{3}{2}p^2\right]$, pues $\left[\frac{\left[\frac{\frac{3}{2}p^2}{p}\right]}{2}\right] + \left[\frac{\left[\frac{\frac{3}{2}p^2}{p}\right]}{3}\right] - \left[\frac{\left[\frac{\frac{3}{2}p^2}{p}\right]}{6}\right] \geq \frac{\frac{3}{2}p^2}{3} - \left|+\frac{\frac{3}{2}p^2}{3} - \right| - \frac{\frac{3}{2}p^2+1}{6} = \frac{9}{12}p^2 + \frac{6}{12p^2} + \frac{1}{6} - 2 = \frac{12}{12}p^2 - \frac{11}{6} = p^2 - \frac{11}{6}$

$\rightarrow$Como en cada paso solo puede aumentar y en $\left[\frac{3}{2}p^2\right] + 2$ y $\left[\frac{3}{2}p^2\right] + 1$ hay al menos uno que es por numero de divisores al menos en 1.

La suma de múltiplos de p divisibles entre 2 a 3 es $\left[\frac{\frac{kp}{p}}{2}\right] + \left[\frac{\frac{kp}{p}}{3}\right] - \left[\frac{\frac{kp}{p}}{6}\right]$ pues los números son $p, 2p, \ldots, kp$ y es lo mismo que ver el número de múltiplos en $1, 2, \ldots, k$ que es $\left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{3}\right] - \left[\frac{k}{6}\right]$

A este hecho que $\left[\frac{3}{2}p^2\right]+2$ tiene al menos $p-1$ múltiplo de 2 o 3 lo llamaremos supongamos que $p \neq 2,3$ veamos que $p^2 \equiv 1 \; mod \; 4 \; y \; 3 \rightarrow \frac{3}{2}(p^2-1)$ es múltiplo de 4 pues $4/p^2-1 \rightarrow 2 \,/\, \frac{(p^2-1)}{2}$ y $3 \,/\, 3(p^2-1) \rightarrow$ ahí la suma da exactamente $\left[\frac{p^2-1}{p}\right] = p-1 \; divisores \rightarrow$ ahora si sea el hecho de que en los múltiplos de p del $|a| \cdot \frac{3}{2}(p^2-1)$ son al menos $p-1$ lo llamare (l) y vemos que es hasta el numero $\frac{3}{2}\left[\frac{p^2-1}{p}\right]p = \frac{3}{2}(p^2-p)$

Vemos que $\left[\frac{\frac{kp+r}{p}}{s}\right] = \left[\frac{\frac{kpr}{p}}{s}\right]$ pues $\left[\frac{k}{s}\right] = \left[\frac{k}{s}+\frac{r}{ps}\right]$ si rlp pues $\frac{r}{ps} < \frac{1}{s} \rightarrow \frac{k}{s}+\frac{r}{ps} < \frac{k+1}{s}$ y pues $\left[\frac{k}{s}\right] = \left[\frac{k+1}{s}\right] = \left[\frac{k}{s}+\frac{r}{ps}\right] = \left[\frac{k}{s}\right]$ si $s \neq k+1$ y $\left[\frac{k}{s}+\frac{r}{ps}\right] < \left[\frac{k}{s}\right]+1$

Ahora además de (1) demostraremos lo siguiente que será si $k \leq \frac{p-1}{2} \rightarrow$ en los números $p, 2p, 3p, \dots, (k+p)p$ se tiene que hay almenos k múltiplos de 2 o 3, pero eso es obvio pues del $|a|p^2$ hay $\frac{p-1}{2}$ *multiplos solo de 2p pues* $\left[\frac{p^2}{2p}\right] = \left[\frac{p}{2}\right] = \left[\frac{p-1}{2}\right] \rightarrow$ (2) queda demostrado.
∴ ya podemos utilizar (1) y (2)

Ahora veamos que si q y p son 2 primos mayores a 3 con q<p → no puede ocurrir que alguno de los números $q, 2q, \dots, \frac{3}{2}(q^2-q)$ que sea multiplo de 2 o 3 y que sea igual a alguno de los números $p, 2p, 3p, \dots, kp$, pues si fuera así→ el numero seria n → $q/n, p/n$ y $2/n \rightarrow 2pq \leq n \rightarrow 2pq \leq \frac{3}{2}(q^2-q) \rightarrow 2p \leq \frac{3}{2}(q-1) \rightarrow p \leq \frac{3}{4}(q-1) < q \rightarrow$ no se comparten números en las sucesiones $q, 2q, \dots, \frac{3}{2}(q^2-q)$ y $p, 2p, 3p, \dots, \frac{3}{2}(p^2-p)$ *si* $p \neq q$ y además son múltiplos de 2 o 3.
A esto también lo llamaremos (3)

→ (1): es del $|a| \cdot \frac{3}{2}(p^2-p)$ hay al menos $p-1$ múltiplos de $2p \; y/o \; 3p$
(2): Si $1 \leq k \leq \frac{p-1}{2} \rightarrow$ del $|a|\,kp$ hay almenos k múltiplos de $2p \; y/o \; 3p$
(3): Las sucesiones p, 2p, ..., $\frac{3}{2}(p^2-p)$ para los primos distintos son disjuntas si solo consideramos los múltiplos de $2p \; y/o \; 3p$.

Ahora (4) será que como $n \geq 36 \rightarrow$ existen almenos 5 múltiplos solo de 2 o 3 y múltiplo de 6 entre los números menores a n.

Ahora si usando las anteriores hechos veremos que para toda n existe una f catracha tal que tiene exactamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.
Sean $q_1, q_2, \dots, q_k$ los primos menores a $\sqrt{n} \rightarrow$ sean $A_{q_i} = \left\{q_i, 2q_i, 3q_i, \dots, \left[\frac{n}{q_i}\right]q_i\right\}$
Ahora veamos que es posible elegir siempre q_i de los números en el conjunto A_{q_i} y hacer que si los números en el conjunto $a_1, a_2, \dots, a_j \rightarrow f(a_j) = a_{j+1} \; y \; f(a_{q_i}) = a_1 \rightarrow f^{f^{a_j}}(a_j) = f^{q_{i_r}}(a_j) = a_j$ *pues tiene ciclo* q_i lo que definimos. →Si tomo cualesquiera q_i *elementos del* A_{q_i} los puedo ciclar y si cumplirían las condiciones de la función catracha –A ahora observemos las siguientes cosas:

$$|A_{q_i}| \geq q_i \; pues \; n > q_i^2 \rightarrow \left[\frac{n}{q_i}\right]q_i \geq q_i^2$$

Ahora utilizando eso usando (1) vemos que si $|A_{q_i}| \equiv r \; mod \; q_i \rightarrow$ elegimos r números en $|A_{q_i}|$ del subconjunto $\left\{q_i, 2q_i, \ldots, \frac{3}{2}(q^2-q)\right\}$ $(si \left[\frac{n}{q_i}\right] \geq \frac{3}{2}q_i - q_i$, si no ahorita completamos usando (2) y de tal manera que sean múltiplos de 2 y/o 3 $\rightarrow$ a esos r números no las metemos en los ciclos que creamos con q_i y a todos los demás los metemos en algún ciclo $\rightarrow$ todos los múltiplos de $q_i excepto$ alguno de 2 y 3 se pusieron en ciclos por lo que su f ya esta definida y vemos que esto se puede hacer para todo q; si $\left[\frac{n}{q_j}\right] \geq \frac{3}{2}(q_j - 1)$, $pero \; ahora \; veamos \; que \; pasa \; si \left[\frac{n}{q_i}\right] \leq \frac{3}{2}(q_i-1) \rightarrow A_{q_i} = \{q_i, 2q_i, 3q_i, \ldots, kq_i\} \; con \; k \leq \frac{q_i-1}{2} + q_i \rightarrow$ por (2) también como $k \leq \frac{q_i-1}{2} + q_i$ hay almenos k-q números en A_{q_i} tal que son múltiplos de 2 y/o 3

- ➔ Elegimos k de esos números y no los metemos en ciclos.

∴ Como esto se puede hacer para todo q_i tal que $q_i \neq 2{,}3 \rightarrow$ definimos f para todos los números excepto para algunos múltiplos de 2 y de 3.

Pues lo hacemos de mayor primo a menos si ya sabemos que en A_{q_k}no se utilizo el numero m pero m esta en $A_{q_r} \rightarrow$ consideramos ahora $A_{q_r} = A_{q_r} + 3m$ pero esa m no se encuentra en los números $\left\{q_i, 2q_i, \ldots, \frac{3}{2}(q_r{}^2 - q_r)\right\}$ ∴ siempre puedo "quitar" números 8los que no se usan en ciclos) de tal manera que $|A_{q_i}| - (q_n)$ de números que quite sea divisible entre q_r.

- ➔ Ahora si vemos que ya solo si hay números que no están en ciclos (ósea que no este definido f)
- ➔ 2 o 3 los dividen
- ➔ Aún están en $A_2 o \; en \; A_3 \rightarrow$ vamos a ver que a estos también seles puede asignar ciclos y ∴ $cada$ n tiene una f que cumple la propiedad de una catracha ∴ toda la función es catracha y solo tendría $\pi(n) - \pi(\sqrt{n})$ puntos fijos.
- ➔ Nos fijamos en $A_3|\{6,12,18,24,36\} \rightarrow A_3|\{6,12,18,24,36\} \equiv 0,1,2 \; mod \; 3$
- ➔ Le agrego los números necesarios 0,1 ó 2 para que $3/(A_3/\{6,12,18,24,36\}) \rightarrow$ en el conjunto $\{6,12,18,24,36\}$ quedan almenos s-2=3 números que no están en algún ciclo.
- ➔ Ahora nos fijamos en $A_2 \; si \; |A_2|$ es par $\rightarrow$ hacemos parejas y acabamos si A_2 llegase a ser impar $\rightarrow$ con los números del conjunto $\{6,12,18,24,36\}$ que no tienen ciclo (al menos 3) hacemos un ciclo de 3 y $\rightarrow$ como esos números están también en A_2 ahora $A_2 \; menos \; esos \; numeros$ tiene una cantidad par de números por lo que se pueden hacer los ciclos de 2 $\rightarrow$ si se le pudo asignar una f a cada entero que cumple la condición de las catrachas.

∴ Esa f que definimos es catracha y las únicos puntos fijos son 1 y los primos mayores a $\sqrt{n}$ que son $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1 \rightarrow$ b) es cierto.

Se sigue utilizando la información de los $\left\{p, 2p, 3p, \ldots, \frac{3}{2}(p^2-p)\right\}$ disjunto para hacer las cuentas del tamaño de $|A_{p_i}|$aunque haya dicho antes que se hace como para p_i, siguiendo esto que acabo de decir se hace en orden y siempre se pueden quedar k elementos sin usarse en ciclos de longitud p_i pues no lo esta en A_{p_i+k}con k negativo y si $|A_{p_i}| \equiv k \; mod \; p_i$

- ➔ Si se puede hacer todo lo que dije anteriormente completando con esta información.

∴ Pues si recordamos la demostración de (3) vimos más aún que en $\left\{q, 2q, \ldots, \frac{3}{2}(q^2-q)\right\}$(solo considerando múltiplos de 2 y 3) es disjunta de $A_p pues \; mas \; aun \; disjunta \; de \; p, 2p, 3p, \ldots, kp \ldots$ si p>q.

PORTUGAL: 2
DAVID PIRES TAVARES MARTINS

Problema 1

Para cada inteiro positivo n, define-se s(n) como a soma dos dígitos de n. Determine o menor inteiro positivo k tal que s(k) = s(2k) = s(3k) = · · · = s(2013k) = s(2014k).

Demostración:
Vamos a probar que la menor k es 9999. La demostración consiste en dos partes, probar que funciona y probar que sea el menor que funcione.

Probar que funciona
Para $1 \leq n \leq 2014$, sea abcd una representación decimal. Entonces $n \cdot 9999 = n(10000-1) = abcd0000 - abcd.$

Supongamos que $d \neq 0$ (para toda n, es evidente que $s(n) = s(n10^m)$, m entera no negativa, luego podemos sustituir n por un n/10^m aproximadamente tal que $d \neq 0$, se observa que ser cero; por ejemplo, $abc(d-1)10000 + (10000 - abcd)$, como $d \neq 0$ es fácil de ver que $9-a, 9-b, 9-c, 10-d$ son dígitos (todos ellos son introducidos entre 0 y 9). Y que $abcd + (9-a)(9-b)(9-c)(10-d) = d + 10 - d + 10(c+9-c) + 100(b+9-b) = 1000(a+9-a) = 10+90+900+9000 = 10000.$ *Luego* $(10000 - abcd) = (9-a)(9-b)(9-c)(10-d)$

Obtenemos a continuación: $abc(d-1)10000 + (9-a)(9-b)(9-c)(10-d) = abc(d-1)(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)$, esta es una representación de $9999 \times abcd$, y la suma de dígitos es $a+b+c+d-1+9-a+9-b+9-c+10-d = 9+9+9+9 = s(9999)$. Luego $s(n9999) = s(9999)$, como queríamos.

Supongamos ahora que hay una k menor ($k = abcd$ en representación decimal).
Consideremos la igualdad $s(k) = s(1001k)$. Vemos que $10001k = 1000k + k = abcd000 + abcd.$
Supongamos que $abcd + a < 10000$, entonces la representación decimal de $(abcd + a)$ va a tener como primer dígitos de igual algo mayor que la suma de dígitos de $(abcd + a)$ es mayor que a menos que $abcd + a = a000.$ Pero es absurdo, a no ser que $a = b = c = d = 0$, más hay $k = 0$, o que no es permitido.

Se observa que los últimos tres dígitos de $abcd000 + abcd$ son b, c, d luego la suma de los dígitos es necesariamente mayor que $a + b + c + d = s(9999)$

Tal vez el caso $abcd + a \geq 10000$ mas como $0 \leq a \leq 9$, eso implica que $abcd = k \geq 9991$. Se observa que k tiene que ser múltiplo de 9; $S(x) = x$ para toda x, y si k no es múltiplo de 9, tenemos un absurdo:

$k \equiv_9 s(k) = s(9k) \equiv_9 0, \textit{luego k es multiplo de } 9. \textit{con } k > 9991$, el único múltiplo de 9 es 9999, luego el menor k tal que esto funcione es 9999.

Problema 2

Halle todos los polinomios P(x) con coeficientes reales tales que P(2014) = 1 y, para algún entero c, se cumple que: $xP(x-c) = (x-2014)P(x)$

Solución:

Supondremos que no existe ningún entero positivo k, tal que $k_c = 2d^\wedge n$.
Entonces tenemos lo siguiente: para todo entero no negativo $P(^\wedge c) = 0$, la demostración es por inducción.

Paso 1) Sustituyendo $x = 0$, tenemos que $0 = 2014.P(0) \to P(0) = 0$

Paso 2) Paso de inducción: Sabiendo $P(nc) = 0$, substituimos $x = (n+1)\,c$ para obtener: $(n+1)c.P(nc) = ((n+1)c - 2014)P((n+1)c) \leftrightarrow ((n+1)c - 2014)P((n+1)c) = 0$

Supongamos que no existe k positivo tal que kc=2014, en particular $(n+1)c \neq 2014$, por que $P((n+1)c) = 0$. Si $c \neq 0$, entonces P tiene infinitos ceros, que es sólo nominal si $P(x) = 0$ para todo x, lo que no está permitido (ya que $P(2014) = 1$). Si $c = 0$, tenemos que: $xP(x) = (x-2014)P(x) \leftrightarrow xP(x) = xP(x) - 2014P(x)$
$0 = -2014P(x) \to P(x) = 0$ Para todo x.

Entonces para k positivo, $kc = 2014$, en este podemos hacer la misma inducción de antes, hallando ceros cuando substituimos $x = kc$. Luego P tiene los ceros: $0, c, 2c, \dots . (k-1)c$ Ahora, si P tiene m ceros, entonces:
$P(x) = x(x-c)\dots((c-1)c)P'(x)$ en lo que P' es otro polinomio.
Se tiene que $P(x-c) = (x-c)(x-2c)\dots(x-kc)P'(x-c)$.

Substituyendo:$x[(x-c)\dots(x-kc)]P'(x-c) = (x-2014)[x(x-c)\dots(x-(k-1)c)P'(x)]$
Ahora para todo $x \neq 0, c, \dots, kc$ podemos contar estos factores obteniendo:$(x-kc)P'(x-c) = (x-2014)P'(x)$
Como dijimos que $kc = 2014$, $P'(c-x) = P'(x)$.

Ahora, si $P'(x)$ no fuera constante, esto no es verdadero, ya que va a ser una X tal que, para todos los x,y > x tenemos $P'(x) > P'(y) \leftrightarrow x > y$. (de lo contrario si P' tiene coeficiente líder negativo). En cualquiera de los dos casos para $x > x + c$, $P'(x) \neq P'(x-c)$. Luego $P'(x)$ es constante, por tanto P(x) es de la forma:
$P(x) = a^x(x-c)\dots(x-(k-1)c)$.

