SOLUCION DE LOS EXAMENES DE LA XII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMATICAS

Carmen Benítez, Carmen Cartagena, Marco Valladares, Emilio Calderón, Besser Henríquez, Omar, Víctor Cartagena, Ricardo Gallardo , Daniel Pineda

En este artículo se dan a conocer la solución de los tres exámenes de la XII Olimpiada Nacional de Matemáticas celebrada en la Ciudad de Tela.

SOLUCION NIVEL I

Problema 1

Dada la lista formada por los enteros positivos que utilizan exclusivamente los dígitos 0, 1, 2. ¿Qué número ocupa la posición número 83 al ordenarlos de menor a mayor?

Solución:

Evidentemente se iniciarán con los posibles números de 3 cifras que se pueden formar con estos dígitos, estos son:

102, 120, 201, 210. No existe otro número positivo de 3 cifras con esos 3 dígitos.

Ahora los números de 4 cifras, abcd, donde a = 1; fijando b = 0, se tiene que las posibles permutaciones de las cifras c, d, eligiéndolas del conjunto $\{0, 1, 2\}$ serían 6, esto es 01, 10, 02, 20, 12, 21. Ahora como ya se tienen fijas las cifras ab = 10, no se puede tener los números 1001 ni 1010, puesto que no tienen el dígito 2. Lo que elimina 2 de las permutaciones, pero debe agregarse la opción 22, lo que da como resultado un posible de 5 números: 1002, 1012, 1020, 1021, 1022.

Ahora fijando b = 1, como a = b (11), sólo se podrían obtener dos números diferentes, que son las permutaciones 02 y 20, ya que si se incluyen otras el número formado no tendía los 3 dígitos 0,1,2. Con esto resultan los números 1102 y 1120.

Si se fija b = 2 al igual que en el caso en que b = 1, se obtienen 5 números diferentes siguiendo el mismo análisis.

Así se obtiene 12 números diferentes de 4 cifras abcd cuando a = 1.

Fijando a = 2, basado en el mismo análisis anterior se obtienen otros 12 números diferentes de 4 cifras. Con esto se obtienen todos los números de 4 cifras que utilizan los dígitos 0,1,2; obteniendo 24 números.

Ahora los números de 5 cifras, para poder hacer uso del análisis anterior se deberá fijar el número de 5 cifras abcde en sus primeras 3 cifras.

Estos son 100de, 101de, 102de, 110de, 111de, 112de, 120de, 121de, 122de, 200de, 201de, 202de, 210de, 211de, 212de, 220de, 221de, 222de.

Analicemos las expresiones anteriores en que sus primeras 3 cifras sean diferentes, 102de por ejemplo, como ya se han usado los 3 dígitos 0,1,2 no hay restricciones de las permutaciones de "de", lo que da como resultado 6 opciones, agregando las opciones en que d = e, esto es 00, 11, 22; con lo que se obtienen 9 números diferentes para estas expresiones.

Si las expresiones tienen sus 3 cifras iguales, al igual que en el caso de los números de 4 cifras, sólo se obtienen 2 números diferentes, por ejemplo 111de sólo da como resultado 11102 y 11120.

Sabiendo esto, sin importar cuales sean, deduzcamos donde de encontrará en número que ocupa la posición de esta lista:

- 3 cifras: 4 números.
- 4 cifras:
    - 10cd ⇒ 5 números
    - 11cd ⇒ 2 números
    - 12cd ⇒ 5 números
    - 20cd⇒ 5 números
    - 21cd ⇒ 5 números
    - 22cd ⇒ 2 números
- 5 cifras:
    - 100de ⇒ 5 números
    - 101de ⇒ 5 números
    - 102de ⇒ 9 números
    - 110de ⇒ 5 números
    - 111de ⇒ 2 números

- 112de ⇒ 5 números
- 120de ⇒ 9 números
- 221de ⇒ 5 números
- 122de ⇒ 5 números
- 200de ⇒ 5 números

Lo que da como resultado 83 números diferentes que utilizan las cifras 0,1,2 exclusivamente, y el último número que resulta de la expresión 200de es el que buscamos, este es:

20021

Problema 2

Emilia escribió todos los números enteros positivos de cuatro cifras que comienzan con 5 y tienen por lo menos tres dígitos iguales. ¿Cuántos números escribió Emilia?

