SOLUCIONES DE ACUERDO AL BANCO DE PROBLEMAS

Carmen Benítez, Carmen Cartagena, Marco Valladares, Emilio Calderón, Besser Henríquez, Omar, Víctor Cartagena, Ricardo Gallardo, Daniel Pineda

Se presentan los problemas originales, sin modificaciones, de los problemas y sus soluciones de acuerdo al banco de problemas de los exámenes de la 29ª Olimpiada Nacional de Matemáticas.

Problema 1. (Teoría de Números)

Para un entero positivo n, definimos s(n) como la suma de los dígitos de n. Encontrar el menor entero positivo k tal que: $s(k) = s(2k) = s(3k) =\ldots= s(2013k) = s(2014k)$.

Solución:

Supongamos que k tiene menos de 4 dígitos. Como $s(k) = s(1001k) = s(1000k + k) = 2s(k)$ *se llega a* $s(k) = 0$, lo cual es una contradicción.

Supongamos que k tiene exactamente 4 dígitos, $k = \overline{abcd}$. Notemos que $1001k = \overline{abcd000} + \overline{abcd}$ que termina en $\overline{bcd}$, por lo tanto $s(\overline{abcd} + a) = a$. Si $(\overline{abcd}) + a \leq 9999$, su digito de la izquierda sería al menos a y entonces $s(\overline{abcd} + a) > a$ pues $9999 \geq \overline{abcd} + a > \overline{a000}$, una contradicción. Por lo tanto $\overline{abcd} + a > 9999$. De aquí se concluye que $a = b = c = 9$ y finalmente como $s\overline{(999d} + 9) = a = 9$ se tiene que $d = 9$, por lo tanto $k = 9999$ es la única posibilidad de 4 dígitos.

Ahora veamos que $k = 9999$ cumple la condición, es decir que para $r - 1,2,3, \ldots .2014$, se tiene que $s(kr) = s(k) = 36$. A esos valores de r los pensamos como números de 4 dígitos $\overline{wxyz}$ (agregando ceros a la izquierda si es necesario), además podemos suponer que r no termina en 0 ya que si t es el número que resulta de quitarle a r los ceros de la derecha hasta que el digito de las unidades sea diferente de cero, es claro que $s(9999r) = s(9999t)$.

Entonces
$$\begin{aligned} S(9999r) &= s(10000r - r) = s(\overline{wxyz0000} - wxyz) \\ &= s(\overline{wxy(z-1)(9-w)(9-x)(9-y)(10-z)}) \\ &= w + x + y + z - 1 + 9 - w + 9 - x + 9 - y + 10 - z \\ &= 36, \end{aligned}$$
Lo que concluye la prueba de que $k = 9999$ es el mínimo.

Problema 2.

Halle todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que $P(2014) = 1$ y, para algún entero c, se cumple que: $xP(x - c) = (x - 2014)P(x)$

Solución:

Observemos que no hay ninguna solución con P constante, pues debería ser $P(x) = 1$ y entonces $x = x - 2014$, absurdo. Busquemos soluciones de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *con* $n \geq 1$ *y* $a_n \neq 0$.

Entonces $x(a_n(x-c)^n + a_{n-1}(x-c)^{n-1} + \cdots + a_0) = (x-2014)(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)$, de donde: $a_n x^{n+1} + (a_{n-1} - nca_n)x^n + \ldots = a_n x^{n+1} + (a_{n-1} - 2014a_n)x^n + \cdots$

Entonces $a_{n-1} - nca_n = a_{n-1} - 2014a_n$ o sea $nc = 2014$. Por lo tanto n debe ser un divisor entero positivo de 2014, es decir un elemento del conjunto $\{1,2,19,38,53,106,1007,2014\}$, $y\ c = 2014/n$.

Dado un par (n,c) de estos, poniendo $x = nc = 2014$ en $xP(x-c) = (x-2014)P(x)$
resulta que $P((n-1)c) = 0$. Poniendo ahora $x = (n-1)c$ resulta $P((n-2)c) = 0$, y asi sucesivamente se llega a que $P((n-1)c) = P((n-2)c) = \cdots = P(2c) = P(c) = P(0) = 0$.

Por lo tanto $P(x) = bx(x-c)(x-2c)\ldots(x-(n-1)c)$ para alguna constante b. Poniendo $x = 2014$ se tiene $1 = P(2014) = P(nc) = bnc(n-1)c(n-2)c\ldots 2c.c = bc^n n!$.