Sustituyendo esta función: $xP(x-c) = ax(x-c)\dots(x-kc)$

y además tenemos que: $(x-kc) = [ax(x-c)\dots((x-(k-1)c) = (x-2014)P(x)$.

Falta ver si $P(2014) = 1$.

Ahora: $P(2014) = 2014a(2014-c)\dots(2014-(k-1)c)$

$akc(k-1)c\dots c = ak!\,c^k$, luego para cada k, $\frac{1}{k!c^k} = \frac{1}{k!\left(\frac{2014}{k}\right)^k} = \frac{k^k}{k!2014^k}$. esto funciona para todos los k, luego las soluciones son los polinomios de la forma: $P(x) = \frac{K^k}{k!2014^k}\prod_{i=0}^{k-1}\left(x - i\frac{2014}{k}\right)$

Con k enteros positivos divisores de 2014.

Problema 4

Se tienen N monedas, de las cuales N − 1 son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente de las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Cada vez que se pueda deducir que una o varias monedas son auténticas, entonces todas estas monedas se separan inmediatamente y no se pueden usar en las siguientes pesadas. Determine todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee)

Solución:

Caso 1: N es par y diferente de 2. Para $N = 2$ es trivial ya que pesar una o dos monedas no da ninguna información (una moneda es más pesada que la otra), y pesar una contra la otra diría que una es más pesada, no permitiendo saber cuál es la falsa. N es de la forma $N = 4m$, entero positivo, dividimos las monedas en grupos n_1, n_2, n_3, n_4 y pesamos de la siguiente forma:

$$\boxed{n_1, n_2} \qquad \boxed{n_3, n_4}$$

Como todas las monedas, incluyendo las falsas, y en ambos lados el mismo número de monedas en los dos grupos, digamos que $(n_1, n_2) > (n_3, n_4)$.

Ahora pesamos n_1 contra n_2. Si $n_1 > n_2$, entonces inmediatamente n_3 y n_4 quedan eliminados. Nótese que una moneda, en medición inicial, estará en el grupo de las más pesadas, luego es más pesada de lo normal. Pero permite concluir que la moneda más pesada es n_1, encontramos la falsa, es ahora trivial, basta comprar pares de monedas, eliminando monedas si tuvieran el mismo peso, y cuando tenemos a>b, a es la falsa. Si $n_1 < n_2$, la cara es análoga y $n_1 = n_2$, entonces podemos eliminar n_1 y n_2.

Ahora, la falsa estará en el grupo más liviano (n_3, n_4), luego es más liviana de los normal, basta comprar las monedas en (n_3, n_4)para descubrir la falsa.

Si N es de la forma $N = 4n + 2$, dividimos las monedas en grupos $n_1, n_2, n_3, n_4, x, y, z$ en que n_1, n_2, n_3 tienen n monedas individuales.

Pesamos de esta forma:

$$\boxed{n_1, n_2, x} \qquad \boxed{n_3, n_4, y, z}$$

Digamos que $n_1, n_2, x > n_3, n'_4, y, z$ (caso contrario podemos dividir n_2 en 2 e incorporar, para que sea análogo).

Ahora pesamos:

$$\boxed{n_1, n_2} \qquad \boxed{n_3, n'_4, x}$$

Si $n_1, n_2 < n_3, n'_4, x$ entonces y y z son normales. Así mismo la falsa estuviera en n_1, n_2, n_3 o n'_4, la desigualdad se mantiene, ya que eliminamos dos normales de un lado y formamos otra normal del otro lado para eso. Luego x es la falsa, y vemos inmediatamente que x es más pesada que las otras.
Ambas estarían del lado más liviano, luego la falsa es más liviana de lo normal. Comparando las dos, la falsa es la más liviana. Finalmente, si $n_1, n_2 > n_3, n'_4, x$ entonces x, y, z son normales y son eliminados. Ahora pesamos n_1

y n_2, si $n_1>n_2$, entonces la falsa entonces la falsa es n_1 o n_2, estando del lado más pesado en la primera medición, luego la falsa es más pesada, y basta con comparar las monedas, en si dos pares, para descubrir la que es más pesada que las otras.

Si $n_1 = n_2$, la falsa está en n_3, n'_4 y por tanto es más liviana que las restantes. Basta comparar las monedas en n_3, n'_4, dos pares y descubrir la más liviana.

Caso 2: Para N impar

Por inducción.

Paso 1: Para $N = 1$, es imposible saber si es más liviana o pesada de lo normal, por ende no se puede saber si es falsa.
Para el paso de inducción: suponemos que para toda n impar $< N$ es imposible. Podemos construir la falsa con peso próximo a las verdaderas de modo que cualquiera que sea "injusta" (o sea, n monedas contra m, $m \neq n$) del lado con más monedas será el más pesado. Luego cualquier medición informativa daría un número par de monedas, n de m lados. Aun mas como N es impar, tal medición puede dejar la falsa fuera, puede acontecer que los pesos sean iguales, porque todas esas monedas son retiradas. Luego regresamos al problema de descubrir la falsa y es más pesada que las otras con un N impar menor. Por hipótesis de inducción es imposible garantizar que se puede, luego es imposible para todo N impar.

Problema 5

Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de sus alturas. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y, respectivamente. Si XY intersectan a BH en P y a CH en Q, demuestre que H, P, D y Q están en una misma circunferencia.

Solución:

Por tanto $[AXY]\sim [ABC]$, luego $\overline{XY}//\overline{BC}$ (estos lemas son usados de forma igual para garantizar la unicidad de otras homotitias.
Para terminar el problema, vamos a ver que una homotitia de otro H que envía PQ en BC (que existe ya que H, P, B y H, Q, C son colineales y $\overline{PQ}//\overline{BC}$, se puede enviar D al punto A' que es simétrico de A en relación a D)
El punto A' que es simétrico de A en relación a D, como AD perpendicular a BC es simétrico de A en relación a BC. Luego <BA'C=<BAC, que implicaría que <PDQ= <BAC, y como:
$< PHQ = < BHC = \pi - < HCB - < HDC = \pi - \left(\pi - \frac{\pi}{2} - < ABC\right) - \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - \pi - \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + < ABC + < ACB = \pi - < BAC$, tenemos que $< PDQ + < PHQ = \pi$, luego P, D, Q, H son cíclicos por tanto, se demuestra que una homotitia envía D en A' resolviendo el problema.
Sea T la intercepción de $\overline{HD}$ y $\overline{PQ}$. Entonces la razón que envía P en B y Q en C es igual a: $\frac{BH}{PH} = \frac{DH}{TH} = \frac{CH}{QH}$
Y la razón $\frac{HA}{HD}$ es: $\frac{HD+DA'}{HD} = \frac{HD+DA}{HD}$ Luego lo que se quiere demostrar es:

$$\frac{HD + DA}{HD} = \frac{DH}{TH} \leftrightarrow \frac{(DT + TH) + (DT + TH + HA)}{DT + TH} = \frac{DT + TH}{TH} \leftrightarrow \leftrightarrow TH(2DT + 2TH + HA)$$
$$= (DT + TH)^2 \leftrightarrow TH(HA + TH) = DT^2 \leftrightarrow TH.TA = DT^2$$

Para probar esto vamos a usar algunas homotitias, si consideramos las homotitias $X \xrightarrow{D} M \xrightarrow{D} P$, ($R \xrightarrow{S} U$ reprensta una homotitia que envía R en U, de centro S).

Ellas no son iguales, ya que transformamos puntos de la misma forma: las mismas homotitias hacen $Y \xrightarrow{A} C \xrightarrow{H} Q$ y $Y \xrightarrow{D} N \xrightarrow{H} Q$ (Luego los comparamos, enviamos ambos, X en P y Y en Q siento por tanto iguales). Luego las demás comparaciones de homotitias son del mismo lado. Es conocido que si las demás homotitias tienen razón a y b, respectivamente entonces la comparación tiene razón $|ab|$. Luego como:

- $X \xrightarrow{A} B$ entonces la razón es: $\frac{BA}{Ax}$
- $B \xrightarrow{H} P$entonces la razón es: $\frac{HP}{BH}$
- $X \xrightarrow{D} M$entonces la razón es: $\frac{MD}{DX}$
- $M \xrightarrow{H} P$entonces la razón es: $\frac{PH}{HM}$

Luego: $\frac{BA}{AX} * \frac{HP}{BH} = \frac{MD}{DX} * \frac{PH}{HM}$, $\frac{BA}{AX} * \frac{1}{BH} = \frac{MD}{DX} * \frac{1}{HM}$ Y $\frac{BA}{AX.BH} = \frac{MD}{DX.HM}$

Nótese que $BH = 2HM$, luego: $\frac{BA}{AX} = 2\frac{MD}{DX}$

Sea R la intersección de MN en MD vemos que $\frac{BA}{AX} = 2\frac{AD}{AT}$ y $\frac{MD}{DX} = 2\frac{DR}{DT}$

(Esto es obvio porque $\frac{BA}{AX}$ es la razón de homotitia por D, que envía X, T, Y en M, R, N Estas homotitias existen por el paralelismo de $\overline{XY}, \overline{MN}, \overline{BC}$)

Así mismo, $DR = HD - HR = HD - \frac{HD}{2} = \frac{HD}{2}$, (de nuevo se divide la homotitia por H que envía M, R, N en B, D, C esta vez la razón es 2). Luego substituyendo se tiene:

$\frac{AD}{AT} = 2\left(\frac{\frac{HD}{2}}{DT}\right) = \frac{HD}{DT} \leftrightarrow DT.AD = HD.AT \leftrightarrow DT(DT + HT + HA) = (HT + TD)(HT + TA)$ Luego desarrollando la última parte:

$$DT(DT + HT + HA) = (HT + TD)(HT + TA)$$
$$DT^2 + DT.HT + DT.HA = HT^2 + HT.TA + TD.HT + TD.TA$$
$$DT^2 = HT^2 + HT.HA$$
$$DT^2 = HT(HT + HA)$$
$$DT^2 = HT.TA$$

Esto es exactamente lo que queríamos demostrar, y esto significa que D realmente es enviado por A', y debido a las propiedades de homotitia ($[ADQ] \sim [BA'C]$ ya que $P \to B, D \to A^{\wedge\prime}, Q \to C$) tenemos que $< PDQ =< BA'C =< BAC$ permitiendo concluir que $[HPDQ]$ es cíclico.

BRASIL: 3
ALESSANDRO DE OLIVEIRA PACANOWSKI

Problema 1

Para cada entero positivo n, se define s(n) como la suma de los dígitos de n. Determine el menor entero positivo k tal que: $s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k)$

Solución:
Vamos a probar que k tiene por lo menos 4 dígitos.

Si $k < 1000$, presupone $k = \overline{a_2a_1a_0}, s(k) = s(1001k), s(k) = s(\overline{a_2a_1a_0}) = a_2 + a_1 + a_0$.
$1001k = 1000k + k = \overline{a_2a_1a_0000} + \overline{a_2a_1a_0} = \overline{a_2a_1a_0a_2a_1a_0}$ lo que implicaría
a_2+a_1+ a_0 = 2(a_2+a_1+ a_0) ⇔(a_2 a_1 a_0)‾= 000 ABSURDO,⇒ $k > 1000$.
Vamos a probar que $k \geq 9999$. Suponga que k tiene 4 dígitos y está entre 1000 y 9998 $\Rightarrow k = \overline{a_3a_2a_1a_0}$.

$1001k = 1000k + k = \overline{a_3a_2a_1a_0000} + \overline{a_3a_2a_1a_0}$. $Si\ a_3 + a_0 \leq \Rightarrow a_3 + a_0$ es un dígito y tendríamos:
$\overline{a_3a_2a_1a_0000} + \overline{a_3a_2a_1a_0}. = \overline{a_3a_2a_1(a_3 + a_0)a_2a_1a_0}$.

Pero tendríamos $s(\overline{a_3a_2a_1a_0}) = s(\overline{a_3a_2a_1(a_3 + a_0)a_2a_1a_0})$ y como $a_3 \geq 1$, tendríamos $a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = ?$ $+ (a_3 + a_0) + a_2 + a_1$ donde $a_3 > 0$, ABSURDO!

Luego $a_3 + a_0 \geq 10$. (Pero $a_0, a_3 \leq 9 \Rightarrow a_3 + a_0 \leq 18$.) Ahora suponga, $a_3 \neq 9 \Rightarrow$ 1001k tiene 7 dígitos, siendo la primera igual a a_3 o $a_3 + 1$, como 1001k tiene 8 dígitos, k >9000 (1001·8999 < 10000000). Luego si k < 9000 ⇒ 1001k comienza con el dígito a_3 o (a_3+1) y acaba en $a_2a_1a_0 \Rightarrow$ 1001k = $\overline{a_3xyza_2a_1a_0}$ o $\overline{(a_3 + 1)xyza_2a_1a_0}$.

Si 1001k = $\overline{(a_3 + 1)xyza_2a_1a_0}$ ⇒s(1001k) > $a_2 + a_1 + a_3 + a_0$ = s(k), ABSURDO, luego 1001k = $\overline{a_3xyza_2a_1a_0}$ ⇒ x + y + z =0 ⇒ 1001k = $\overline{a_3000a_2a_1a_0}$. ⇒ $10^6 \cdot a_3 + 10^2 \cdot a_2 + 10^1 \cdot a_1 + a_0$ = 1001k = $1001(10^3 \cdot a_3 + 10^2 \cdot a_2 + 10^1 \cdot a_1 + a_0)$, absurdo porque $10^3 \cdot a_3 < 1001 \cdot 10^3 \cdot a_3$; $10^2 \cdot a_2 < 1001 \cdot 10^2 \cdot a_2$;$10^1 \cdot a_1 < 1001 \cdot 10^1 \cdot a_1$ y $a_0 < 1001 \cdot a_0$. Luego a_3 = g. si k < 9990,
Entonces 1001k tiene 7 dígitos porque 1001· 9990<10000000 ⇒ 1001k = $\overline{9xyza_2a_1a_0}$. Pero análogo al anterior, $\overline{xyz}$ = 000 y 1001k = $\overline{9000a_2a_1a_0}$. Y nuevamente tendríamos absurdo.

(Si k = $\overline{9a_2a_1}$, 1001k > $\overline{9000a_2a_1a_0}$) ⇒ k ≥ 9990. Basta probar k = 9990 y k = 9999, porque 9 | k (s(9k) ≡ 0(mod 9) ⇒ s(k) ≡ 0 (mod 9)). Si k = 9990, 1001k = 9999990, s(9990) ≠ s(9999990), ABSURDO!
Pero k= 9999funciona!

Basta probar que s(9999· k) = 36 ∀ k ≤ 2014.

i. Si 1 ≤ k ≤ 9 ⇒ k = $\bar{x}$

$9999 \cdot k = \overline{x0000} - \bar{x} = \overline{(x-1)999(10-x)} \Rightarrow s(9999k) = (x-1)+9+9+9+(10-x)$

ii. Si $10 \leq k \leq 99 \Rightarrow k = \overline{ab}$. Podemos suponer $b \neq 0$ porque $s(10t) = s(t)$, y si $b = 0, s(9999 \cdot \overline{ab}) = s(9999 \cdot \overline{a0}) = s(9999) \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow a \geq 1 \, y \, b \geq 1 \, y \, 1 \leq a \leq 9$

$9999k = \overline{ab0000} - \overline{ab} = \dfrac{\begin{array}{r} ab0000 \\ - \quad ab \end{array}}{(a)(b-1)99(9-a)(10-b)} = \overline{(a)(b-1)99(9-a)(10-b)} \Rightarrow s(9999k) =$

$a + 9 + 9 + (9 - a) + (10 - b) = 36 = s(9999) \cdot \dfrac{\begin{array}{r} ab0000 \\ - \quad ab \end{array}}{(a)(b-1)99(9-a)(10-b)}$

iii. Si $100 \leq k \leq 999 \Rightarrow k = \overline{abc}$. Nuevamente, podemos suponer $c \geq 1$.

$\Rightarrow 9999k = \overline{abc0000} - \overline{abc} = \overline{ab(c-1)9(9-a)(9-b)(10-c)} = \dfrac{\begin{array}{r} abc0000 \\ - \quad abc \end{array}}{(ab)(c-1)9(9-a)(9-b)(10-c)}$

$\Rightarrow s(9999k) = a + b + (c-1)9 + (9-a) + (9-b) + (10-c) = 36 = s(9999)$

iv. Si $1000 \leq k \leq 2014 \Rightarrow k = \overline{abcd}$. Y podemos suponer $d \geq 1$.

$\Rightarrow 9999k = \overline{abcd0000} - \overline{abcd} = \overline{abc(d-1)(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)} =$

$\dfrac{\begin{array}{r} abcd0000 \\ - \quad abcd \end{array}}{abc(d-1)(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)}$

$\Rightarrow s(9999k) = a + b + c + (d-1) + (9-a) + (9-b) + (9-c) + (10-d) = 36 \Rightarrow s(9999) =$

$s(2 \cdot 9999) = \ldots = s(2014 \cdot 9999)$.