Solución:

Primero se toman los números de la forma $5aaa$ donde $a \neq 5$

Se tienen así 9 opciones para $a = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ se tienen así 9 números

Ahora los números de la forma $5a55$, se tienen las mismas 9 opciones para

$a = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$así que se forman otros 9 números

Pasamos ahora en los números de la forma $55a5$, aquí a puede ser cualquier dígito, ua que el número 5555 no se ha incluido antes, así $a = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ con los que resultan otros 10 números diferentes.

Sumando la cantidad de números de cada expresión:

$$5aaa, a \neq 5 \rightarrow 9\ números$$

$$5a55, a \neq 5 \rightarrow 9\ números$$

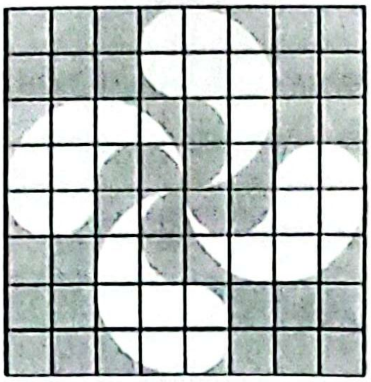
$$55a5 \rightarrow 10\ números$$

Obteniendo así 28 números.

Entonces Emilia escribió 28 números.

Problema 3

Dino diseña su ciudad en una cuadrícula de 8x8, obteniendo la figura que se muestra. Sabiendo que los trazos curvos son semicircunferencias. ¿Cuál es el área coloreada en gris?



El área total es $A_t = 8x8 = 64u^2$

Como los trazos curvos son semicircunferencias y se tienen que 4 de ellas el área de los trazos curvos es:

$$A_1 = \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2$$

Se observa claramente en la figura que el radio "r" de cualquiera de las semicircunferencias es igual a *2*así se obtiene:

$$A_1 = 2\pi r^2 = 2\pi(2)^2 = 2\pi(4) = 8\pi u^2$$

Sea A_2 el área de color gris

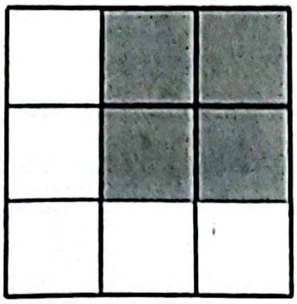
$$A_t = A_1 + A_2 \rightarrow A_2 = A_t - A_1$$

$$\rightarrow A_2 = 64u^2 - 8\pi u^2 = 8(8-\pi)\, u^2$$

El área coloreada en gris es $8(8-\pi)\, u^2$

Problema 4

Si la suma de los perímetros de todos los cuadrados que se pueden formar en la siguiente figura es 480cm ¿cuánto mide el área de la región sombreada?



Sea L la longitud de un lado cualquiera de los cuadrados pequeños.

- Se tienen 9 cuadrados de $1x1$ con perímetro $p = 4L$
- Se tienen 4 cuadrados de $2x2$ con perímetro $p = 4(2L) = 8L$
- Se tiene 1 cuadrado de $3x3$ con perímetro $p = 4(3L) = 12L$

Ahora:

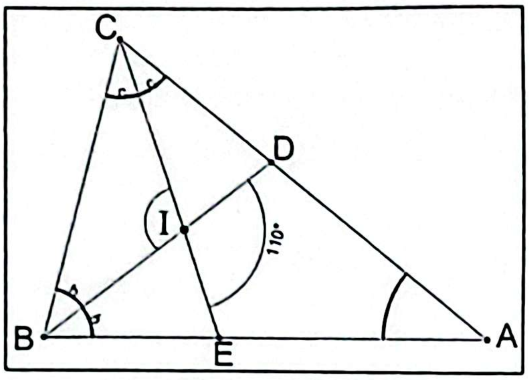
$$9(4L) = 36L \ ; \ 4(8L) = 32L$$
$$36L + 32L + 12L = 480cm$$
$$80L = 480cm$$
$$L = \frac{480}{80}\,cm$$
$$L = 6\,cm$$

Sabiendo que L = 6 cm el área del cuadrado de 2x2 es gris es:

A = $2L^2 = (2 \cdot 6\,cm)^2 = (12cm)^2 = 144\,cm^2$

Problema 5

Sea ABC un triángulo. La bisectriz del ángulo $< B$ corta al lado AC en D y la bisectriz del angulo < C corta al lado AB en E. Sea I el punto en que se cortan esos dos bisectrices si < EID = 110, Calcular la medida del ángulo < A.