Luego hay 8 soluciones de la forma: $P(x) = \frac{1}{c^n n!}\quad x(x-c)(x-2c)\ldots(x-(n-1)c)$,
Para $n \in \{1,2,19,38,53,106,1007,2014\}$ y $c = 2014/n$. Por ejemplo para $n = 1$ se tiene $\frac{1}{2014}x$, para $n = 2$ se tiene $\frac{1}{2\cdot 1007^2}x(x-1007)$, etc.

Problema 3.

Sobre una circunferencia se marcan 2014 puntos. Sobre cada uno de los $\binom{2014}{2}$ segmentos cuyos extremos son dos de los 2014 puntos, se escribe un número real no negativo. Se sabe que para cualquier polígono convexo cuyos vértices son algunos de los 2014 puntos, la suma de los números escritos en sus lados es menor o igual a 1. Determine el máximo valor posible de la suma de todos los números escritos.

Solución:

Resolveremos el problema para 2n puntos, suponiendo sin pérdida de generalidad que estos puntos forman un 2n-gono regular. La respuesta es $n^2/2$. Primero daremos un ejemplo con esta suma, y luego probaremos que ella no puede ser sobrepasada.

Ejemplo: sobre los segmentos que unen puntos consecutivos de la circunferencia, escribimos 1/2n. Sobre los segmentos que unen puntos a "distancia" de 2 arcos, escribimos 2/2n. En general, sobre los segmentos que unen puntos a "distancia" de $k \le n$ arcos, escribimos k/2n.Como para $k < n$ hay 2n segmentos con extremos a distancia k arcos, y para $k = n$ hay solo n de esos segmentos (los diámetros), la suma total será:

$$2\mathrm{n}\left(\frac{1}{2n} + \frac{2}{2n} + \cdots + \frac{n-1}{2n}\right) + \mathrm{n}\,\frac{n}{2n} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$$

Para este ejemplo se cumple que la suma de los números escritos en los lados de cualquier polígono convexo cuyos vértices sean algunos de los 2014 puntos es menos o igual que 1. En efecto, numeraremos los puntos de 1 a 2014 en sentido anti horario y supongamos que los vértices del polígono son los puntos $i_1, i_2, \ldots\ldots, i_k, con\ 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le 2n$. Si todos los arcos orientados de $i_r\ a\ i_{r+1}$ y el de $i_k\ a\ i_1$ son menores o iguales que una semicircunferencia, la suma será: $\frac{i_{2-i_1}}{2n} + \frac{i_{3-i_2}}{2n} + \cdots + \frac{i_{k-i_{k-1}}}{2n} + \frac{2n-(i_1-i_k)}{2n} = \frac{2n}{2n} = 1$

Si uno de los arcos es mayor que una semicircunferencia, suponiendo sin pérdida de generalidad que sea el que va de i_k a i_1 (es decir q $i_k - i_1 < n$), entonces la suma será:

$$\frac{i_2 - i_1}{2_n} + \frac{i_3 - i_2}{2_n} + \cdots + \frac{i_k - i_{k-1}}{2_n} + \frac{i_k - i_1}{2_n} = \frac{2(i_k - i_1)}{2_n} = \frac{i_k - i_1}{n} < \frac{n}{n} = 1.$$

Probemos ahora que la suma de S no puede superar a 1. Sea S_1 la suma de los números correspondientes a diámetros. Considere la suma sobre todos los lados de todos los rectángulos con vértices en los 2_n puntos. Cada segmento que no es diámetro es lado de exactamente un rectángulo. Por otro lado, como cada rectángulo queda determinado por sus diagonales no ordenadas, que son diámetros, hay $\binom{n}{2}$ rectángulos. Por lo tanto:

$$S - S1 \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Ahora considere la suma sobre todos los triángulos rectángulos con vértices en los 2_n puntos. Cada lado no es diámetro es lado de exactamente 2 de esos triángulos, mientras que cada diámetro es lado de exactamente $2n - 2$ de esos triángulos. Por otro lado, hay exactamente $n(2n-2)$ triángulos rectángulos (pues cada uno de ellos queda determinado por un diámetro y un vértice no perteneciente al diámetro).

Por lo tanto $2(S - S1) + (2n-2)S1 \leq n(2n-2)$, es decir que $2S + (2n-4)S1 \leq n(2n-2)$

Ahora, si se multiplica (1) por $2n - 4$ y se suma a (2), resulta: $(2n-2)S \leq \frac{n(n-1)(2n-4)}{2} + n(2n-2)$, de donde $S \leq n^2/2$.