Problema 2

Halle todos los polinomios P(x) con coeficientes reales tales que P(2014) = 1 y, para algún entero c, se cumple que: $xP(x-c) = (x-2014)P(x)$:

Solución:

Caso 1: Si c $\neq \{1,2,19,38,53,106,1007,2014\}$:

$x \to 2014: 2014 \cdot P(\cancel{2014-c}) = 0 \Rightarrow P(2014-c) = 0$

$x \to 2014-c: (\cancel{2014-c}) \cdot P(2014-2c) = (-c) \cdot P(2014-c) = 0 \Rightarrow P(2014-2c) = 0$

$x \to 2014-2c: (\cancel{2014-2c}) \cdot P(2014-3c) = (-2c) \cdot P(2014-2c) = 0 \Rightarrow P(2014-3c) = 0$

$\vdots$

Inducción: Suponga $P(2014-ic) = 0$

$x \to 2014-ic: (\cancel{2014-ic}) \cdot P(2014-(i+1)c) = -ic \cdot P(2014-ic) = 0 \Rightarrow P(2014-(i+1)c) = 0$

⋮

Como c no es divisor positive de 2014 $\Rightarrow 2014 - ic \neq 0$ para un entero positivo i. Además $c \neq 0$, si $c = 0$, tendríamos $xP(n) = (x - 2014)\,P(n)$ y si $P(n)$ para algún n, tendríamos $n = x - 2014 \Rightarrow si\ c = 0, P(n) = 0$ para cualquier $n \Rightarrow P(n) \equiv 0$ es solución.

(Ahora, suponiendo $c \neq 0, 2014 - c, 2014 - 2c, 2014 - 3c, \ldots$ son infinitas raíces de un polinomio $\Rightarrow P(n) \equiv 0$ (P sólo tiene infinitas raíces) $\Rightarrow P(n) \equiv 0$ es solución para cualquier c. (Prueba: $x \cdot P(n - c) = x \cdot 0 = 0 = (n - 2014) \cdot 0 = (n - 2014) \cdot P(n))$).

Caso 2: c es un divisor positivo de 2014 $\Rightarrow \frac{2014}{m}$, con m $\in \{1,2,19,38,53,106,1007,2014\}$,

a su vez c= $\frac{2014}{m} \in \mathbb{Z}\ P(mc) = 1$

$x \to (m + 1) \cdot c \Rightarrow n \cdot P(mc) = \left(\frac{(m+1)2014}{m} - 2014\right) \cdot P((m + 1)c) \Rightarrow$

$n \cdot 1 = c \cdot P((m + 1)c) \Rightarrow P((m + 1)c) = \frac{n}{c} = (m + 1) = \binom{m + 1}{m}$

$= \left(\frac{(m+2)2014}{m} - 2014\right) \cdot P((m+2)c) \Rightarrow (m+2) \cdot c \cdot \cancel{(m+1)} = 2c \cdot P(\cancel{(m}+2)c) \Rightarrow \cdot P((m+2)c) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$

⋮

Inducción: Suponga $P(m + a) - c) = \binom{m+a}{m}$

$x \to (m + (a + 1)) \cdot c \Rightarrow (m + (a + 1)) \cdot c \cdot P((m + a) \cdot c) = \left(\frac{(m+(a+1))2014}{m} - 2014\right) \cdot P\big((m + a + 1) \cdot c\big) \Rightarrow (m + a + 1) \cdot c \cdot \binom{m+a}{m} = (a + 1) \cdot c \cdot P\big((m + a + 1) \cdot c\big) \Rightarrow P\big((m + a + 1) \cdot c\big) = \frac{m+a+1}{a+1}\binom{m+a}{m} = \frac{(m+a+1)(m+a)!}{m!(a+1)!} = \binom{m+a+1}{m}$; *como* $P((m + y) \cdot c) = \binom{m+y}{m}$ *para infinitos* n, $P\big((m + y) \cdot c\big) \equiv \binom{m+y}{m}$ *para todo* n, $\Rightarrow \binom{\frac{(m+y)2014}{m}}{m} = \binom{m+y}{m}\ \forall\, y.$

Tomar $y = \frac{m \cdot z}{2014} - m \Rightarrow P(z) = \binom{\frac{mz}{2014}}{m} = \frac{\left(\frac{mz}{2014}\right)\left(\frac{mz}{2014}-1\right)\ldots\left(\frac{mz}{2014}-m+1\right)}{m!}$ (Este factorial está bien definido porque m $\in \mathbb{Z}$, y ahora tiene un problema considera $\binom{d}{b}$con b $\in \mathbb{Z}$ y d $\notin \mathbb{Z}$ sólo se ajusta $\binom{d}{b} = \frac{d(d-1)\ldots(d-b+1)}{b(b-1)\ldots(1)}$, que está bien definido para b $\in \mathbb{Z}$ y b $\geq$ 1 que es el caso, porque m es divisor positivo de 2014.

Basta probar ahora:

$n \cdot P(n - \frac{2014}{m}) = (n - 2014) \cdot P(n) \Leftrightarrow n\binom{\frac{\left(n-\frac{2014}{m}\right)m}{2014}}{m} = (n - 2014)\binom{\frac{nm}{2014}}{m} \Leftrightarrow \binom{\frac{mn}{2014}-1}{m} = (n - 2014)\binom{\frac{nm}{2014}}{m} \Leftrightarrow$

$\frac{\left(\frac{mn}{2014}-1\right)\left(\frac{mn}{2014}-2\right)\ldots\left(\cancel{\frac{mn}{2014}-m}\right)n}{m!} = \frac{\cancel{\left(\frac{mn}{2014}\right)}\ldots\left(\cancel{\frac{mn}{2014}}-m+1\right)(n-2014)}{m!} \Leftrightarrow \cancel{\left(\frac{mn}{2014} - m\right)}n = \left(\frac{mn}{2014}\right)\cancel{(n - 2014)} \Leftrightarrow$

$mn2 - 2014mn = n2m - 2014nm$, todas las soluciones positivas son $P(n) \equiv 0$, si c $\in$ $\{1,2,19,38,53,106,1007,2014\}$

$P(n) = \frac{\left(\frac{n}{c}\right)\left(\frac{n}{c}-1\right)\ldots\left(\frac{n}{c}-\frac{2014}{c}+1\right)}{\left(\frac{2014}{c}\right)!}$; Observe que $\frac{\left(\frac{2014}{c}\right)\left(\frac{2014}{c}-1\right)\ldots(1)}{\left(\frac{2014}{c}\right)!} = 1.$

Problema 4

Se tienen N monedas, de las cuales N − 1 son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente de las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Cada vez que se pueda deducir que una o varias monedas son auténticas, entonces todas estas monedas se separan inmediatamente y no se pueden usar en las siguientes pesadas. Determine todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee.)

Solución: Si $N \geq 4$ y N es par, es posible.

Inducción: N = 4. Tome 4 monedas ABCD. Pesar las monedas AB y CD en una báscula, uno de los lados sube y el otro baja, pero no sabemos cuál moneda es la falsa. Suponga que AB baja y CD sube, ahora compare A y B. Dos casos:

a) $A = B \Rightarrow A$ y B son verdaderas $\Rightarrow$ C o D es falsa y la falsa es más liviana. Ahora compare C y D, como una es falsa, no pesan lo mismo, y la que subió más es la falsa.

b) $A \neq B \Rightarrow A$ o B es falsa, pero AB bajó y CD subió $\Rightarrow$ la falsa es más pesada. Al comparar A y B, y probar cual es la más pesada se encuentra la moneda falsa.

Si $N = 4$ descubrimos la falsa y si es más liviana o más pesada.
Ahora si $N = 6$: A, B, C, D, E, F

Compare de 3×3 ABC y DEF, donde ABC baja y DEF sube.

Ahora, comparemos A y B. 2 casos:
a) $A = B \Rightarrow A$ y B son verdaderas y nada dice sobre C, D, E o F (C puede ser falsa y más pesada o D, E o F falsa y más leve)$_1$. Después de descartar A y B, sobran C, D, E y F y hacemos igual que antes: Comparar CD y EF, 2 casos:

1. Si CD sube y EF baja. Si c fuese la falsa (y más pesada) a causa de $_1$, la balanza bajaría en CD, si E o F fuesen falsas (y más livianas), la balanza subiría en EF ⇒ D es falsa y más leve.
2. Si CD baja y EF sube. Si d fuese la falsa y más leve, CD subiría ⇒ D es verdadera. (Se descarta D, pero C,E y F pueden ser falsas)

Comparando E y F se tienen 3 casos:

i) E = F ⇒ C es falsa y más pesada.
ii) E más pesada que F ⇒ F es falsa porque es la más leve.
iii) F más pesada que E ⇒ E es falsa porque es más liviana.

b) A ≠ B Suponga que A es más pesada que $B \Rightarrow A$ o B es falsa $\Rightarrow C, D, E$ y F son verdaderas. Pero ABC es más pesado que DEF por lo que la falsa es más pesada ⇒ Por ser A más pesada, es falsa.

Luego, siempre es posible resolver N = 6. Ahora, hacemos inducción:

$N = 2k + 2$ (Suponga que $N = 4, 6, \ldots, 2k$ y $a_1, a_2, \ldots, a_{2k+2}$ las $2k + 2$ monedas) Comparar $a_1a_2a_3a_4$:

a) $a_1a_2 = a_3a_4 \Rightarrow$ son verdaderas, y sólo usamos inducción en $a_6, a_5, \ldots, a_{2k+2}$ (son ≥ 4 monedas y nada sabemos sobre ellas) ⇒ Es posible resolverlo.

b) a_1a_2 pesa menos que a_3a_4. Esta es la misma situación que al inicio, compare a_1a_2, si difieren la más pesada es la falsa, si fuesen iguales compare a_3a_4 y la más leve es la falsa.
$\Rightarrow$ Siempre resolveremos para $N = 2k + 2 \Rightarrow N$ es par.

(Si N = 2 no es posible, porque al compararlas no podremos saber cuál es la falsa aunque una pese más o menos que la otra) $\Rightarrow N \geq 4$

Ahora, vamos a probar que N impar es imposible.
Si N = 1, no tiene ningún sentido.
Si N = 3, sólo podemos comparar dos monedas. Siendo iguales las descartamos y no sabemos si la tercera moneda (falsa) es más pesada o más liviana.

Tome ahora $N = 2k + 1$ monedas.

Comparar cantidades diferentes de monedas no tiene ningún sentido si la falsa tiene un peso muy cercano a las verdaderas. Tomar $2k + 1$ y comparar i con i ($a_1a_2a_i ... = b_1b_2b_i$) si son iguales las descartamos y nos sobran $2(k - i) + 1 \geq 1$ monedas, que es un número impar y nada podemos decir (Por inducción) $\Rightarrow$ solamente N par mayor que 3.

Problema 5

Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de sus alturas. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y, respectivamente. Si XY intersectan a BH en P y a CH en Q, demuestre que H, P, D y Q están en una misma circunferencia.

Solución:

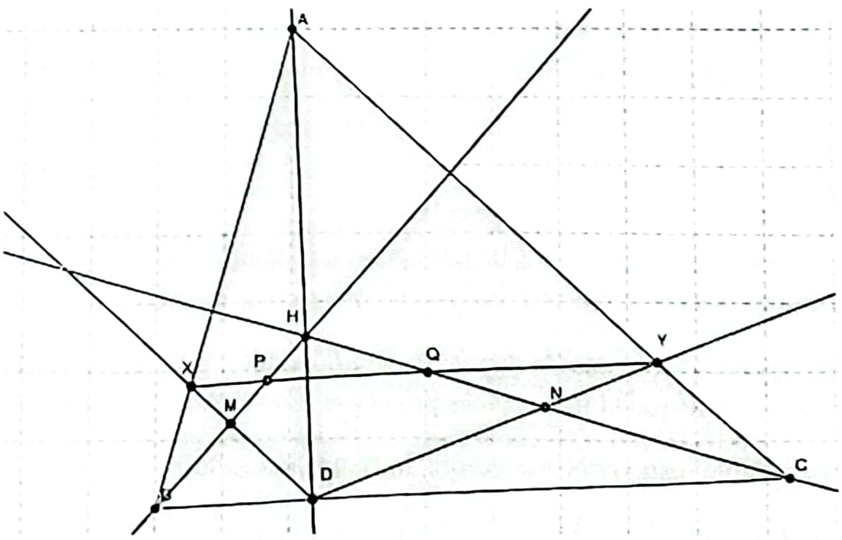


Figura 1

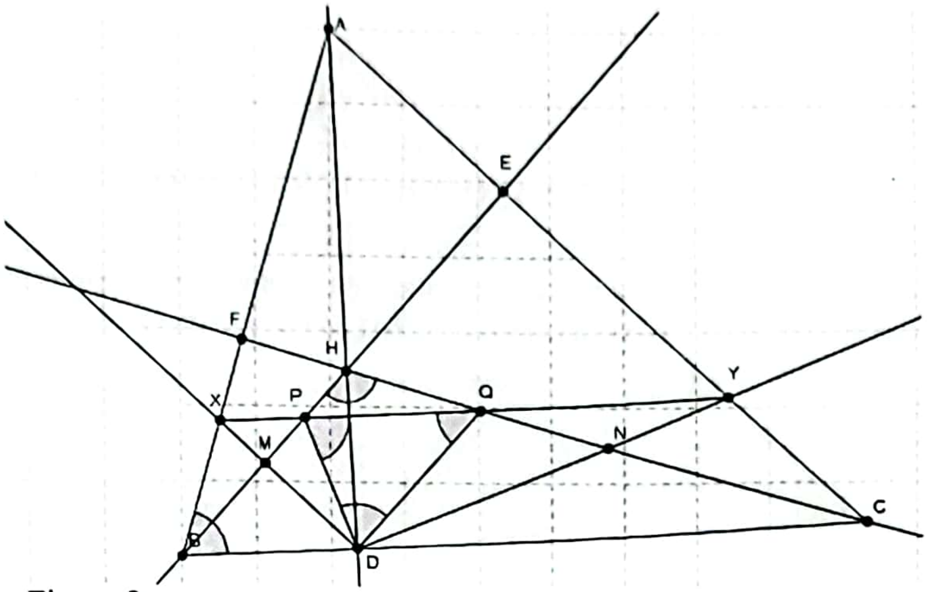


Figura 2

En las figuras ($< ABC =< B, < ACB =< C$ y $< BAC =< A$)

Haciendo Menelao en ΔAHC, con la ceviana $YND \Rightarrow \frac{HN}{NC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AD}{DH} = 1$

Como $\frac{HN}{HC} = 1 \implies \frac{AD}{DH} = \frac{YA}{CY}$ Análogamente para el otro lado, $\frac{AX}{XB} = \frac{AD}{DH}$

Por Tales $XY \parallel BC$.

Por otra parte, $MH = MB = MD$

(M es el centro del círculo de diámetro BH que pasa por D.

Entonces $MB = MD \implies < MBD = < MDB$, como $XP \parallel BD \implies < MPX = < MXP \Rightarrow MP = MX$.

Por congruencia LAL ($PM = MX,\ MD = MB$ y $< PMD = < XMB$), $PD = BX \Rightarrow XPDB$ es un trapecio isósceles $\Rightarrow < DPQ = < PDB = < XBD = < B$.

Análogamente $< DQP = < C \Rightarrow < PDQ = < A$.

Sin embargo, $< PHQ = < FHE = 180 - < A$.

(F y E son las alturas de C y B) $\implies < PDQ + < PHQ = 180 \implies PDQH$ ciclico.

MEXICO I:
LUIS XAVIER RAMOS TORMO

Problema 1

Para cada entero positivo n, se define s(n) como la suma de los dígitos de n. Determine el menor entero positivo k tal que $s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k)$

Solución:

Es conocido que $s(k) \equiv k(mod\ 9)$

Asi, $k \equiv s(k) = s(2k) \equiv 2k\ (mod\ 9)$

$\Rightarrow k \equiv 2k \Rightarrow k \equiv 0\ (mod\ 9)$

$\Rightarrow 9|k\ y\ 9|s(k)$

También sabemos que $s(a+b) = s(a) + s(b) - 9$ (cantidad de acarreos al sumar $a + b$)

por ejemplo en $98 + 31$ hay un acarreo 98

$$\frac{31}{129} \Rightarrow s(98+31) = s(98) + s(31)$$

Y en $133 + 89$ hay los acarreos 133

$$\frac{89}{222} \Rightarrow s(133+89) = s(133) + s(89) - 9(2)$$

Ahora

$\forall n = 1,2,3,\ldots,2013$, tenemos que:

$s(nk) = s(nk + k) = s(nk) + s(k) + s(k) - 9$ (Cantidad de acarreos en n)

$\Rightarrow 0 = s(k) - 9$ (Cantidad de acarreos en $nk + k$)

$\Rightarrow s(k)/9 =$ cantidad de acarreos al sumar $nk + k$

en particular, si $n = 1$, es claro que para que en $k + k$ hayan $s(k)/9$ acarreos $\Rightarrow$ k tiene al menos $s(k)/9$ **digitos**

(al sumar $t + t$ hay un máximo de tantos acarreos como cantidad de dígitos en t claramente)

Ahora probaremos que $k = 9999 = 104/-1$ funciona:

Sea $\overline{abcd}$una expresión decimal de un número $\geq\ 1\ y\ \leq 2014$ (es posible que $a = 0$)

Así $\overline{abcd} \cdot 9999 = \overline{abcd} \cdot (104/-1) = \overline{abcd0000} - \overline{abcd}$.