$En \, \Delta \, bcI \ \rightarrow \ b + c + I = 180^{\circ}$, y como I es opuesto por el vértice a < EID

$I = 110^{\circ} \ \rightarrow b + c + 110^{\circ} = 180^{\circ} \ \rightarrow b + c = 180^{\circ} - 110^{\circ}$

$\rightarrow b + c = 70^{\circ} \quad \rightarrow b = 70^{\circ} - c$

En $\Delta \, ABC \ \rightarrow \ 2b + 2c + A = 180^{\circ}$ sustituyendo b:

$2(70 - c) + 2c + A = 180^{\circ}$

$140 - 2c + 2c + A = 180^{\circ}$

$A = 180^{\circ} - 140$

$A = 40^{\circ}$

SOLUCION NIVEL II

Problema 1

¿De cuantas maneras se pueden escoger tres números enteros positivos distintos, menores a 11 de tal forma que la suma sea divisible por 3?

Solución:

Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Por el algoritmo de la división,

$$n = 3q + R, \qquad n \in A \rightarrow R \in \{0,1,2\}$$

Dado que la suma de dos o varios números es divisible por 3 si y solo si la suma de sus residuos es igual a un múltiplo de 3. Sean R_0, R_1, R_2 los conjuntos de las clases residuales de 3 en el conjunto A.

Entonces,

$$R_0 = \{3,6,9\}$$

$$R_1 = \{1,4,7,10\}$$

$$R_2 = \{2,5,8\}$$

Ahora las únicas combinaciones para sumar los residuos de tal forma que sean divisible por 3 son:

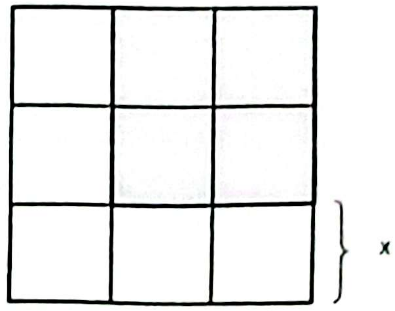
a. $0 + 0 + 0 = 0$
b. $1 + 1 + 1 = 3$
c. $2 + 2 + 2 = 6$
d. $0 + 1 + 2 = 3$

→ $De\ (a.),\ 3C3 = 1$
→ $De\ (b.)\ 4C3 = 4$
→ $De\ (c.)\ 3C3 = 1$
→ $De\ (d.)$ para este caso se sabe que se tomara un elemento de cada conjunto, entonces haciendo uso de permutaciones $3x4x3 = 36$
→ $Total = 1 + 4 + 1 + 36 = 42$

∴Hay 42 formas de escoger al azar tres números menores que 11 que la suma de ellos sea divisible entre 3.

Problema 2

Si la suma de los perímetros de todos los cuadrados que se pueden formar en la siguiente figura es 480 cm, ¿Cuánto mide el área de la región sombrada?



Solución:

Sea "x" la medida del lado de cuadrado más pequeño formado en la figura. Además, observemos que en la figura hay

- 9 cuadrados de lado x donde el perímetro de cada uno es $4x$
- 4 cuadrados de 4 cuadrados de lado x, entonces la medida de cada lado de este tipo de cuadrado es $2x$ y el perímetro es igual a $8x$
- 1 cuadrado de 9 cuadrados de lado x, por consiguiente la medida de cada lado de este cuadrado es de $3x$ y el perímetro es igual a $12x$.

Si sumamos los perímetros de los 14 cuadrados formados en esta figura se tiene que:

$$9 \times 4x + 4 \times 8x + 12x = 480$$

$$80x = 480$$

$$x = 6$$

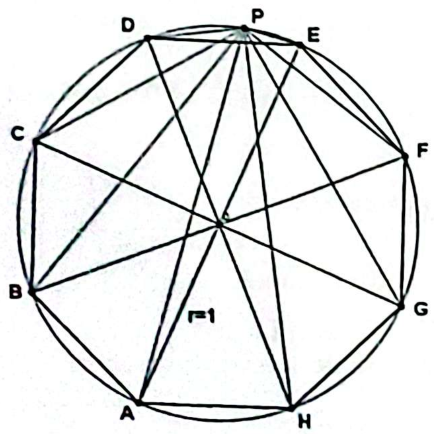
Entonces, cada lado del cuadrado sombrado es igual a $2x = 2(6) = 12\ cm$.

$\therefore$ Por lo tanto el área del cuadrado sombreado es $Area = 12^2 = 144\ cm^2$

Problema 3

Dado el octágono regular $ABCDEFGH$ inscrito en una circunferencia de radio uno. Sea P un punto arbitrario de esa circunferencia distinto a los vértices del octágono.