Problema 4

Se tienen N monedas, de las cuales $N - 1$ son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente de las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos sin pesas, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Si en el proceso de pesadas uno puede deducir que cierta moneda es auténtica, entonces esta moneda se separa y no se puede usar en las subsiguientes pesadas. Hallar todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee).

Solución:

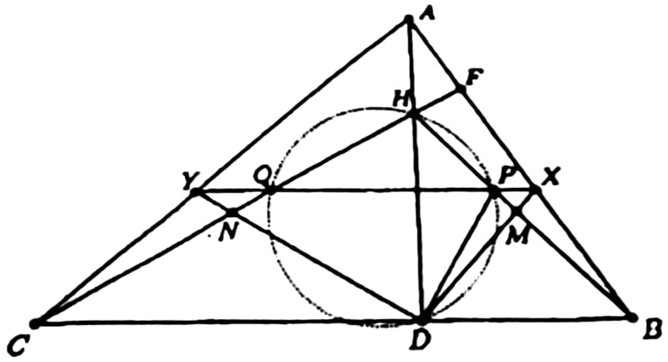
Es claro que ni $N = 1$ ni $N = 2$ son admisibles. Tampoco lo es $N = 3$, pues la única manera de proceder es comparar dos monedas, una en cada plato: si hay equilibrio, las dos son auténticas y no se pueden usar más. Luego la tercera moneda es falsa pero no se puede decidir si es más pesada o más liviana que las auténticas. De modo que, en general no se puede lograr el objetivo. Una inducción simple nos permite concluir lo mismo para todo N impar. Ya hemos vistos los casos base $N = 1$ y $N = 3$; supongamos que los impares menores que $2k + 1$ no son admisibles. Dada $2k + 1$ monedas, la primera pesada debe involucrar m monedas en cada plato $(1 \leq m \leq k)$, en total 2m monedas. Si el resultado es de equilibrio, entonces esas 2m monedas son autenticas y deben ignorarse en las siguientes pesadas. Entonces la tarea se reduce al caso $2(k - m) + 1$, que no es admisible por hipótesis inductiva. Veamos ahora que todo $N \geq 4$ par es admisible. De nuevo procedemos por inducción, con casos bases $N = 4$ y $N = 6$ y paso inductivo $2k \to 2k + 4$. Para $N = 4$ comenzamos comprando las monedas 1 y 2 con las 3 y 4. No puede haber equilibrio, de modo que todas las monedas se pueden volver a usar. Supongamos que el grupo 1, 2 es más liviano que el 3 y 4. Entonces la falsa está entre 1 y 2 si es más liviana, y entre 3 y 4 si es más pesada. Comparamos 1 y 2. Si hay equilibrio ambas son auténticas (y no se pueden usar de nuevo) y la falsa está entre 3 y 4, y es más pesada que las auténticas. Luego comparamos 3 con 4, que serán de pesos distintos. La más pesada será la más falsa. Si una entre 1 y 2 es más liviana, entonces esa es la falsa (esta tiene que estar entre 1 y 2 en este caso, y por ende, ser la más liviana).

Para N=6 comparamos 1, 2, 3 con 4, 5, 6. No puede haber equilibrio y todas las monedas volver a usarse. Supongamos que el grupo 1, 2, 3 es más liviano que el 4, 5, 6. Entonces falsa está entre 1, 2, 3 (entre 4, 5, 6) si y solo si es más liviana (más pesada). Ahora comparamos 1, 2 con 3, 4. Si hay equilibrio entonces 1, 2, 3, 4 son auténticas (y no se pueden volver a usar). La falsa es 5 o 6, luego es más pesada. De modo que comparamos 5 y 6; una de ellas es más pesada y es la moneda falsa. Supongamos que el grupo 1, 2 es más pesado que el grupo 3, 4. Entonces lo anterior implica que la moneda falsa es 3, y es más liviana. Finalmente, si el grupo 1,2 más liviano que el grupo 3,4, entonces la moneda falsa está entre 1, 2 (y es más liviana) o es 4, y es más pesada. Comparamos 1 y 2. Si son del mismo peso entonces 4 es la falsa y es más pesada; si no; la más liviana entre 1, 2 es falsa.

Para el caso inductivo $2k \to 2k+4$ consideramos $2k+4$ monedas con la propiedad dada, y comparamos 1, 2 con 3, 4. Si hay equilibrio, ignoramos esas cuatro monedas. Se aplica la hipótesis inductiva a las $2k$ monedas restantes y listo. Si en cambio no hay equilibrio, la moneda falsa es una de las cuatro. Como las cuatro se pueden usar de nuevo, la tarea al caso base $N = 4$ que ya hemos analizado.