Ahora dividimos en casos, según el dígito más a la derecha distinto de 0:

Caso 1: si $d \neq 0$,

$$\overline{abcd0000} - \overline{abcd} = \overline{abcd\ (d-1)(9-a)(9-b)(9-c)}$$

Claramente s($\neq \overline{abcd\ (d-1)(9-a)(9-b)(9-c)}$) $= 36 = s(9999)$

Caso 2: si $d = 0$ y $c \neq 0$:

$\Rightarrow \overline{abcd0000} - \overline{abcd}$
$= \overline{ab(c-1)\,9(9-a)(9-b)(10-c)0}$ y $s(\overline{ab(c-1)\,9(9-a)(9-b)(10-c)0}) = 36 = s(9999)$

Caso 3: $si\ d = 0, c = 0, b \neq 0$
$\Rightarrow \overline{abcd0000} - \overline{abcd} = \overline{a(b-1)99(9-a)(9-b)(10-b)00}$ y
$s(\overline{a(b-1)99(9-a)(9-b)(10-b)00}) = 36 = s(9999)$

Caso 4: si $d = 0, c = 0, b = 0, a \neq 0$ (de los contrario $\overline{abcd} = 0$ pero es ≥ 1 y ≤ 2014)

$\Rightarrow \overline{abcd0000} - \overline{abcd} = \overline{(a-1)999(10-a)000}$ $y\ s\overline{(a-1)999(10-a)000} = 36 = s(9999)$
Así en cualquier caso $k = 9999$ funciona.

Ahora $9 \mid s(k) \Rightarrow s(k) = 9, 18, 27, 36$ o $s(k) > 36$ es claro que tiene de 4 dígitos $\Rightarrow$ es mayor a $9999l$ y como queremos la mínima k, n no nos interesa. Ahora, si $s(k) = 36 \Rightarrow k \geq 9999$ y como 9999 funciona, en este caso es el mínimo.

Como 9999 funciona, la mínima k tiene a lo más 4 dígitos. Fijémonos en $s(1001k)$:
si k tiene a lo más 3 dígitos, lo veremos como abc (tal vez a= 0) $\Rightarrow s(1001k) = s((103/+1)k) = s(103/k + k) = s(\overline{abc000} + \overline{abc}) = s(\overline{abc\,abc}) = 2(a+b+c) = 2(s(k)) \Rightarrow s(1001k) = 2s(k) = 2s(1001k) \Rightarrow$ $s(1001k) = 0$, pues, claramente no es posible si $k > 0$
$\Rightarrow$ tiene exactamente 4 dígitos, pues 9999 tiene 4 y buscamos una k menor

Caso 1: si $s(k) = 9 \Rightarrow$ en la suma $1000k + k$ debe haber un acarreo $\frac{s(k)}{9}$ acarreos como se dijo antes) $\Rightarrow$ en la suma $abcd000 + abcd$ hay un acarreo $\Rightarrow$ en abcd000, $abcd$ hay un acarreo.

Es claro que necesitamos que $d + a > 9$, pero $s(k) = a + b + c + d = 9 \Rightarrow a + b \leq 9 \Rightarrow s(k) = 9$ no nos sirve

Caso 2: si $s(k) = 18 \Rightarrow$ hay 2 acarreos en $abcd000 + abcd \Rightarrow a + d > 9$ para que haya un acarreo, y luego para que haya otro, necesitamos que $c + 1 > 9 \Rightarrow c > 8 \Rightarrow c > 9 \Rightarrow a + d + c > 18 \Rightarrow s(k) = 18$ no nos sirve

Caso3: $s(k) = 27 \Rightarrow$ hay 3 acarreos en la suma $abcd000 + abcd \Rightarrow$ necesitamos que $a + d > 9$ (para 1ro)
$c + 1 > 9$ (para 2do)
$b + 1 > 9$ (para 3ro) $\Rightarrow c \leq 9, b \leq 9 \Rightarrow a + b + c + d > 27 \Rightarrow s(k) = 27$

no produce ninguna k más pequeña que 9999, así en cualquier caso no hay una k más pequeña que 9999 que cumpla lo que queremos, y como ya vimos que $k = 9999$ si cumple, concluimos que 9999 es la menor k entera positiva tal que $s(k) = s(2k) = \ldots = s(2014k)$ lo cual era lo que buscábamos.

Problema 3

Sobre una circunferencia se marcan 2014 puntos. Sobre cada uno de los segmentos cuyos extremos son dos de los 2014 puntos, se escribe un número real no negativo. Se sabe que para cualquier polígono convexo cuyos vértices son algunos de los 2014 puntos, la suma de los números escritos en sus lados es menor o igual que 1. Determine el máximo valor posible de la suma de todos los números escritos.

Solución:

Definimos la longitud de una cuerda como la cantidad de puntos que hay del lado del círculo que tiene menos puntos más 1. O sea en la longitud de (1,4) es dos y la de (3,4) es uno. Es claro que teniendo 2014 en el círculo la cuerda de mayor longitud tiene 1007 (las diagonales mayores).

Ahora sea f (k) la suma de los números reales asociados a las aristas de longitud k.
Mostraremos que la suma máxima de todos los números se alcanza cuando a toda arista de longitud k le asigno.
Primero probaremos que si a, b son enteros positivos con $a + b = 1007 \rightarrow f(a) + f(b) \leq 1007$.
Para esto numeramos los vértices del 1 al 2014, hay que probar que: (Si (a, b) es la cuerda que del vértice a al b)

$(1,1 + a), (2,2 + a), \ldots, (2014, 2014 + a), (1,1 + b), (2,2 + b), \ldots, (2014, 2014 + b)$

(Los números en las parejas están en mod 2014)
Los números asignados a esas 4028 aristas suman a lo más 2007. Para esto, nos fijamos en los cuadriláteros convexos con vértices $k, k + a, k + a + b, k + 2a + 2b$ $(k + 2a + 2b \equiv k)$ para todo $k = 1,2, \ldots, 2014$. Estos usan las aristas, $(1, 1 + b), (2, 2 + a), \ldots, (2014, 2014 + a)$ ← todas las de longitudes a.
$(1 + a, 1 + a + b), (2 + a, 2 + a + b), \ldots, (2014 + a, 2014 + a + b)$ ← todas las de longitudes a.
$(1 + a + b, 1 + 2a + b), \ldots, (2014 + a + b, 2014 + 2a + b)$ ← todas las de longitudes a.
$(1 + 2a + b, 1 + 2a + 2b), \ldots, (2014 + 2a + b, 2014 + 2a + 2b)$ ← todas las de longitudes a como sus lados.
Como son 2014 cuadriláteros convexos, la suma de sus lados es a lo más 2014 (1 por cada cuadrilátero).

Pero al mismo tiempo suman $2f(a) + 2f(b), así, 2f(a) + 2f(b) \leq 2014$
$\rightarrow f(a) + f(b) \leq 1007$ *para todo* $a + b = 1007, a, b$ enteros positivos. Así, probamos lo que queríamos.
Ahora probaremos que $f(a) + f(b) + 2f(1007) \leq 2014$. Para esto, tomamos los triángulos con vértices $k, k + a, k + a + b \equiv k + 1007$ (todo módulo 2014) para cada $k = 1,2, \ldots, 2014$.

Al ser 2014 triángulos (polígonos conexos), la suma del número de los lados de cada uno es a lo más 1→ la suma de todos los lados que usan es a lo más 2014. Pero usan las 2014 ·3 aristas:
$(1, 1 + a), (2,2 + a), \ldots, (2014,2014 + a)$ ← Las 2014 aristas de longitud a.
$(1 + a, 1 + a + b), (2 + a, 2 + a + b), \ldots, (2014 + a, 2014 + a + b)$ ← Las 2014 aristas de longitud b.
y $(1, 1 + 1007), (2,2 + 1007), \ldots, (2014,2014 + 1007)$ ← 2 veces cada uno, las 1007 aristas de longitud 1007.
Nótese que $(k, k + 1007)$ es la misma cuerda que $(k + 1007, k + 1007 + 1007) = (k + 1007, k)$ pues es módulo 2014 y $(a, b) = (b, a)$.

Así, la suma de los perímetros de esos 2014 triángulos también es $f(a) + f(b) + 2f(1007) \rightarrow f(a) + f(b) + f(1007) \leq 2014$, para todo a, b enteros positivos con a + b=1007.

Aplicando las dos desigualdades que ya demostramos, tenemos que $2(f(1) + f(2) + \cdots + f(1007)) = (2f(1007) + f(1) + f(1006)) + (f(1) + f(1006) + 2(f(2) + f\,(1005)) + 2(f(3) + f(1004)) + \cdots +$

$2(f(503)+f(504) = (2\mathrm{f}(1007)+\mathrm{f}(1)+\mathrm{f}(1006)) + (2\sum_{i=2}^{503}\mathrm{f}(\mathrm{i})+\mathrm{f}(1007-\mathrm{i})) + (\mathrm{f}(1)+\mathrm{f}(1006)) \leq (2014)+(2\cdot 502\cdot 1007)+1007$

dado que: $2f(1007)+ f(1) + f(1006) \leq 20014$ $(pues\ 1+1006=1007)$ que $f(i) + f(1007-i) = 1007$ pues $i, 1007 \ -i\epsilon a$ los enteros positivos y suman 1007 y también:

$f(1)+f(1006) \ \leq \ 1007. \rightarrow 2\ (f(1)+\cdots+ \ f(1007)) \leq 1007(2+502\cdot 2+1) = 1007^2$

Así, los números en las aristas suman a lo más $\frac{1007^2}{2}$.

Ahora damos un arreglo que cumple y que sus cuerdas tienen reales no negativos que suman todos $\frac{1007^2}{2}$.

Para esto, a toda arista de longitud k le ponemos el número real $\frac{k}{2014}$. Claramente $\frac{k}{2014}$ es no negativo.

Ahora, es claro que $f(k) \ = 2014(\frac{k}{2014})\ para\ todo\ k = 1,2,\ldots,1006$

Pues hay 2014 aristas de longitud k para todo $k = 1,2,\ldots,1006 \ \rightarrow f\ (k) \ = k$ para todo $k = 1,2,\ldots,1006$. y f(1007)=$\frac{1007}{2}$, pues hay solo 1007 aristas tamaño 1007.

Así $f(1)+\cdots+f(1006)+f(1007) = 1+2+\cdots+1006+\frac{1007}{2}$.

Usando la fórmula de Gauss: $= \frac{1006(1007)}{2} + \frac{1007}{2} = \frac{1007}{2}(1006+1) = \frac{1007^2}{2}$

Así, este acomodo tiene la suma que queremos. Ahora para acabar mostraremos que todo polígono convexo con vértices en los 2014 puntos suman a lo más 1, los números asociados a sus lados. Para esto, es claro que una arista de longitud k tiene un número real asociado menor o igual a $\frac{x+1}{2014}$, donde x es el número de vértices entre los extremos de la cuerda (sin incluirlos). Esto es claro, pues por definición de longitud, longitud$(a,b) \ = mín(x,y) + 1 \rightarrow (a,b)$ tiene asociados al número $\frac{mín\,\{x,y\}+1}{2014} \leq \frac{x+1}{2014}$.

Así, dado el polígono convexo con vértice $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (en ese orden) tenemos que longitud de $(a_i, a_{i+1}) \leq \frac{x_{i+1}}{2014}$, donde x_i es la cantidad de vértices en el arco (a_i, a_{i+1}) que no contiene a a_{i+2}.

Así, la suma de los números asociados es a lo más $\frac{x_{1+1}}{2014}+\frac{x_{2+1}}{2014}+\cdots+\frac{x_{n+1}}{2014} = \frac{x_{1+\cdots+}x_{n+n}}{2014}$, pero $x_{1+\cdots+}x_n$ son todos los vértices menos los del polígono $\rightarrow \ x_1 + \ \ldots + x_n = 2014-n$. Así, los números en el perímetro suman a lo mas $\frac{(2014-n)+n}{2014} = 1 \rightarrow$ se cumple lo que queremos $\rightarrow$ este acomodo cumple con las condiciones del problema y tiene suma $\frac{1007^2}{2}$. Como ya vimos que la suma total no puede ser mayor, concluimos que $\frac{1007^2}{2}$ es el máximo y ya acabamos.

Problema 4

Se tienen N monedas, de las cuales N − 1 son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente de las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Cada vez que se pueda deducir que una o varias monedas son auténticas, entonces todas estas monedas se separan inmediatamente y no se pueden usar en las siguientes pesadas. Determine todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee.)

Solución: $N = 1$ si recordar que al momento de saber que son reales ya no se pueden usar.
$N = 2$ no
$N = 3$ no

Si al principio pesó 2, no se puede cumplir siempre (si pesan diferentes, las $N - 2$ restantes son buenas)
Si 2 | N, pesó la mitad y mitad, pero no obtengo información.
Trata a conjuntos de misma cantidad de monedas como monedas más grandes.
$N = 4$, c es mala y pesa más, ab ≤ cd , $c>d$ y si no ab
$N = 4$ funciona ⇒ $N = 4k/$ funciona ($k \geq 1$)
$N = 4^{\alpha} + 4^{\beta}$ funciona
$N = 4^{\alpha_1}+4^{\alpha_2} + \cdots + 4^{\alpha_k}$ Funciona

⇒ $\boxed{N = 4k \text{ funciona}}$

$\underline{xx}$ y aparte $N - 2x$
⇒ $N - 2$ se puede ⇒ por inducción $4 \mid N - 2x$ y $4 \mid N - 2x \Rightarrow 4 \mid N - 2x$ y ya
Se puede probar primero si $N = 4k$ con k un entero positivo ⇒ N cumple lo que queremos.
Aquí se explica cómo:

Aplicamos inducción sobre k:

Caso base:
Si $k = 1$ con 4 monedas si se puede sean a, b, c, d las 4 monedas. En el plato ponemos a a y b y en el otro b y c. Como la moneda falsa es una de estas, es claro que a y b no pesan lo mismo que c y d. Supongamos que a y b pesan más que c y d. A un cualquier moneda podría ser la falsa; a o b podría pesar o c o d podrían pesar menos.

Ahora pesamos a y b si pesan diferente, una de ellas debe ser falsa, auténticas y como a y b pesaron más que b y c ⇒ la falsa pesa más ⇒ de entre a y b, la falsa es la que pesa más ⇒ podemos saber cuál era la falsa y si pesaba más o menos.

Si a y b pesan lo mismo, ninguna de ellas puede ser falsa, pues si fuera, la otra sería auténtica y no pesarían lo mismo, Así, se retiran a y b y cualquiera entre c y d podría ser la falsa, pero como c y d pesan menos que a y b, es claro que la falsa pesa menos que las otras ⇒ sólo hace falta pesar c y d y la que pese menos será la falsa. Así, en cualquier caso pudimos lograr lo que queríamos con $k = 1$ ($N = 4$)

H.I. supongamos que para $k = 1,2, \ldots, r$ se cumple que $N = 4k$ funciona.
P.I. $si\ k = r + 1 \Rightarrow N = 4(r + 1) = 4r + 4$

Elegimos 4 monedas a, b, c, d y dejamos las $4r$ aparte. Ponemos a y b en un plato y c y d en el otro plato. Si pesan igual, a, b, c, d deben ser auténticas y la falsa es cualquiera de las $4r$ restantes $\Rightarrow$ estamos en la misma situación a si hubiéramos empezado con $4r$ monedas, y por H.I. podemos saber cuál es la falsa y si pesa más o menos.

Si pesan diferentes, la falsa debe ser una de ellas $\Rightarrow$ las $4r$ aparte son auténticas y procedemos como B.I.
Así $4(r+1)$ funciona y completamos la inducción $N \Rightarrow N = 4k$ funciona $\forall k \in Z+$, Ahora aplicando indicción sobre la cantidad de monedas, mostraremos que N funciona $\Leftrightarrow 4 \mid N$: B.I. $N = 1$: es imposible saber si la moneda falsa pesa más o menos $\Rightarrow N = 1$ no funciona.