Problema 5

Sea ABC un triángulo con ortocentro H. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y, respectivamente. Si XY intersectan BH en P y a CH en Q, demuestre que el cuadrilátero HPDQ es cíclico.



Solución:

Aplicando el Teorema de Menelao a los triángulos ACH y ABH con las rectas CH y BH respectivamente, se tiene que $\frac{AY}{YC}\frac{CN}{NH}\frac{HD}{DA} = -1 = \frac{AX}{XB}\frac{BM}{MH}\frac{HD}{DA}$.

Pero $CN = NH$ y $BM = MH$, entonces $\frac{AY}{CY} = \frac{AX}{BX}$

Por lo tanto $XY \parallel BC$.

Sea F la intersección de la recta CH con BC. Por ser AD y CF alturas, se tiene que el cuadrilátero BDHF es cíclico, de esto se obtiene que $\angle AHF = \angle ABD$.

Como es M es punto medio de la hipotenusa del triángulo HBD entonces M es un circuncentro, por lo tanto $\angle PBD = \angle XDB$. De esto se sigue que PXBD es un trapecio isósceles, por lo tanto $\angle XBD = \angle PDB$. Entonces $\angle HQP = \angle HCD = 90° - \angle CHD = 90° - \angle AHF = 90° - \angle ABD = 90° - \angle PDB = \angle HDP$, lo cual implica que el cuadrilátero HPDQ es cíclico.

Problema 6

Sea n un número entero positivo y $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ una función tal que $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \epsilon \{1, 2, \ldots, n\}$, donde $f^t(k)$ denota la t-ésima iteración de f sobre k. Si $\pi(m)$ denota la cantidad de primos positivos menores o iguales que m, demostrar que:

a) f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

b) Existe f con a lo sumo $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 2$ puntos fijos.

Solución:

a) Primero probaremos que f es biyectiva. En efecto, es claro que f es sobre, y como f va de un conjunto finito en sí mismo, esto implica que es biyectiva
(Alternativamente: $f(a) = f(b) \to a = f^{f(a)}(a) = f^{f(b)}(a) = f^{f(b)}(b) = b,\ i.e., f$ es inyectiva).

Así podemos considerar al conjunto $\{1,2, \ldots, n\}$ como una unión disjunta de ciclos de la forma $(a_1, a_2 \ldots, a_k)$, donde $f(a_i) = a_{i+1}$ tomando los índices modulo k, es decir $f(a_i) = a_{i+1}$ para $i = 1,2, \ldots, k-1$ y $f(a_k) = a_1$. Para cada uno de estos ciclos $(a_1, a_2 \ldots, a_k)$, si tomamos cualquier elemento a_i tenemos que $a_i = f^{f(a_i)}(a_i)$, entonces $f(a_i)$ debe ser múltiplo de k para todo i, de donde k divide a $a_i = f(a_{i-1})$ para todo i. Ahora bien, si p es primo y $\sqrt{n} < p \leq n$, p pertenece a algún ciclo $(a_1, a_2 \ldots, a_k)$, Se sigue que k divide a p, de modo que $k = 1$ o $k = p$ entonces p divide a $a_1, a_2 \ldots, a_k$, pero esto es imposible pues como $\sqrt{n} < p$ se tiene $n < p^2$ y no hay p múltiplos distintos de p entre 1 y n. Luego $k = 1$, es decir, p es un punto fijo de f. Esto nos da $\pi(n) - \pi(\sqrt{n})$ puntos fijos. Por otra parte, sea a tal que $f(a) = 1$. Luego $a = f^{f(a)}(a) = f(a) = 1$, es decir que 1 también es un punto fijo. Así f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

b) Supongamos que se tiene una partición de $\{1,2, \ldots, n\}$ en conjuntos disjuntos $c_1, c_2, \ldots, c_s$; tales que si $k_i = |c_i|$ entonces $k_i | x$ para todos $x \epsilon c_i$. Si $c_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,k_i}\}$, definamos $f(a_{i,j}) = a_{i,j+1}$ para $j = 1, 2, \ldots, k_i - 1$ y $f(a_i, k_i) = a_{i,1}$. Esta función cumple la condición $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \epsilon \{1,2, \ldots, n\}$. Entonces para probar la parte (b) basta hallar la partición $c_1, c_2, \ldots, c_s$ de modo que a lo sumo $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 2$ de los c_i tengan un solo elemento.