$N = 2$ lo único que nos da información es poner una moneda en un platillo y la otra en el otro. Deben pesar diferente, pero si son a y b y a pesa más que b puede ser que a pesa más que una auténtica o b pese menos $\Rightarrow N = 2$ no sirve

$N = 3$ lo único que podemos hacer es tomar 2 monedas a y b y pesarlas. Si pesan igual, deben ser auténticas $\Rightarrow$ la tercera (c) es la falsa, pero como retiramos a y b, ya no sabemos si pesa más o menos. $N = 4$ ya vimos que si funciona

H.I. suponemos que para $N = 1,2,\dots,r$, se cumple que N cumple $\Leftrightarrow 4 \mid N$
P.I. probamos que $N = r+1$ sirve $\Leftrightarrow 4 \mid r+1$, ya mostramos que $r+1$ sirve,
solo nos falta mostrar que si $4 \mid r+1 \Rightarrow r+1$ no sirve: Suponemos que $4 \mid r+1$. En la primera pesada ponemos x monedas en un platillo y x en el otroy no las usamos. Como $4 \mid r+1 \Rightarrow 4 \mid r+1-2x$ o $4 \mid 2x$.

Si $4 \mid r+1-2x$ y resultara que las monedas que pesamos pesan igual $\Rightarrow$todas las 2x son auténticas $\Rightarrow$las retiramos y tenemos que $r+1-2x$ de las que cualquiera podría ser falsa pesando más o menos $\Rightarrow$ estamos igual que si hubiéramos empezado con sólo $r+1-2x$ monedas. Como $r \geq r+1-2x$ (pues $x \geq 1$) y $r+1-2x \geq 1$ (pues la moneda falsa es una de ellas), por H.I. M como $4 \mid r+1-2x \Rightarrow r+1-2x$ no funciona $\Rightarrow$ en este caso no podemos hallar la falsa y saber si pesa más o menos.

El otro caso es que $4 \mid 2x$. Si para esto y resulta que pasan distinto, un grupo de x y el otro que pesamos $\Rightarrow$ de esas $2x$ debe ser la falsa $\Rightarrow$ las otras $r+1-2x$ debe ser auténtica $\Rightarrow$ las retiramos. Si pudiéramos encontrar ahora la falsa $\Rightarrow N = 2x$ funcionaría, pues en la primera pesada ponemos x en un platillo y x en el otro (x monedas) y como una de esas es falsa, los platillos pesan distinto $\Rightarrow$ Estamos en la misma situación que antes (y si pudiéramos acabar, $N = 2x$ sería bueno).

Así, como $4 \mid 2x$ la única posibilidad es que $2x \geq r+1 \Leftrightarrow 0 \geq r+1-2x$ pero $0 \geq r+1-2x \Rightarrow r+1 = 2x$ $\Rightarrow$ tenemos $2x$ monedas y pusimos x en un platillo y x en el otro. Cómo $4 \mid 2x \Rightarrow x$ es impar. Cualquiera de las $2x$ podría ser falsa $\Rightarrow$ no retiramos ninguna.

Ahora, pesamos y monedas en un platillo y y en el otro las otras $2x-2y$ las dejamos aparte,
como $4 \mid 2x \Rightarrow 4 \mid 2y$ o $4 \mid 2x-2y$ monedas.

Si $4 \mid 2y$ y resulta que pesaron diferente $\Rightarrow$ una de las $2y$ es la falsa y retiramos las otras.
Con esta misma inducción podemos probar que N funciona $\Leftrightarrow 2 \mid$ N
Probaremos que si $2 \mid N$ y $N > 2 \Rightarrow N$ funciona.
Sean $a_1, a_2, \dots, a_n,\ b_1, b_2, \dots, b_n$ las monedas.
Aplicamos Inducción sobre n. Caso base: $n = 2$ (ya la podemos probar, es $N = 4$)

H.I. supongamos que $n = 2,3,\dots,r$ cumplen P.I. si $n = r+1$ pesamos $a_1,\dots,a_{r+1}$en un plato y $b_1,\dots,b_{r+1}$ en el otro plato. Pesan distinto pues una de ellas es falsa.

(Suponer que las $a's$ pesan más)
Ahora pesamos $a_1,\dots,a_{n-1}$ en un plato $b_1,\dots,b_{n-1}$en el otro plato. Si pesan igual $\Rightarrow$ b son auténticas $\Rightarrow$ $b_{n-1}o\ b_n$ son falsas y la falsa es la que pese menos (pues las $b's$ pesan menos). Si ahora $a_1,\dots,a_{n-1}$ pesan menos $\Rightarrow$ la falsa cambió de platillo $\Rightarrow a_n$ es falsa y ha de pesar más claramente.

Si ahora $a_1, a_2,\dots,a_{n-1}$ pesa más $\Rightarrow$ la mala está en el mismo platillo $\Rightarrow$ o la mala pesa más y es $a_1, a_2,\dots,a_{n-1}$ o pesa menos y es $b_1, b_2,\dots,b_{n-1}$

Ahora pesamos a_1 y a_2, si pesan lo mismo, se retiran y si no, la más pesada es la falsa. Luego pesamos a_3 y a_4 si a_1 , a_2 pesaron igual y así nos seguimos, si n es par, como $N = 2n \Rightarrow 4\,|\,$N y ya probamos este caso. Así, n es impar $\Rightarrow$las $a_i's$ se nos acaban $(a_1, a_2,\dots,a_{n-1})$ si las vamos pesando de 2 en 2 sin encontrar la falsa.

Ahora quedan $b_1, b_2,\dots,b_{n-1}$ hacemos lo mismo: si b_1, b_2 pesan igual las quitamos y si no, la que pese menos es la falsa luego pesamos $b_3 y\ b_4$ si no hallamos la falsa y así seguimos. Si al final sólo queda b_{n-2} ($n-2$ es impar) $\Rightarrow$ esta debe ser la falsa y debe pesar menos. Así en cualquier caso $N = 2(r+1)$ funciona $\Rightarrow$ completamos la inducción.
Ahora por inducción sobre N probaremos que N funciona $\Leftrightarrow$ $2\,|\,N\ y\ n > 2$

Caso base: $N = 1,2,3,4$ ya las probamos, H.I. suponer que para $N = 1,2,\dots,r$ se cumple P.I.
si $r+1$ es par $\Rightarrow$ funciona y terminamos.

Si $r+1$ es impar, en la primera pesada ponemos x monedas en un plato y x en el otro y dejamos $r+1-2x > 0$ aparte. Si pesaran igual $\Rightarrow$ deben ser auténticas las $2x$ $\Rightarrow$ las retiramos $\Rightarrow$ nos quedan $r+1-2x < r+1$ monedas que es impar y cualquiera podría ser falsa pesando más o menos $\Rightarrow$ si pudieras acabar, $r+1-2x <$ $r+1$ es impar $\Rightarrow$ por H.I. no sirve $\Rightarrow r+1$ no sirve y terminamos la inducción.
Así todas los N que cumplen son los pares a partir de 4 (4,6,8,10), lo cual era lo que buscábamos.

Problema 5

Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de sus alturas. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y, respectivamente. Si XY intersectan a BH en P y a CH en Q, demuestre que H, P, D y Q están en una misma circunferencia.

Solución:

Es posible que $\Delta DQC \sim \Delta HPD\ y\ \Delta BPD \sim \Delta DQH$, Es necesario que $\angle PDQ = \angle B$

Tal vez DQ biseca a AC , $B = (b,0)$, $D = (0,0)$, $C = (c,0)$, $H = (0,h)$

$$M = \frac{b}{2},\frac{a}{2},\ N = \frac{c}{2},\frac{a}{2},\ \overline{MD}: y = \frac{a}{b}x\ ,\ \overline{ND}: y = \frac{a}{c}x$$

$$(x-b)c = \frac{a^2}{b}x \quad \rightarrow \quad xc - bc = \frac{a^2}{b}x \quad \rightarrow$$

$-bc = x\left(\frac{a^2}{b} - c\right) \rightarrow \quad x = \left(\frac{bc}{c-\frac{a^2}{b}}\right) = \left(\frac{b^2c}{bc-a^2}\right) \rightarrow$

$x - b = \left(\frac{b^2c}{bc-a^2}\right) - b = a^2b$

$\left(\frac{y}{x-b}\right)\left(\frac{a}{+c}\right) = +1$

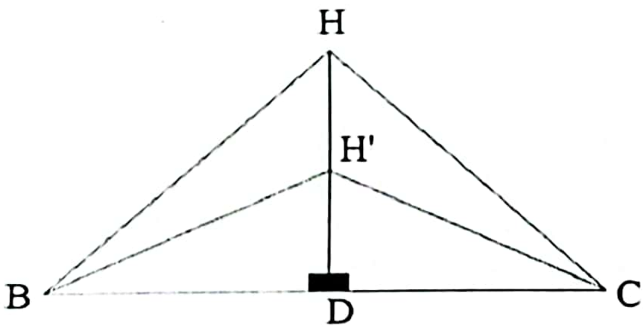
$\left(\frac{y}{x-b}\right) = \left(\frac{c}{a}\right), \; y = \frac{a}{b}x \qquad bc > a$ (para que H sea obtuso)

$x = \left(\frac{b^2}{bc-a^2}, \frac{abc}{bc-a^2}\right) \quad , \quad y = \left(\frac{c^2b}{bc-a^2}, \frac{abc}{bc-a^2}\right) \quad \rightarrow xy||BC$

Con geometría analítica, probaremos que $\rightarrow xy||BC$:

Sean HD y BC nuestro eje de coordenadas y, x respectivamente, Así $H = (0, a)$, $B = (b, 0), C = (c, 0)$ con $a < 0, c < 0$. Por la condición de que ABC es acutángulo como $HC \perp BA$ y $AC \perp BH$ es claro que $\angle A + \angle BH$ es $180°$ $\rightarrow$ A es $\angle$ $agudo$ $\leftrightarrow$ BHC es $\angle$ $obtuso$.

Como $\angle BHC$ es obtuso, sea $H' <$ es el punto sobre HD de forma que ∠BHC=90° y H' y H están del mismo lado de BC. Ahora, si $DH' < DH$, pasa esto:



Y es claro que como $\angle BH'C + \angle H'BC + \angle KH'C = 180° = \angle BHC + \angle HBC + \angle HCB \rightarrow \angle BH'C - \angle BHC = \angle HBC' + \angle HCH' \rightarrow \angle BH'C > \angle BHC \rightarrow \angle BH'C > 90°$!

Así, $DH' > DH$ (pues no se puede que $DH = DH' \rightarrow H = H' \rightarrow \angle BHC = 90°$), pero es conocido que en el triángulo rectángulo BH'C, las medidas de la altura es la medida métrica de las longitudes en las que esa altura corta el lado opuesto, es decir

$$\sqrt{BD \cdot DC} = (DH') \rightarrow BD \cdot DC = DH'^2 > DH^2$$

Así $bc > a^2$ (véanse las coordenadas de D, H, B, C)

Ahora como M es p.m. de BH, M=$\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$

Ahora, hallamos las coordenadas del punto X como sigue

1. $BX \perp CH \rightarrow$ sus pendientes multiplican -1

$\rightarrow$ si $X = (x_1, y_1)$ la pendiente de BX *es* $\frac{y}{x-b}$ y la de CH *es* $\frac{a}{-c} \rightarrow \frac{x_1}{x_1-b}\left(\frac{a}{c}\right) = 1$

Además, X está sobre MD, cuya ecuación es $y = \frac{a}{b}x \rightarrow y_1 = \frac{a}{b}x_1 \rightarrow$ sustituyendo la 1^a

$\frac{\frac{a}{b}x_1}{x_1-b} = \frac{c}{a}$y despejando x_1 queda $x_1 = \frac{bc}{c-\frac{a^2}{b}} = \frac{b^2c}{bc-a^2}$ $(bc - a^2 > 0$ *como habíamos dicho*

Sustituyendo x_1 $X = \left(\frac{b^2c}{bc-a^2}, \frac{abc}{bc-a^2}\right)$ Análogamente $y = \left(\frac{bc^2}{bc-a^2}, \frac{abc}{bc-a^2}\right)$

$\rightarrow X$ *y* Y tienen la misma coordenada con y $\rightarrow$es claro que Xy es paralela al eje X, que es BC

Así $xy||BC$

Ahora, como M es punto medio de la hipotenusa HB del triángulo rectángulo HDB $\rightarrow$ M es su circuncentro $\rightarrow$ $MB = MD$ $\rightarrow$ $\Delta\, BMD$ *es isósceles* $\rightarrow$ $\angle MBD = \angle MDB$. Como $MD||XP$, $\angle MDB = \angle MXP \rightarrow \angle MBD = \angle MXP \rightarrow XPDB$ es un trapecio y es cíclico $\rightarrow$ es un trapecio isósceles $\rightarrow PD = XB$. *Sea* $M' = DP \cap AB$. *Por Tales*, $\frac{M'X}{XB} = \frac{M'P}{PD}$ *y como* $PD = XB$ $\rightarrow$ $M'X + XB = M'P + PD \rightarrow M'D = M'B \rightarrow M$ está sobre la mediatriz de BD y también está sobre AB, pero en el triángulo rectángulo ADB, sabemos que las mediatrices de BD *y* AD concurren en el circuncentro de ADB, que es el punto medio de su hipotenusa AB. Así, donde AB es contada por la mediatriz de BD es el circuncentro de $\Delta ABD \rightarrow M'A = M'D \rightarrow \angle M'AD = \angle M'DA \rightarrow \angle BAD = \angle M'DA$.

Análogamente, si $N' = DQ \cap AC \rightarrow \angle N'DA = \angle CAD$.

Así $\angle BAD + \angle CAD = \angle N'DA + \angle M'DA \rightarrow \angle BAC = PDQ$. Pero como habíamos dicho, $\angle BAC + \angle BHC = 180°$ pues $CH \perp AB$ *y* $BH \perp AC$ $\rightarrow$ *si* $X' = AB \perp CH, y' = BH \cap AC$ $\rightarrow$ los ángulos internos de $AX'Hy'$ suman $360°$ y son $\angle BAC + \angle BHC + \angle 90° + 90° \rightarrow \angle BAC + BHC = 360° - 2 \, x \, 90° = 180°$

Así, $\angle PDQ + \angle BHC = 180°$ $\rightarrow \angle PHQ + \angle PDQ = 180°$

$\rightarrow$ Concluimos que el cuadrilátero $HPDQ$ es cíclico $\rightarrow$ H, P, D, Q están sobre la misma circunferencia la cual es lo que queríamos demostrar.

MEXICO: 3
PABLO MERE HIDALGO

Problema 1

Para cada entero positivo n, se define s(n) como la suma de los dígitos de n. Determine el menor entero positivo k tal que: $s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k)$:

Solución:

Nótese que $9999 = 10^4 - 1 \Rightarrow 10^4 \equiv 1(mod\ 9999)$ luego $\overline{a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_o}$ es múltiplo de 9999 entonces

$9999 \mid \overline{a_7a_6a_5a_4} + \overline{a_3a_2a_1a_o}$ y $\overline{a_7a_6a_5a_4} + \overline{a_3a_2a_1a_o} \leq 2(9999) = 19998$

Pero la igualdad solo ocurre si todos los dígitos son 9's así que como los números que trabajamos son menores a (9999) (10001) entonces $0 < \overline{a_7a_6a_5a_4} + \overline{a_3a_2a_1a_o} < 19998$

$$\therefore\ \overline{a_7a_6a_5a_4} + \overline{a_3a_2a_1a_o} = 9999$$

Luego como si a y b son dígitos $\Rightarrow (a + b \leq 18) = 9 + 9$ por lo que $a + b \equiv 9$ (mod 10) implica que $a + b = 9$ aplicando el argumento anterior (Pues $9 < 10$ y no hay acarreo) tenemos que: $a_4 + a_0 = 9$

$\Rightarrow a_5 + a_1 = 9$

$\Rightarrow a_6 + a_2 = 9$

$\Rightarrow a_7 + a_3 = 9$

$$\therefore \sum_{i=0}^{7} a_i = 9 \cdot 4 = 36$$

Lo anterior es suficiente para mostrar que $9999 = k$ funciona.

Veamos que $k < 9999$ no funciona.

$S(a) = S(10^a)$ se suma en cero y $S(a + b) = S(a) + S(b) - 9$ # de acarreos aplicando el proceso de sumar como se hace usualmente.

Si k tiene 3 o menos dígitos $\Rightarrow S(1001k) = 2S(k)$, Luego si $k > 9999, k$ tiene exactamente 4 dígitos luego $k + k$ puede haber máximo 4 acarreos.

$S(2k) = S(k) + S(k) - 9$ # de acarreos$\Rightarrow S(k) = 9$ # de acarreos

Si # de acarreos = 4 entonces k = 9999

Por lo tanto $S(k) = 9$ ó 18 ó 27 (k tiene 4 dígitos)

$k = a_3a_2a_1a_0$si $S(k) = 9$ entonces no puede haber acarreos en $(1000k + k)$

Pues $a_0 + a_3 \leq a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 9$

Si $S(k) = 18$ debería de haber 2 acarreos en $1000k + k \Rightarrow a_3 + a_0 \geq 10$ y $a_1 = 9$ para que pueda haber 2 acarreos o más pero $18 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \geq (a_0 + a_3) + (a_1) \geq 10 + 9 = 19$

Si $S(k) = 27$ debería de haber 3 acarreos en $(1000k) + (k)$

$\Rightarrow a_3 + a_0 \geq 10$ y $a_1 = 9a_2 = 9$ para que pueda haber 3 acarreos.