Haremos la construcción de la siguiente manera: sean $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ los primos menores o iguales que $\sqrt{n}$. Tomemos a p_k y si $p_k > 2$, consideremos todos los múltiplos de p_k entre 1 y n y los ponemos en conjuntos de a p_k números, tomando los p_k mayores múltiplos primero, después los siguientes p_k múltiplos más grandes, y siguiendo así, hasta que nos queden a lo sumo $p_k - 1$ números sobrantes. Si no queda ninguno nos detenemos, y si no, sean $p_k, 2p_k, \ldots, mp_k$ los múltiplos restantes, con $m \leq p_k - 1$. Como $p_k \leq \sqrt{n}$, se tiene $p_k^2 \leq n$, lo cual asegura haber agrupado al menos p_k números. Ahora intercambiamos p_k por el $p_k(p_k + 1)$, que debe estar en algún conjunto (pues si $p_k(p_k + 1) > n$ entonces habría solo p_k múltiplos de p_k y nos habríamos detenido). Entonces nos sobran a lo sumo los múltiplos $2p_k, \ldots (p_k - 1)p_k$ y el $p_k(p_k + 1)$. Nos detenemos. En general, tras haber hecho esto para el primo p_{i+1}, tomamos el siguiente primo p_i, y si $p_i > 2$ consideramos sus múltiplos que quedan entre 1 y n. Notemos que quedan al menos los múltiplos $p_i, 2p_i, \ldots p_i^2$, pues ninguno ha sido removido antes (ya que todos sus divisores primos son a lo sumo p_i). Por lo tanto podemos agruparlos desde el más grande al más chico en por lo menos un conjunto de p_i números, hasta que no quede ninguno o bien a lo sumo p_i-1 de

Problema 6

Sea n un número entero positivo y $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ una función tal que $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, donde $f^t(k)$ denota la t-ésima iteración de f sobre k. Si $\pi(m)$ denota la cantidad de primos positivos menores o iguales que m, demostrar que:

a) f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

b) Existe f con a lo sumo $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 2$ puntos fijos.

Solución:

a) Primero probaremos que f es biyectiva. En efecto, es claro que f es sobre, y como f va de un conjunto finito en sí mismo, esto implica que es biyectiva (Alternativamente: $f(a) = f(b) \to a = f^{f(a)}(a) = f^{f(b)}(a) = f^{f(b)}(b) = b,\ i.e., f$ es inyectiva).

Así podemos considerar al conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ como una unión disjunta de ciclos de la forma $(a_1, a_2 \ldots, a_k)$, donde $f(a_i) = a_{i+1}$ tomando los índices modulo k, es decir $f(a_i) = a_{i+1}$ para $i = 1,2,\ldots,k-1$ y $f(a_k) = a_1$. Para cada uno de estos ciclos $(a_1, a_2 \ldots, a_k)$, si tomamos cualquier elemento a_i tenemos que $a_i = f^{f(a_i)}(a_i)$, entonces $f(a_i)$ debe ser múltiplo de k para todo i, de donde k divide a $a_i = f(a_{i-1})$ para todo i. Ahora bien, si p es primo y $\sqrt{n} < p \leq n$, p pertenece a algún ciclo $(a_1, a_2 \ldots, a_k)$, Se sigue que k divide a p, de modo que $k = 1$ o $k = p$ entonces p divide a $a_1, a_2 \ldots, a_k$, pero esto es imposible pues como $\sqrt{n} < p$ se tiene $n < p^2$ y no hay p múltiplos distintos de p entre 1 y n. Luego $k = 1$, es decir, p es un punto fijo de f. Esto nos da $\pi(n) - \pi(\sqrt{n})$ puntos fijos. Por otra parte, sea a tal que $f(a) = 1$. Luego $a = f^{f(a)}(a) = f(a) = 1$, es decir que 1 también es un punto fijo. Así f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

b) Supongamos que se tiene una partición de $\{1,2,\ldots,n\}$ en conjuntos disjuntos $c_1, c_2, \ldots, c_s$; tales que si $k_i = |c_i|$ entonces $k_i | x$ para todos $x \in c_i$. Si $c_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,k_i}\}$, definamos $f(a_{i,j}) = a_{i,j+1}$ para $j = 1, 2, \ldots, k_i - 1$ y $f(a_i, k_i) = a_{i,1}$. Esta función cumple la condición $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Entonces para probar la parte (b) basta hallar la partición $c_1, c_2, \ldots, c_s$ de modo que a lo sumo $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 2$ de los c_i tengan un solo elemento.