Pero $27 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \geq (a_3 + a_0) + a_1 + a_2 \geq 10 + 9 + 9 = 28$

Problema 4

Se tienen N monedas, de las cuales N − 1 son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente de las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Cada vez que se pueda deducir que una o varias monedas son auténticas, entonces todas estas monedas se separan inmediatamente y no se pueden usar en las siguientes pesadas. Determine todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee.)

Solución:

Veamos que N impar no funciona. Como se deben pesar k monedas contra k monedas, siempre se obtiene información de $2k$ (cantidad par de monedas).
Si cada vez que se usa la balanza esta se equilibrara (porque es posible que suceda) entonces eventualmente la cantidad de monedas se reducirá (manteniéndose siempre impar) hasta llegar a 1 moneda, y será imposible determinar si más o menos.
$n = 2$ no funciona, pues no se sabe cuál es la verdadera y cuál es la falsa, pero ambos casos son posibles.

Funciona para N par $(n \geq 4) \left|\frac{n=4k}{k\geq 1}\right| \;\; o \;\; (n = 4k + G \;\; para \;\; k \geq 0)$

Si $N = 4k + G$ se usa el algoritmo para G y luego (máximo) k veces el algoritmo para 4.

Si $N = 4k$ se usa k veces (máximo) el algoritmo para 4.

Algoritmo para 4

Sean a, b, c, d los pesos de las monedas, Si $a + b = c + d \Rightarrow$ a, b, c, d son buenas y se descartan, luego se sigue con las $N - 4 = 4(k - 1)$ monedas que quedan. Esto no es posible si $k - 1 = 0$

Si $a + b > c + d$ (el caso $a + b < c + d$ es análogo), las posibilidades son: a pesado, b pesado, c ligera, d ligera.

Se compara a y b, Si $a > b$ (a pesada) si $b > a$ (b pesada) si $a = b$ (c ligera o d ligera)

Si $c > d$ (d ligera) si $d > c$ (c es ligera).

Algoritmo para 6

Sean a, b, c, d, e y f los pesos

- Si $a + b + c = d + e + f$

Se descartan esta G monedas y se siguen con el proceso para $N - G = 4K$ no es posible de $k = 0$

- Si $a + b + c < d + e + f$; a ó b ó c pesada , d ó e ó f ligera
- Si $a + b + c < d + e + f$; a ó b ó c ligera, d ó e ó f pesada.

Podemos renombrar las monedas y hacer lo mismo que en el caso anterior

1. $a + b > c + d$; a pesada ó b pesada, la que pese mas será la mala a si $a > b$ ó b si $b > a$
2. $a + b < c + d$; c es la pesada, pues el no puede ser pesada, y a y b no pueden ser ligeras.
3. $a + b = c + d$; e ligera ó f ligera, la que pese menos es la mala. Si $e > f \Longrightarrow e$ ligera si $f < e \Longrightarrow$ f ligera (no es posible $e = f$ todas serán iguales).

Problema 5

Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de sus alturas. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y, respectivamente. Si XY intersectan a BH en P y a CH en Q, demuestre que H, P, D y Q están en una misma circunferencia.

Solución:

P.D. H, P, D, Q son cíclicos , HDC rectángulos $\Longrightarrow$ N es circuncentro $\Longrightarrow$ $HN = DN = NC$
Análogamente M circuncentro de ΔHDB
Pd X, B, D, P conciclicos (y análogamente D, C, Y, Q)
Pd $XY \| \| BC$

Sean E y F pies de altura desde B y C respectivamente H, P, D, Q conciclicos $\leftrightarrow$ $\angle DPQ = \angle DHQ$ y (análogamente $\angle PHD = \angle PQD$), Pd $\angle DBX = \angle DPQ$ $\leftrightarrow$ X, B, D, P cíclicos
(Analogamente $\angle PHD = \angle PQD \leftrightarrow \angle PQD = \angle YCD \leftrightarrow Q, Y, C, D$ cíclico)
Como ΔHBD rectángulo en D (pues AD altura sobre BC)
Entonces M es el circuncentro de $\Delta HBD \Longrightarrow MB = MD = MH \Longrightarrow \angle DBM = \angle MDB = \alpha$
X, B, D, P $cíclico$ $\leftrightarrow$ $\angle DBM = \angle XPM$
Luego $\angle XPM = \alpha \leftrightarrow XP \| \| DB$ por ángulos alternos internos pues $\alpha = DBM$
Pd. X, B, D, P $cíclico$ $\leftrightarrow$ $XP \| \| DB$ Pd $XY \| \| BC$
Sea L el punto medio de AH denotare por H_x^k a la homotecia con centro en el punto X y razón K.
$H_h^{1/2}$ manda $A, B, C,$ en L, M, N respectivamente.

Por cómo se definieron L, M y N $\Longrightarrow$ $MN \| \| BC$, $LM \| \| AB$ y $LN \| \| AC$
Consideremos que $H_d^{AD/LD}$, Esta homotecia manda L en A $\Longrightarrow$ la recta LN la manda en una paralela que pasa por L, es decir en AC, (análogamente manda la recta LM en la recta AB).

Esta homotecia manda el punto N en un punto que este sobre la recta AC y sobre el rayo DN, es decir, en el punto Y (análogamente manda el punto M en el punto X).

∴ Esta homotecia manda el segmento MN en el segmento XY $\Rightarrow XY \parallel\parallel MN\ y\ MN \parallel\parallel BC$

por lo tanto $XY \parallel\parallel BC$ Como queríamos demostrar.

Problema 6

Dado un conjunto X y una función $f: X \to X$, denotamos, para cada $x \in X$, $f^1(x) = f(x)$y, para cada $j \geq 1, f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Decimos que $a \in X$ es un punto fijo de si $f(a) = a$. Para cada número real x, definimos $\pi(x)$ como la cantidad de primos positivos menores o iguales que x. Dado un número entero positivo n, decimos que $f: \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ es catracha si $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Pruebe que:

a) Si f es catracha, entonces f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

b) Si $n \geq 36$, existe una función catracha con exactamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

Solución: $n = \{1,2,\ldots,n\}$ entonces f suprayectiva.

$1 \to f(1)$

$2 \to f(2)$

$3 \to f(3) \ldots\ldots.. n \to f(n)$

$S_k$el menor entero positivo tal que $f^{S_k}(k) = k$

$f(k) = (S_k)q + r$ con $q \in Z^+$ y $0 \leq r \leq q$.

Si $s > 0$ entonces $f^r(k) = kS_k \mid f(k)$

$f(k) = 1 \quad k = f^{f(k)}(k) = f^1(k) = f(k) = 1$

Sup $S_k > 1$ entonces $S_k / f(k) si\ f(k) = p$ primo $\to S(k) = p$ pues $S_k > 1$

Supongamos f una función catracha.

Sea S_k el mínimo entero positivo tal que $f^{S_k}(k) = k$

S_k existe pues hay otro entero f(k) que cumple lo mismo. Veamos que $S_k \mid f(k)$.

Supongamos que $f(k) = S_k \cdot q + r$ con $0 \leq r < S_k$ y $q \in Z_0^+$ digamos $r > 0$

Veamos que $k = f^{f(k)}(k) = f^{S_k \cdot q + r}(k)$

$$= f^{S_k(q-1)+r}(k) = f^{S_k(q-2)+r}(k) \ldots\ldots\ldots\ldots f^r(k)$$

Pero $0 < r < S_k$ y dijimos que S_k era mínimo.

Entonces $r = 0$ y $S_k \mid f(k)$ Veamos que como f es biyectiva, entonces f^{-1} (la función inversa de f) esta bien definida.

Veamos que $f(1) = 1$

sea $k = f^{-1}(1) \to f(k) = 1$ $k = f^{f(k)}(k) = f^1(k) = f(k) = 1$

∴ $f(1) = 1$

$\pi(n)-\pi(\sqrt{n})$ es la cantidad de primos p tales que $\sqrt{n}<p\leq n$.

Sea p un primo tal que $\sqrt{n}<p\leq n$ veamos que p es punto fijo de f_1 es decir $S_p=1$

Supongamos $k=f^{-1}(p)$ si y solo si $f(k)=p$
Luego $S_k\,|\,p \ \rightarrow S_k=1$ en cuyo caso terminamos ó $S_k=p$

Nota: $S_k=S_{f(k)}$ por la definición de S_k además de que F es biyectiva.

Supongamos $S_k=p$
p está en un ciclo de tamaño p en el cual están $p,f(p),f^2(p),\ldots,f^{p-1}(p)$ todos diferentes
Como $p=S_p=S_{f(p)}=S_{f^2(p)},\ldots,S_{f^{p-1}(p)}$
entonces $p\,|\,f(p),\ \ p\,|\,f^2(p),p\,|\,f^3(p),\ldots,p\,|\,f^{p-1}(p)$
Entonces algún $f^i(p)\geq p^2>n$ (para alguna $1\leq i\leq p-1$)

Si $p,f(p),f^2(p),\ldots,f^{p-1}(p)$ no fueran todos diferentes existiría un ciclo menos que S_p, lo cual no es posible por definición.

Pero en el rango de f solo están $\{1,2,\ldots,n\}$ por lo tanto S_p no puede ser p entonces $S_p=1$
Con esto se ha probado que $f(p)=p\ \ \forall\, p\ \ primo\ con\ \sqrt{n}<p\leq n$ y también $f(1)=1$ con esto ya no hay $\pi(n)-\pi(\sqrt{n})+1$ puntos fijos.

Veamos $S_k=S_{f(k)}$, $f^{S_k}(k)=k,\rightarrow f^{S_k+1)}(k)=f(k)\ ,\rightarrow f^{S_k}(f(k))=f(k)$

$$\therefore\quad S_k\,|\,S_{f(k)}\quad entonces\ S_k\leq S_{f(k)}$$

Aplicando lo anterior S_k veces
$S_k\leq S_{f(k)}\leq S_{f^2(k)}\leq\cdots\leq S_{f^{f(k)-1}}(k)\leq S_k$ Por lo tanto todos son iguales.

Para crear la función f con exactamente $\pi(n)-\pi(\sqrt{n})+1$ puntos fijos se agrupara el conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ en conjuntos de la forma $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_m\}$ Donde $m\,|\,a_i\ \forall\,1\leq i\leq m$ y m es primo luego la función f cumplirá que $f(a_1)=a_2,\quad f(a_2)=a_3,\ldots,f(a_{m-1})=a_m\ \ y\ \ f(a_m)=a_1$ Los conjuntos serán ajenos.

Como vimos anteriormente 1, y todos los primo mayores $(\sqrt{n})$ son puntos fijos de F.
Sea X el conjunto de números en el dominio de f pero que no son puntos fijos. Los conjuntos A se construyen de la siguiente manera:
Sea P_1 el primo más grande que aparece en el producto de todos los números en un conjunto X. ($P_1\leq(\sqrt{n})$) luego sea $X_{p1}=\{n{:}\,a\in x\ \ y\ \ p_1|a\}$, X_p se divide en conjuntos de P elementos (de la forma A) todos los elementos sean múltiplos de P_1. Empezamos por lo más grandes (además del numero $P_1\times(1)$) para que los elementos que no se agruparon. (Los elementos que se agruparon se "quitan" del conjunto X).

Entonces todos los elementos que quedan en X (que no se han agrupado en conjunto de la forma A) son múltiplos de 3 ó 2. Como $n\geq 36$, los números $6,12,24,18,36$, se encuentran en dicho conjunto de números sin agrupar veamos que se puede repartir de los números en conjunto de la forma A con 2 elementos o 3 elementos.

Supongamos que se separan Y múltiplos de 2 y Z múltiplos de 3 (donde $Y\cap Z=\emptyset$ y $Y\cup Z$ son todos los números no agrupados anteriormente excepto por $6,12,24,18$ y 36).

- Si $|X|\equiv 0\ (mod\ 2)$ y $|Y|\equiv 0\ (mod\ 3)$ Repartimos 2 y 3 números de $\{6,12,24,18,36\}$ a X y Y respectivamente.

- Si $|X| \equiv 1\ (mod\ 2)\ y\ \ |Y| \equiv 0\ (mod\ 3)$ Repartimos los 5 números a X
- Si $|X|^2 \equiv 0\ \ |Y|^3 \equiv 1$ Repartimos los 5 números a Y
- Si $|X|^2 \equiv 1\ y\ |Y|^3 \equiv 1$ repartimos 3 y 2 respectivamente a X y Y.
- Si $|X|^2 \equiv 0\ y\ |Y|^3 \equiv 2$ repartimos 4 y 1 respectivamente a X y Y.
- Si $|X| \equiv 1\ y\ |X| \equiv 2$ repartimos 1 y 4 respectivamente a X y Y.

Tengamos todos un divisor menor a P_1 (mayor a 1) esto es posible porque luego de agrupar conjuntos de P_1 y los números $2P_1, 3P_1, \ldots, (P_1 - 1)P_1\ y\ (P_1 + 1)P_1$ tiene todos algún divisor menor a P (si no hubiera al menos $P + 1$ múltiplos de P entonces habría exactamente P_1, pues $P_1 \leq \sqrt{n}$, y se pudieran quitar todas.

El proceso continua de manera similar que ahora con P_2(el segundo mayor divisor primo del producto de los numero en X) de los demás números que quedan en el conjunto X (que no se han quitado para ponerlos en un conjunto de la forma A) tomamos los múltiplos de P_2, estos los agrupamos en conjuntos de P_2 elementos de la forma A (y los quitamos de X) de nuevo, pueden sobrar máximo $P_2 - 1$ elementos, pero se pueden escoger de los conjuntos de tal forma que los elementos que sobren sean algunos de $2P_2, 3P_2, \ldots, P_2(P_2 - 1)\ y\ P_2(P_2 + 1)$ que todos ellos tienen algún divisor menor a P_2 {y no tienen divisores primos mayores a P_2 así que aún están en X no se han quitado agrupado anteriormente).

El proceso descrito anteriormente continua hasta $P_i = 5$ así se tiene que haya una cantidad par de elementos en X (todos múltiplos 2) así que se pueden hacer $\frac{|X|}{2}$ conjunto de la forma A cada uno con 2 elementos.
Y también como habrá una cantidad múltiplo de 3 de números en Y (Todos múltiplos de 3) se pueden agrupar todos en conjunto de la forma A cada uno con 3 elementos.

$$\boxed{\text{Si } m > n \text{ y m no es primo} \rightarrow \exists p < \sqrt{n}\ tal\ que\ p \mid m\ con\ \text{p primo.}}$$

Luego la función F se define usando cada uno de los conjuntos de la forma A.

$1 \rightarrow 1$	$13 \rightarrow 13$	$25 \rightarrow 35$
$2 \rightarrow 14$	$14 \rightarrow 2$	26
$3 \rightarrow 9$	$15 \rightarrow 22$	$27 \rightarrow 24$
4	16	28
$5 \rightarrow 10$	$17 \rightarrow 17$	$29 \rightarrow 29$
6	18	30
$7 \rightarrow 7$	$19 \rightarrow 19$	$31 \rightarrow 31$
8	20	32
$9 \rightarrow 33$	21	$33 \rightarrow 3$
$10 \rightarrow 15$	22	34
$11 \rightarrow 11$	$23 \rightarrow 23$	$35 \rightarrow 5$
12	24	36

Dividir el conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ en conjuntos si un conjunto K elementos $\Rightarrow$ tiene solo elementos múltiplos de K.

PERU: I
MIGUEL ANGEL CCACCYA CARHUAS

Problema 1

Para cada entero positivo n, se define s(n) como la suma de los dígitos de n. Determine el menor entero positivo k tal que: $s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k)$:

Solución:

Si k tiene a lo más 3 cifras, entonces $S(k) = S(1001k)$ y como: $K=\overline{abc}$; $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$
y no se cuenta el cos ; a=0 , b=0 , c= 0 a la vez .

El producto 1001 **k** = 1001 $\overline{abc}$

$$\left.\begin{array}{r} \overline{abc}\ \ x \\ 1001\ \ + \\ \hline \overline{abc} \\ 000 \\ 000 \\ \hline \overline{abc} \end{array}\right\}$$

Multiplicando de manera tradicional.

$$\overline{a\ b\ c\ a\ b\ c}$$

$\rightarrow S(1001k) = 2(a+b+c)$

$= 2.5\ (k) =$

$\rightarrow S(k) = 0 \quad \rightarrow k = 0$

- Si k tiene 5 cifras → $k \geq 10000$
- Si k tiene 4 cifras : $k = \overline{abcd}$

También se cumple $S(k) = S(1001k)$

Multiplicando

1001 $\overline{abcd}$
:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{abcd}\ \ x \\ 1001 \\ \hline \overline{abcd} \\ 0000 \\ 0000 \\ \hline \overline{abcd} \end{array}\right\}$$

Omitimos los ceros y queda:

$$\begin{array}{r} \overline{abcd} \\ \overline{abcd}\ \ + \\ \hline \overline{bcd} \end{array}$$

Resolvemos cómo será el resultado de la suma.

Tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} V \propto B\,\theta\,\overline{abcd} \quad + \\ \overline{abcd} \\ \hline \overline{vwzyxbcd} \end{array}\right\}$$

$2, b$ y θ son las sobras en la suma anterior, es decir.
$A + d = 10\,\theta + x$,
$C + \theta = 10\,b + y$,
$B + b = 10 \propto + z$ y $a + \propto = v$

caso 1: $\propto = 0 \rightarrow vw = a \rightarrow v = 0$ y $w = a$

$\rightarrow S(1001k) = a + b + c + d + z + y + x = a + b + c + d = S(k)$

$\rightarrow B + b = 0 \rightarrow B = 0$ y $b = 0$

$\rightarrow C + 0 = 0 \rightarrow c = 0$ y $\theta = 0$

$\rightarrow A + d = 0 \rightarrow a = 0$ y $d = 0 \rightarrow k = 0\ (\rightarrow\leftarrow)$

Caso2: $\propto = 1$, sabemos que las sobras $\propto, B, 0$ y v son menores o iguales a

Caso2.1: $a \leq 8 \rightarrow vw \leq 9 \rightarrow v = 0$ y $w = a + \propto$

$\rightarrow S(1001k) = a + 2 + b + c + d + z + y + x \geq a + b + c + d + 1$

$a + b + c + d \geq a + b + c + +d + 1\ (\rightarrow\leftarrow)$

Caso 2.2 : $a = 9 \rightarrow vw = 10 \rightarrow v = 1, w = 0$

$\rightarrow B + b = 10 + z$, $B \leq 1$ y $b \leq 9$ y $0 \leq z$

$\rightarrow 10 \geq B + b = 10 + z \geq 10$, *se da la igualdad*

$\rightarrow B = 9, b = 1$ y $z = 0$

$\rightarrow C + 0 = 10 + y$, *análoga al caso anterior*

$10 \geq c + \theta = 10 + y \geq 10$

$\rightarrow C = 9, 0 = 1$ y $y = 0$

$\rightarrow S(1001k) = 1 + 0 + 0 + 0 + x + b + c + d = 9 + b + c + d \rightarrow x = 3$

$\rightarrow a + d = 18$ *y como* $a = 9 \rightarrow d = 9$

$\rightarrow K = 9999.$

*Demostraremos que k cumple $S(k) = S(2k) = \ldots = S(2014k)$

Sabemos que $S(m) \underbrace{= S(10^{\propto} m)}_{\propto}$ Ya que $10^{\propto} m = (m)000..0$

$\rightarrow$ No trabajaremos con los $S(ik)$ *con* $i = 0\ (mod\ 10)$ ya que estos saldrán de algún j multiplicadora por algún 10^{B} y también cumplirá que $S(iK) = S(jk)$.

Tenemos $S(ik)$, sea $i = \overline{abcd}$ $, con\ a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0\ y\ d\ \geq 1\ ya\ que\ \overline{abcd}\ \neq 0\ (mod10)$

➔ Como $9999 = 10000 - 1$ tendríamos que $i, 9999\ es\ 10000\ i - i = \overline{abcd\,0000} - \overline{abcd}$:

$\overline{abcd0000}$ – restamos tradicionalmente

$\overline{abcd}$

$abc(d-1)(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)$

$10 - d$ ya que $d \geq 1$→ el o presta una derecha y queda $10 - d$:

Al prestar el 0 al de la derecha queda 9 y como 0 << 9 → wec

$9 - c, 9 - b\ y\ 9 - a$

D el resto a la derecha queda $d - 1$

➔ $S(abcd) = a + b + c + d - 1 + 9 - a + 9 - c + 10 - d = a + b + c$

➔ $K = 9999$ cumple

El min es $k = 9999$, ya que en 5 dígitos seria ≥ 1000.

Problema 2

Halle todos los polinomios P(x) con coeficientes reales tales que P(2014) = 1 y, para algún entero c, se cumple que: $xP(x - c) = (x - 2014)P(x)$:

Solución:

$x = 0 \to 2014\,P(0) = 0 \to P(0) = 0 \to P(x) = xQ(x) \to x(x-c)\,Q(x-c) = (x-2014)\,x\,Q(x)$

$(x-c)\,Q(x-c) = (x-2014)\,Q(x)$ ... (i)

$x = c \to 0 = (c - 2014)\,Q(c), c = 2014 \to (x-2014)\,Q(x-2014) = (x-2014)\,Q(x)$ de (0)

$\to Q(x-2014) = Q(x) \to Q(x) = Q(x-2014) = Q(x \cdot 4028) = \cdots \to Q\ es\ constante$

$\to P(x) = xk, además\ P(2014) = 2014\,K = 1$

$\to k = \frac{1}{2014} \to$ P (x) = $\frac{x}{2014}$, prueba: $x\,P\,(x-c) = (x-2014)\,P\,(x)$

$$x\,\frac{x-2014}{2014} = (x-2014)\,\frac{x}{2014}$$

$c \neq 2014 \to Q\,(c) = 0 \to Q(x) = (x-c)\,R(x)$

$\to (x-c)\,(x-2c)\,R(x-c) = (x-2014)\,(x-c)\,R(x)\ de\ (i)$ ... (ii)

$x = 2c \to 0 = (2c - 2014)\,R(2c), \quad c = 1007$

$\to (x-2014)\,R(x-1007) = (x-2014)\,R(x)\ de\ (ii)$

$\to R(x-1007)\,R(x) \to (R(x)\,R(x-1007) = R(x-2014) = R(x-4028) = \cdots \to R\ es\ constante$

P(x)= x ; Q(x)= x(x-1007) ; R(x)= x(x-1007)k

$Prueba: xP(x-c) = (x-2014)\,P(x)$

$x[(x-1007)(x-2014)k] = (x-2014)\,[x(x-1007)\,k]$

$Además\ P(2014) = 2014 \cdot 1007 \quad , \quad k = 1$

$\text{k} = \frac{1}{2014 \cdot 1007}$

$\text{P(x)} = \frac{x(x-1007)}{2014 \cdot 1007} \quad c \neq 1007$

$c \neq 10070 = (2c-2014) \quad R(2c) \to R(2c) = 0$

$R(x) = (x-2c)\,T(x)$

$(x-2c)\,[(x-3c)\,T(x-c)] = (x-2014)[(x-2c)\,T(x)]$

$x = 3c \to 0 = (3c-2014)\,T(3c)$

Como c es entero $\to 3c - 2014 \neq 0 \qquad 3c - 2014 \equiv 1 (mod\ 3)$

$T(3c) = 0$

$T(x) = M(x)\,(x-3c)$

$(x-3c)(x-4c)\,M(x-c) = (x-2014)\,M(x)\,(x-3c)$

$(x-4c)\,M(x-c) = (x-2014)\,M(x)$

$x = 4c \to (4c-2014)\,M(4c) = M(3c) \cdot 0 = 0 \to M(4c) = 0$

$x = 5c \to (5c-2014)\,M(5c) = M(4c) \cdot c = 0 \to M(5c) = 0$

$x = 13c \to (18c-2014)\,M(18c) = M(17c) \cdot 14c = 0 \to M(18c) = 0$

Trabajé el $M(5c)$ en función de $M(4c) = 0 \to M(5c) = 0$

y así los demás que siguen ya que $(xc - 2014) \neq 0$

para $\alpha \in \{4, \dots, 18\}$, *ya que* $2014 = 2 \cdot 19\ s3$, pero

$x = 19 \to (19c-2014) \qquad M(19c) = M(18c) \cdot 15c = 0$

$c = 106$

Sabemos que $M(4c) = M(5c) = \dots = M(18c) = 0 \to M(x) = (x-4c)(x-5c)\ \dots\ (x-18c)\ N(x) \to$

$(x-4c)[(x-5c)\dots(x-19c)\,N(x-c) = (x-2014)\,[(x-4c)\dots(x-18c)]\,N(x)$

$x - 19c = x - 2014$

$N(x-c) = N(x), \quad N(x) = N(x-c) = N(x-2c) = \dots$ N es constante

$P(x) = x(x-c)\,(x-2c)\ \dots\ (x-18c)\,k\ \ con\, c = 106$

Prueba: $x\,P(x-c) = (x-2014)\,P(x)$,

$x\{(x-c)\,(x-2c\dots(x-19c)\,x\} = (x-2014)\,\{x(x-c)\dots(x-18c)$

$19c = 2014$

$Además\ P\ (2014) = 2014(2014-106)\,(2014-2 \cdot 106)\dots(2014-18 \cdot 106) = 1$

$k = \frac{1}{19!\ 106^{19}}$

$c \neq 106$

$M(19c) = 0$

$y\ así\ otra\ vez\ M(20c) = 0\ hasta\ M\ (37c) = 0$

$x = 38c\ \ (38c - 2014)\ M\ (38c)\ = 34c\ M(37c) = 0$

$(38c - 2014)\ M(38c)\ = 0$

$c = 53$

$Sabemos\ que\ \ M(4c) = M(5c) = \cdots\ =\ M(37c) = 0$

$M(x) =\ (x - 4c)\ (\ x - 5c)\ \ldots\ (x - 37c)\ N(x)$

$(x - 4c)\ \{(x - 5c)(x - 6c) \ldots\ (x - 37c)\ N(x - c)\} =\ (x - 2014)\ \{(x - 4c) \ldots\ (x - 38c)\ N(x)\}$

$x = 2014 = x - 38c$

$N(x - c)\ =\ N(x),\ N(x) =\ N(x - c)\ =\ N(x - 2x) = \cdots\qquad c = 53\ \ N\ es\ constante$

$M(x)\ =\ (x - 4c)\ (x - 5c) \ldots\ (x - 37c)\ \cdot k$

y ya que operamos todo hasta que quede $N\ (x - c) = N(x) = k\ \rightarrow$ es fácil ver que $P(x)$ cumple (así también era la prueba para los casos anteriores) $P(x) = x(x - 53)\ \ (x - 2 \cdot 53) \ldots\ (x - 37 \cdot 53)\ k$

$Además\ f(2014) = 1\ =\ 38 \cdot 53 \cdot 3753 \cdot 3653 \ldots\ 53k\ \ \mathrm{k} = \frac{1}{38!53^{38}}\ \ , c \neq 53$

$M(38c) = 0$

$y\ así\ otra\ vez\ hasta\ M(52c) = 0\ \ ,\ x = 53c\qquad (53c - 2014)M(53c) = 49c\ \ M(52c) = 0$

$(53c - 2014)\ M(53c) = 0\qquad c = 38$

Analogo a todos los casos anteriores tenemos que $M(4c) = \cdots = M(52c) = 0$

$$M(x) = (x - 4c) \ldots (x - 52c)N(x) y\ reemplazaremos\ en\ \ N(x) = N(x - c)$$

$N\ es\ constante,\ P(x) =\ x(x - 38) \ldots\ (x - 52 \cdot 38)\ k\ \ Con\ k\ obtenido\ de$

$P(2014) = 1 =\ 53 \cdot 38 \cdot 52 \cdot 38 \ldots\ 1 \cdot 38\ \cdot k$

$\mathrm{K} = \frac{1}{53!\,38^{53}}$

Realizamos el mismo método en el caso $c \neq 38\ \rightarrow$ tenemos caso $c = 19\ y\ c \neq 19\ y\ en\ c = 19$ obtenemos:

$P(x) =\ x(x - 19) \ldots\ (x - 105 \cdot 19) \cdot k$

$\mathrm{k} = \frac{1}{106!19^{106}}$ Cumple ya que operamos hasta reducirlo a un $N(x) =\ N(x - c)$ y llegamos a que N es constante.

En $c \neq\ 19$ tenemos casos $c = 2\ y\ c \neq 2,$ En $c = 2$ obtenemos

$P(x)\ =\ x(x - 2) \ldots\ (x - 1006 \cdot 2) \cdot k,\ \ \mathrm{k} = \frac{1}{1007! \cdot 2^{1007}}$

En $c \neq 2$ tenemos $c = 1\ y\ c \neq 1$ en $c = 1$ obtenemos $P(x) =\ x(\ x - 1)\ (x - 2) \ldots\ (x - 2013)\ k$

$k = \frac{1}{2014!1^{2014}} - \frac{1}{2014!}$ en c≠1 tenemos que $M(2014c) = 0$ y así continuamos, de (uv)

$(x - 4c)\, M(x - c) = (x - 2014)\, M(x), \quad x = 2015c$

$0 = M(2014c) \cdot 2011c = (2015c2014)\, M(2015c), \; M(2015c) = 0$

y así para todo $x = ic$, con $i \geq 2015$, ya que $ic - 2014 \neq 0$, ya que $c \in Z$

M es nula para infinitos valores, $O\ C = O$. Sí M es nulo

→ P es nulo y cumple; si $c = o \rightarrow xP(x) = (x - 2014)Px$

Para todo $x = 2014 - x$ para todo x $P(x)$ es nulo. Todos los polinomios son esos.

NOTA: El valor del K está indicado para cada polinomio.

Problema 4

Se tienen N monedas, de las cuales N − 1 son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente de las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Cada vez que se pueda deducir que una o varias monedas son auténticas, entonces todas estas monedas se separan inmediatamente y no se pueden usar en las siguientes pesadas. Determine todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee.)

Solución:

Si N es par > 2 (en $N = 2$, no se asegura cual pesa más) Por inducción $N = 4$ Medimos 2 grupos de 2 bolas y escogemos al que pesa más, ahora son los verdaderos y como ambas pesaban más que las del otro grupo se deduce que peso verdadera > peso falso → medimos las del otro grupo y la menos es la falsa del otro del otro grupo y la menor es la falsa. Si son distintas → el peso de ellos es mayor al del otro (que se deduce son iguales) → peso falso > peso verdadero → como ya habíamos medido las bolas distintas escogemos la más pesada que será la falsa.

$N = 2K$ cumple
$N = 2K + 2$ Medimos 2 grupos de KH bolas y escogemos al que pesa más, ahora escogemos 2 bolas de ese grupo y las pesamos. Si pesan lo mismo las separamos y nos quedan $2K$ → por inducción podemos obtener con certeza lo que queremos obtener con certeza lo que queremos.

Si pesan distinto → este grupo que era el mayor contenía al falso y como el otro grupo de peso menor son euros verdaderos → se deduce que el falso pesa más y como ya habíamos pesado dos más y como ya habíamos pesado dos distintos solo escogemos al que pesada mas que es el falso.

Primero demostraremos que si pesamos 2 grupos con cantidades distintas no nos servirá. Es fácil ya que, como es azar, te puede resultar este caso el grupo de menor cantidad tiene todos auténticos y el de mayor el falso y las restantes auténticos → saldrá que el grupo mayor pesa más que el menor y no aporta, ya que no hay la certeza de que este caso no se dé, o sea, se puede dar infinitamente cada vez que lo hagas.
Entonces las pesadas que hacemos las haremos en grupos iguales.

Si N es impar $(N = 2k + 1)$
→ la primera pesada será entre 2 grupos de x bolas con $1 \leq x \leq K\ y$ → Por azar se puede dar que las $2x$ bolas sean todas iguales.
Para explicar hacemos inducción.
$N = 3$ Al hacer una pesada entre 2 grupos de 1 estos pueden ser iguales => se separan y queda el falso, pero no sabemos si es más liviano o pesado.

$N = 2K + 1 \quad \cup \quad 2K - 1, "k - 3, \ldots 3$

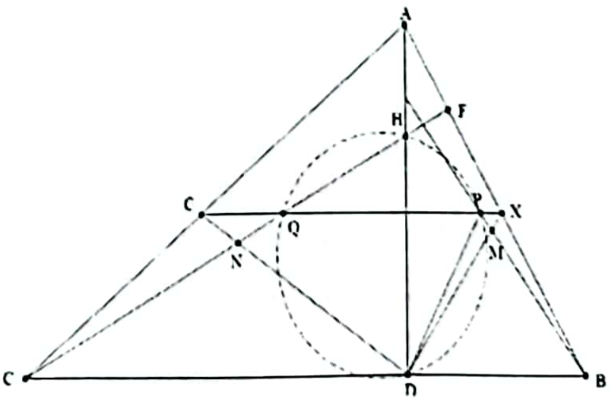
$N = 2k + 3$: Como habíamos dicho que sacan x bolas en cada grupo para pasarlas en la balanza → Las 2x pueden ser iguales → se separan→ Te queda una cantidad impar menor con la que se trabajara → Por inducción no se puede asegurar.