Haremos la construcción de la siguiente manera: sean $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ los primos menores o iguales que $\sqrt{n}$. Tomemos a p_k y si $p_k > 2$, consideremos todos los múltiplos de p_k entre 1 y n y los ponemos en conjuntos de a p_k números, tomando los p_k mayores múltiplos primero, después los siguientes p_k múltiplos más grandes, y siguiendo así, hasta que nos queden a lo sumo $p_k - 1$ números sobrantes. Si no queda ninguno nos detenemos, y si no, sean $p_k, 2p_k, \ldots, mp_k$ los múltiplos restantes, con $m \leq p_k - 1$. Como $p_k \leq \sqrt{n}$, se tiene $p_k{}^2 \leq n$, lo cual asegura haber agrupado al menos p_k números. Ahora intercambiamos p_k por el $p_k(p_k + 1)$, que debe estar en algún conjunto (pues si $p_k(p_k + 1) > n$ entonces habría solo p_k múltiplos de p_k y nos habríamos detenido). Entonces nos sobran a lo sumo los múltiplos $2p_k, \ldots (p_k - 1)p_k$ y el $p_k(p_k + 1)$. Nos detenemos. En general, tras haber hecho esto para el primo p_{i+1}, tomamos el siguiente primo p_i, y si $p_i > 2$ consideramos sus múltiplos que quedan entre 1 y n. Notemos que quedan al menos los múltiplos $p_i, 2p_i, \ldots p_i{}^2$, pues ninguno ha sido removido antes (ya que todos sus divisores primos son a lo sumo p_i). Por lo tanto podemos agruparlos desde el más grande al más chico en por lo menos un conjunto de p_i números, hasta que no quede ninguno o bien a lo sumo p_i-1 de ellos, que serán de la forma $p_i, 2p_i, \dots, mp_i$ para algún $m \leq p_i - 1$. En tal caso, tomamos a p_i y lo intercambiamos por el $p_i(p_i + 1)$, que debe estar en algún conjunto pues $p_i(p_i + 1) \leq (p_{i+1} - 2)(p_{i+1} - 1) < {p_{i+1}}^2 \leq n$).

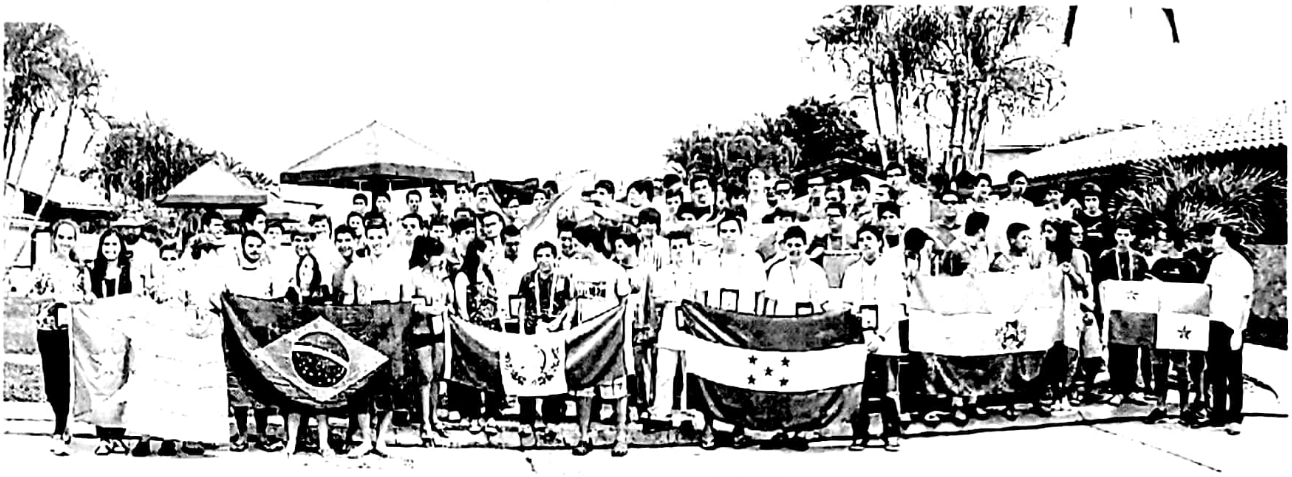
Notemos que $p_i(p_i + 1)$no ha sido removido durante los pasos para p_j con $j > i$, por ser $p_i > 2$, lo que implica que p_j no divide a $p_i(p_i + 1)$. Así nos quedan a lo sumo los múltiplos $2p_i, \dots, (p_i - 1)p_i$ y el $p_i(p_i + 1)$, y nos detenemos. De esta manera nos quedara finalmente el primo $p_1 = 2$. Para este, agrupamos de a 2 todos los números pares que queden, menos a lo sumo 1. Tras este paso, miremos que números quedan sin agrupar (los números ya agrupados forman conjuntos como los que nos interesan). Sea m un entero positivo entre 2 y n inclusive, y p su menor divisor primo. Si $p \geq 3$ y m es compuesto, sea $m = pk$. Luego $k \geq p$, y entonces m habrá sido agrupado al cabo del paso del primo p (notar que $k \neq p + 1$ por la minimalidad de p, que nos dice que m es impar).