En N impar no se asegura.

Problema 5

Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de sus alturas. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y , respectivamente. Si XY intersectan a BH en P y a CH en Q, demuestre que H, P, D y Q están en una misma circunferencia.

Solución:



Prolongamos Dx hasta p; $Tq\ X\hat{A}P = \alpha \rightarrow \square PBDA$ es Cíclico ya que $BDP = \alpha$

Sea $B\hat{A}D = 0\ y\ N\hat{C}D$ (cíclicos), además al ser N punto medio → $HN = ND = NC \rightarrow NDC = 0.$

También $MBD = MDB = \alpha \quad (por\ BM = MD = MH) \rightarrow D\hat{A}C = \alpha\ (por\ ciclico\ \square ABDB1)$

→ Tenemos que $\Delta APB \sim \Delta\ ADC$ y como $XBP = YDC = 0 \rightarrow PX\ y\ DY$ son cevianas homólogas $\rightarrow \frac{AX}{XB} =$

$\frac{AY}{YC} => \frac{xy}{BC} \rightarrow xpm = MBD = MD = \alpha \rightarrow$ □XPDB es cíclico $\rightarrow DPQ =$

$XBD, además\ por\ \square\ C1BDM\ cíclico \rightarrow CBD = DHQ \rightarrow GBC = XBD = DPQ = DHQ$

$\therefore P, D, Q\ y\ M$ son cíclicos.

PORTUGAL: 3

FRANCISCO TUNA ANDRADE

Problema 2

Ache todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais tais que $P(2014) = 1$ e, para algum inteiro c, se tem: $xP(x - c) = (x - 2014)P(x)$:

Solución:

$0\,x\,p(0-c) = (0-2014)\,p(o) \Leftrightarrow p(o) = 0$

Sendoassim, $(x-0)|P(x)$. $SeiaP(x) = xQ_1(x)$ Ondee Q_1 é um polinomio de coeficientes reais. Sendo assim $xP(x-c) = (x-2014)P(x) \Leftrightarrow x(x-c)Q_1(x-c) = (x-2014)Q_1(x)x \Leftrightarrow (x-c)Q_1(x-c) = (x-2014)Q_1(x)$

Suponha-se, agora, que c nao é um divisor de 2014 supstituindo x por c na equacao acima, obtem-se $c = 2014 \vee Q_1(c) = 0$ Como $cx2014$, $Q_1(c) = 0$

Sendo assim, $x - c\,|Q_1(x)$. $SeiaQ_2(x) = (x-c)Q_2(x)(x-c)Q_1(x-c) = (x-2014)Q_1(x) \Leftrightarrow (x-c)(x-2c)Q_2(x-c) = (x-2014)c(x-c)Q_2(x) \Leftrightarrow (x-2c)Q_2(x-c) = (x-2014)Q_2(x)$

Agora, será provado que para todo i natural $(x-ic)|Q_1(x)$ e que definindo $Q_1(x) = \frac{Q_1(x)}{(x-c)(x-2c)\ldots(x-(i-1)c)}$ se obtema equasao:

$(x-ic)Q_i(x-c) = (x-2014)Q_i(x)$ A demonst. Sera feita por indusao

Caso base: $i = 1$

Ya foi apresentado

Passo de indusao:

Suponha-se que se tema equasao $(x-ic)Q_i(x-c) = (x-2014)Q_i(x)$

En tao substituindo x por ic obtem-se $ic - 2014 = 0 \vee Q_i(ic-2014) = 0$

Como $c \wedge 2014, ic - 2014 \neq 0$, logo $Q_i(ic-2014)0$.

Sendo assim, $(x-ic)\,|Q_i(x)$ seia $Q_{i+1}(x) = (x-ic)Q_i(x).(x-ic)Q_i(x-c) = (x-2014)Q_i(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-(i+1)c)(x-ic)Q_{i+1}(x-c) = (x-2014)(x-ic)Q_{i+1}(x) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x-(i+1)c)Q_{i+1}(x-c) = (x-2014)Q_{i+1}(x)$, oque concluio o passo indusao.

Sendo assim, caso c $\wedge$ 2014, P(x) temuma infinidade de raizes, o que e umabsurdo. Segue-se por tanto que c | 2014.

Utilize-se a mesma notasao que na demonstrasao acima ya provamos pela demonct. Acima que para todo o i natural tal que ic < 2014 $x - ic|Q_1(x)$ e que

$$\left(x - \frac{2014}{c}c\right) Q_{\frac{2014}{c}}(x-c) = (x-2014) Q_{\frac{2014}{c}}(x) \Leftrightarrow Q_{\frac{2014}{c}}(x-c) = Q_{\frac{2014}{c}}(x)$$

Tem-se entao que $Q_{\left(\frac{2014}{c}\right)}(kc)$ é igual para todo o k inteiro, Seia $Q_{\left(\frac{2014}{c}\right)}(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$, caso n ≥ 1,
Escolhendo k arbitrariamente grande $Q_{\left(\frac{2014}{c}\right)}(x)$ aproximar-sea tanto quanto se queira de +00 ou -00 conforme o sinal de a_n pelo que $Q_{\left(\frac{2014}{c}\right)}(kc)$ nou pode ser constante a nao ser que n = 0 (note-se $Q_{\left(\frac{2014}{c}\right)}(c) = a_o$) Sendo assim, seia d um divisor de 2014,
$P(x) = x(x-d)\dots(x-(id))\dots(x-(2014-d))\text{x}\, Q_{\left(\frac{2014}{c}\right)}(kc)$ como $P(2014) = 1$ e $x(x-d)\dots\big(x - (2014-d)\big) = \left(\frac{2014}{d}\right)((x)\left(d^{\frac{2014}{d}}\right)$, $P(x) = x(x-d)\dots(x-(2014-d))\frac{1}{\left(\frac{2014}{d}\right)!x\, d^{\left(\frac{2014}{d}\right)}}$ sendo d um qualquer divisor de 2014. Tem-se que $c = d$
Verificacao de que esta solucao funciona note-se que $c = d$

$$P(x-c) = \frac{1}{\left(\frac{2014}{d}\right)!x\, d^{\frac{2014}{d}}} x\,(x-d)(x-2d)(x-3d)\dots\big(x-(2014-d)\big)(x-2014) = \left(\frac{x-2014}{x}\right)P(x)$$

Q. ED.

Nota: d pode ser 1,2,19,38,53,106,1007,2014.

<u>Problema 4</u>

Tem-se N moedas, das quais $N - 1$ são autênticas de igual peso e uma é falsa, de peso diferente das demais. O objetivo é, utilizando exclusivamente uma balança de dois pratos, achar a moeda falsa e determinar se é mais pesada ou mais leve que as autênticas. Em cada vez que se possa deduzir que uma ou várias moedas são autênticas, todas estas moedas são imediatamente separadas e não podem ser usadas nas pesagens seguintes. Determine todos os N para os quais se pode garantir que o objetivo seja atingido. (Podem-se fazer tantas pesagens quantas se deseje).

Solución:

Resposta Para toda N par exceto dois.
Antes mais,caso a diferensa de peso entre a moeda falsa e as autenticas deja minima, colocando mais monedas num prato da balanra do que noutro, ese piato será sempre mais pesado do que o outro, portanto esquecamos as pesagens em que um tem mais moedas do que outro visto que essa pesagens nau nos dao intermacao nenhuma.
Prova de que e impossirel achar a moeda falsa, caso N seja impar:
A prora será feita utilizando inducao forte

Caso base: $N = 3$

A única pesagema fazer e comparar uma moeda com outra. Suponha-se que esas moedas que toram pesadas sao iguais, sabemos que a moeda restante e a falsa no entanto nunca poderemos saber sec mais leve ou mais pesada do que as demais
Passo de indusao:

Suponha-se que a hipotese e valida para todos os impares menores que N.
Execute-se uma pesagem com m moedas num lado e m moedas do autra

Caso 1: m $< \frac{N-1}{2}$

Nesse caso, caso o resultado da pesagem seja que osdois grupos de moedas pesam o mesmo, sabemos que as 2m moedas sao autentica e restamos un total N – 2m imoedas de onde temos que descubrir a falsa. No entano N -2m e impar e por hipotese de inducao forte e impossivel fazer tal corsa.

Caso 2: m $= \frac{N-1}{2}$

Neste caso, caso o resultado da pesagem seja que osdois grupos de moedas pesam o mesmo, sabemos que a moeda restante e a falsa, no entanto, nunca poderemos saber se e mais leve ou mais pesada que as demais.
Prova de que para todo N = 0 (mod 4) e possivel achar a moeda falsa e determinarse e mais pesada ou mail leve:
A prova será feita por indusao porte

Caso base: $N = 4$

Coloquem-se duas moedas num plato e duas moedas noutro. Duas dessas moedas serao pesadas du que as outras. Comparem-se essas duas moedas.
Caso uma seja mais pesada que a outra, entao essa moeda e a falsa o e mais pesada du que as o de mais.
Caso essas duas moedas sejam iguais e porque sao autenticas nesse caso comparem-se as restantes duas moedas e a mais leve será a falsa, sendo mais leve que as outras.

Passo de indusao:
Suponha-se que a hipotese e valida para todos os múltiplos de 4 menores que N.
Estrategia: 1. Passo: comparar $\frac{N}{2}$ moedas com $\frac{N}{2}$ moedas.
2. a. passo: pegar em duas moedas pesadas da 1 pesagem, junta-las a duas moedas leves da 1 pesagem juntamente com duas moedas leves da 1 pesagem. Caso na 2 pesagem, os dois grupos de moedas sejam iguais as 8 moedas em analise sao autenticas. Sobram-nos N – 8 moedas das quais sabemos que um grupo de $\frac{N}{2} - 4$ moedas e mais pesado que o restante grupo de $\frac{N}{2} - 4$ moedas. Por indusao e possivel achar a moeda falsa.

Caso na 2 pesagem um grupos de moedas (A) seja mais pesada do que o outro grupo de moedas (B), sabemos que a moedas falso e uma das seguintes: uma das 2 moedas pesadas (1 pesagem) de A ou uma das duas moedas leves (1 pesagem) de B. como javimos ser possivel descubrir a falsa caso $N = 4$ o passo de indusao esta concluido.
Prova de que caso $N = 2(mod\ 4)\ y\ N \neq 2$, e possivel achar a falsa e indicar se e mais pesada ou mais leve:
A prova será feita por inducao forte

Caso base $N = 6$
Estrategia: 1er passo: comparar 3 moedas com outras 3 moedas

2do passo: comparar 2 moedas pesadas(1era pesagem) grupo A com 1 moeda pesada e 1 moeda leve (1era pesagem) grupo B

Caso o resultado da 2da pesagem seja igual comparem-se as restantes duas moedas leves e aquela que foy mais leve será a falsa, sendo mais leve que as de mais.

Caso o grupo A seja mais pesado que u grupo B, a moeda falsa e a moeda pesada (1era pesagem) do grupo B.

Caso o grupo A seja mais pesada que u grupo B , a moeda ou e uma das duas moedas pesadas (1era pesagem) du grupo A ou a moeda leve (1era pesada) do grupo B comparem-se as 2 moedas pesadas do grupo A. Caso uma seja mais pesada que a outra, essa e a falsa, sendo mais pesada que as de mais. Caso as 2 moedas pesadas (1era pesagem) do grupo A sejam iguais a moeda falsa e a moeda leve do grupo B.

Passo de inducao:

Estrategia: 1er passo: comparar $\frac{N}{2}$ moedas com outras $\frac{N}{2}$ moedas

2do passo: comparar 2 moedas pesadas (1er pesagem) chamemos grupo A a este grupo de moedas, com 2 moedas leves (1er pesagem) chamemos grupo B a este grupo de moedas.

Caso o grupo A seje mais pesado que o B, sabe-se que a moeda falsa esta entre as duas moedas pesadas (1er pesagem) do grupo B e toi visto que caso N = 4 e possivel achar a falsa.

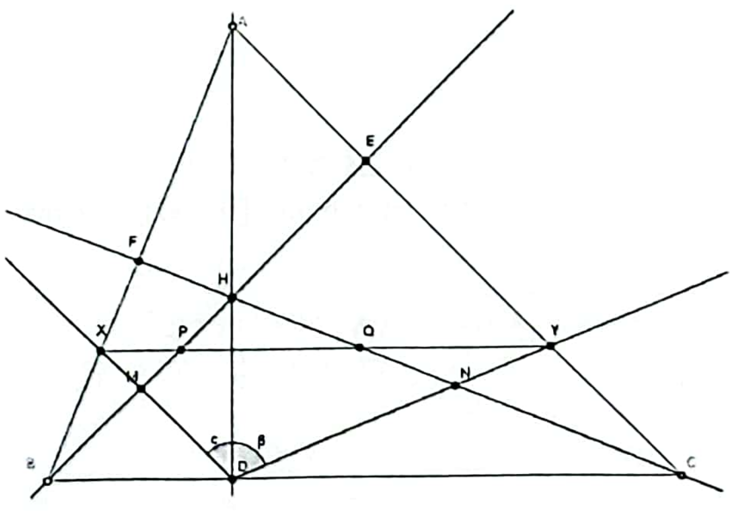
Caso os dois grupos pesem o mesmo sabe-se que a moeda falsa esta entre as moedas que nao foram utilizadas na 2da pesagem e por hipotese e possivel achar a falsa para N-4,(Nota: neste caso a informacao que se teria apos o 1er passo para N-4, pelo que nao afeta a estrategia. Basta de seguida comensar 2do passo para N-4).

B nao pode ser mais pesado que A.

Problema 5

Seja ABC um triângulo acutângulo e H o ponto de interseção de suas alturas. A altura relativa ao vértice A corta BC em D. Sejam M e N os pontos médios de BH e CH, respectivamente. DM e DN intersectam AB e AC em X e Y , respectivamente. Se XY intersecta BH em P e CH em Q, demonstre que H, P, D e Q estão numa mesma circunferência.

Solución:



Sea E la altura de B en relación con AC y F la altura de C en relación de AB. [BFHD] y [DHEC] son cíclicos. Como M es punto medio de $[BH]$ y $< BFH = < BDH = 90^o$, M es el centro de la circunferencia circunscrita a [BFHD]. De forma análoga N es el centro de la circunferencia circunscrita a [DHEC]. Siendo así $\angle NDC = \angle NCD = 90^o - B$, así como $\angle MDB = \angle DBM = 90^o - C$.

Ahora como M y N son puntos medios de $[BH]$ y $[CH]$ se sigue que $MN \parallel BC$. Sea $d(p)$ la distancia de un punto "p" a BC. Caso dos puntos U y W que están en el mismo semiplano definido por BC, $UW \parallel BC \Leftrightarrow d(U) = d(W)$.

Siendo así:

$d(M) = d(N) \Leftrightarrow \overline{DM} \times sen(90^0 - C) = \overline{DN} \times sen(90^0 - B)$. O sea: $\frac{\overline{DM}}{\overline{DN}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CN}} = \frac{sen(90^0 - C)}{sen(90^0 - B)}$

Ahora $\angle HND = 180^0 - \angle DHN - \angle HDN = 180^0 - 2B, \angle CNY = \angle HND = 180^0 - 2B$
$\angle NYC = 180^0 - \angle CNY - \angle NCY = 180^0 - (180^0 - 2B) - (90^0 - A) = 2B + A - 90$
De forma análoga, $\angle MXB = 2C + A - 90$.

Obsérvese $\angle NYC + \angle BXM = 2B + A - 90 + 2C + A - 90 = 180^0$ Pero: $sen(\angle NYC) = sen(\angle BXM)$.
Ahora por teorema de los senos:

$$\overline{NY} = \frac{\overline{NC} \times sen(90 - A)}{sen(2B + A - 90)}$$
$$\overline{MX} = \frac{\overline{BM} \times sen(90 - A)}{sen(2C + A - 90)}$$

Esto viene a implicar que: $\frac{\overline{NY}}{\overline{MX}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{DM}}$ O que implica: $\frac{\overline{DN} + \overline{NY}}{\overline{DM} + \overline{MX}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{DM}} \Leftrightarrow \frac{\overline{DY}}{\overline{DX}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{DM}}$

Esto viene a implicar que $XY \parallel MN$ como $MN \parallel BC$, $XY \parallel BC$.

Ahora como $XY \parallel BC$, $\angle QYD = \angle YDC = 90 - B$. Siendo así $\angle QYD = \angle QCD = 90 - B$. Lo que implica $[DQYC]$ es cíclico, lo que implica $\angle QDY = \angle QCY = 90 - A$
De forma análoga, $[DPXB]$ es cíclico y $\angle XDP = \angle XBP = 90 - A$.

Siendo así:
$\angle HDQ = \angle HDN - \angle QDN = B - (90^0 - A) = 90^0 - C$, como $PQ \parallel BC$.
$\angle HPQ = \angle HBC = 90^0 - C$ siendo así $\angle HPQ = \angle HDQ$, tenemos que [HPDQ] es cíclico.