De los números pares, hay a lo sumo uno sin agrupar. Finalmente, los números que no son de estas formas son el 1 y los m que tienen su menor divisor primo p mayor que $\sqrt{n}$, en cuyo caso es evidente que $m = p$; estos números son entonces los primos p con $\sqrt{n} < p \leq n$. De esta manera nos quedan sin agrupar a lo sumo $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 2$ números, que ponemos en conjunto de a un elemento, y listo.

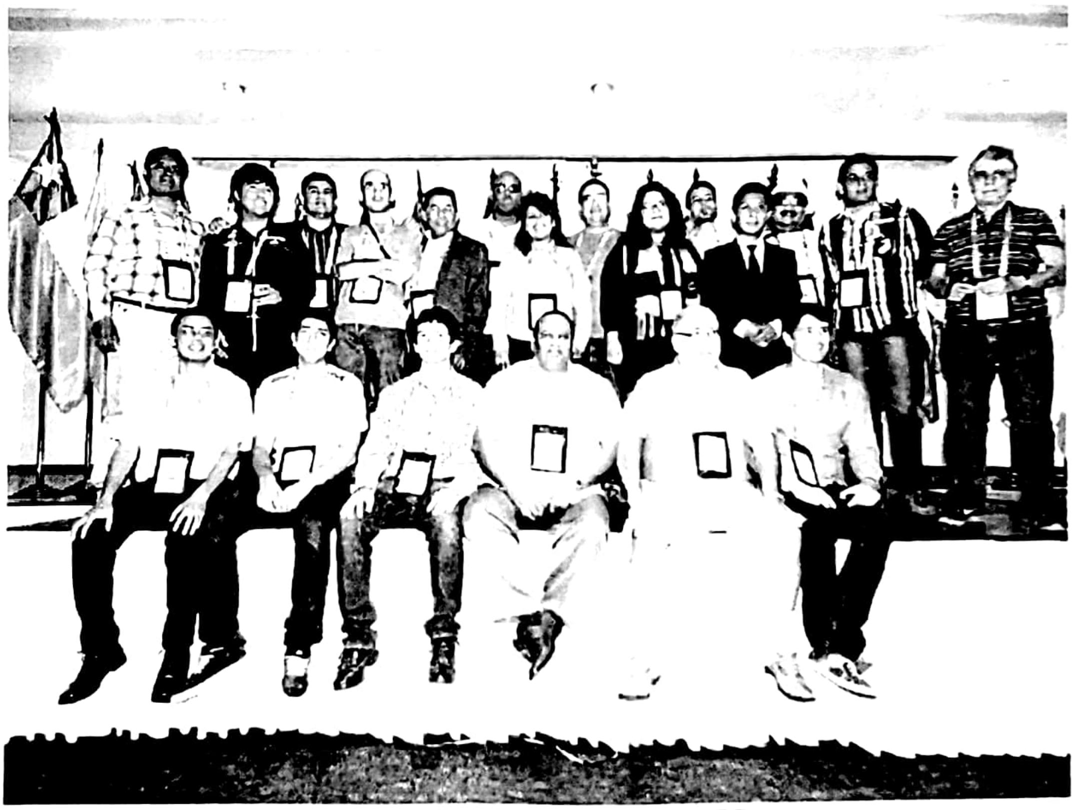
ANEXOS

AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

DELEGACION DE HONDURAS

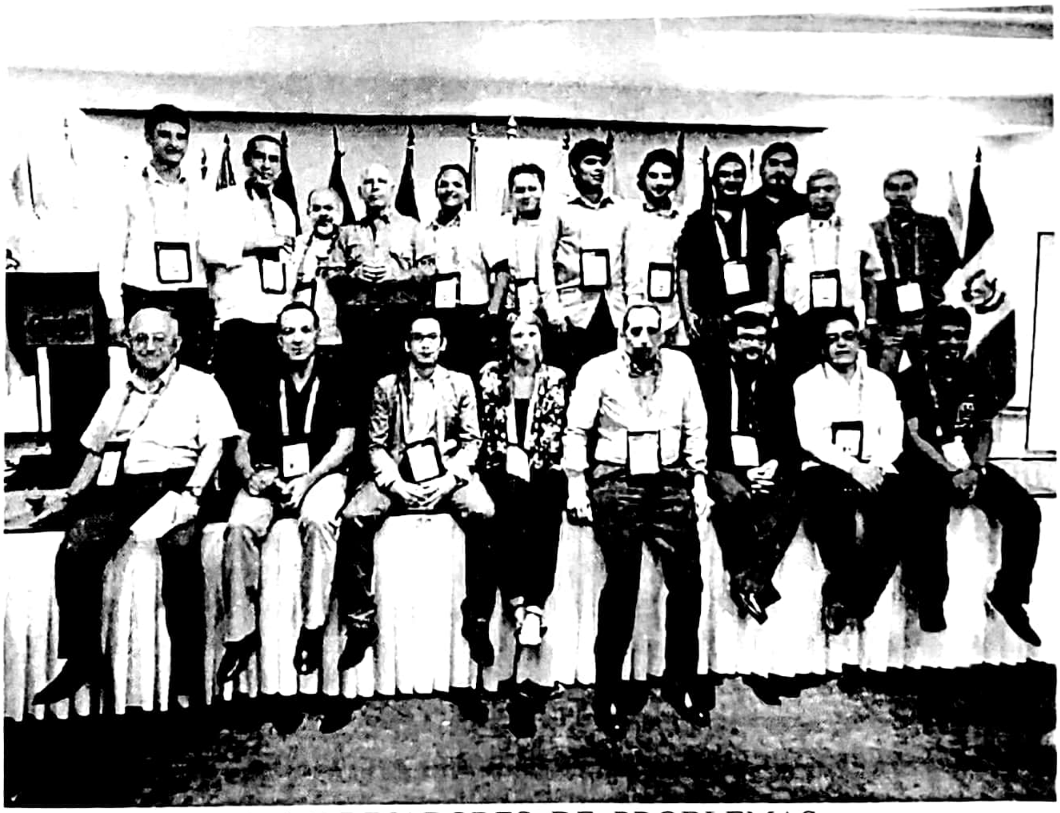


ESTUDIANTES PARTICIPANTES



JEFES DE DELEGACIONES

TUTORES



COORDINADORES DE PROBLEMAS

GUIAS Y EQUIPO DE APOYO

AMIGOS PARA SIEMPRE

DÍA 1

San Pedro Sula, 23 de septiembre de 2014

Problema 1.

Para cada entero positivo n, se define $s(n)$ como la suma de los dígitos de n. Determine el menor entero positivo k tal que

$$s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k).$$

Problema 2.

Halle todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que $P(2014) = 1$ y, para algún entero c, se cumple que

$$xP(x-c) = (x-2014)P(x).$$

Problema 3.

Sobre una circunferencia se marcan 2014 puntos. Sobre cada uno de los segmentos cuyos extremos son dos de los 2014 puntos, se escribe un número real no negativo. Se sabe que para cualquier polígono convexo cuyos vértices son algunos de los 2014 puntos, la suma de los números escritos en sus lados es menor o igual que 1. Determine el máximo valor posible de la suma de todos los números escritos.

Duración de la prueba: 4 horas y media.
Valor de cada problema: 7 puntos.

DÍA 2

San Pedro Sula, 24 de septiembre de 2014

Problema 4.
Se tienen N monedas, de las cuales $N-1$ son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente de las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Cada vez que se pueda deducir que una o varias monedas son auténticas, entonces todas estas monedas se separan inmediatamente y no se pueden usar en las siguientes pesadas. Determine todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee.)

Problema 5.
Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de sus alturas. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y, respectivamente. Si XY intersecta a BH en P y a CH en Q, demuestre que H, P, D y Q están en una misma circunferencia.

Problema 6.
Dado un conjunto X y una función $f : X \to X$, denotamos, para cada $x \in X$, $f^1(x) = f(x)$ y, para cada $j \geq 1$, $f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Decimos que $a \in X$ es un punto fijo de f si $f(a) = a$. Para cada número real x, definimos $\pi(x)$ como la cantidad de primos positivos menores o iguales que x.
Dado un número entero positivo n, decimos que $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ es *catracha* si $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Pruebe que:
a) Si f es catracha, entonces f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.
b) Si $n \geq 36$, existe una función catracha con exactamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

Duración de la prueba: 4 horas y media.
Valor de cada problema: 7 puntos.