Calcule el valor de $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \cdots + \overline{PH}^2$



Solución:

Dado que $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = 2r = 2$, entonces $\angle APE = \angle BPF = \angle CPG = \angle DPH = \frac{180°}{2} = 90°$. Por consiguiente, se concluye que los ΔAPE, ΔBPF, ΔCPG, ΔDPH son triángulos rectángulos.

Por el Teorema de Pitágoras se deducen las siguientes ecuaciones:

En .

En $\Delta BPF, \overline{PB}^2 + \overline{PF}^2 = 4$

En $\Delta CPG, \overline{PC}^2 + \overline{PG}^2 = 4$

En $\Delta DPH, \overline{PD}^2 + \overline{PH}^2 = 4$

Por la propiedad cancelativa se obtiene que:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PF}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PG}^2 + \overline{PD}^2 + \overline{PH}^2 = 4 + 4 + 4 + 4$$

$$\therefore \quad \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2 + \overline{PG}^2 + \overline{PH}^2 = 16$$

Problema 4

S i a y b son números reales tales que

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = 900 \ldots(1)$$

$$a^2 + ab + b^2 = 45 \ldots(2)$$

¿Cuál es el valor de $(2a - 2b)^2$

Solución:

Si resolvemos el producto notable obtenemos:

$$(2a - 2b)^2 = 4a^2 - 8ab + 4b^2$$

$$= 4(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= 4(a^2 + ab + b^2 - 3ab)$$

$= 4(45 - 3 \times ab)$ ... (i)

Por lo que es necesario conocer cuál es el valor para ab. Partiendo a partir de la segunda ecuación (2) dada y realizando procesos algebraicos.

$$(a^2 + ab + b^2)^2 = 45^2$$

$\rightarrow\ a^4 + a^3b + a^2b^2 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = 2025$

$\rightarrow\ (a^4 + a^2b^2 + b^4) + 2a^3b + 2b^2 + 2ab^3 = 2025$

$\rightarrow\ 900 + 2a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^3 = 2025$

$\rightarrow\ 2ab(a^2 + ab + b^2) = 1125$

$\rightarrow\ 2ab(45) = 1125$

$\rightarrow\ 2ab = 25$

$\rightarrow\ ab = \frac{25}{2}$

Sustituyendo el valor de ab en la parte (i)...

$$(2a - 2b)^2 = 4(45 - 3 \times \frac{25}{2})$$

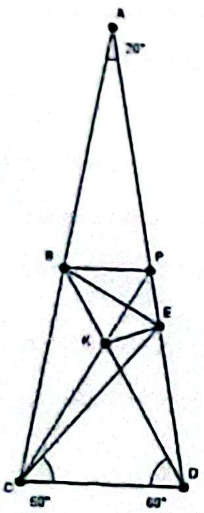
$$\therefore (2a - 2b)^2 = 30$$

Problema 5

Sea ADC un triangulo isósceles con AC=AD y $\measuredangle A = 20°$. Sean B y E los puntos sobre AC y AD respectivamente, tales que $\angle ECD = 50°$ y $\angle BDC = 60°$. ¿Cuál es la medida del $\angle CEB$?

Solución:

Se traza $BP \parallel CD$ $t.q.$ $P \in \overline{AD} \rightarrow BCDP$ es un trapecio isósceles $\rightarrow BCDP$ es cíclico y por consiguiente $\angle PCB = \angle BDP = 80° - \angle BDC = 20°$. Además, por ángulos alternos internos $\angle PBD = \angle BDC = 60°$ y $\angle BPC = \angle PCD = 60°$



Sea $\overline{CP} \cap \overline{BD} = K \rightarrow \angle KCD = \angle PCD = 60° \rightarrow \Delta KCD$ es equilátero $\rightarrow \overline{CK} = \overline{CD} = \overline{DK}$, además por ángulos opuestos por el vértice $\angle BKP = \angle CKD = 60° \rightarrow \Delta\ BKP$ es equilátero

$\rightarrow \overline{BK} = \overline{BP} = \overline{KP}$. Dado que $\angle CED = 50°$ y por hipótesis $\angle ECD = 50°$ entonces ΔCDE es isósceles $\rightarrow \overline{CD} = \overline{DE}$, por transitividad, se obtiene que $\Delta\ DKE$ es isósceles.

$\rightarrow \angle EKD = \angle KED = 80° \rightarrow \angle PKE = 40°, pero\ \angle KPE = \angle CPD = 40° \rightarrow \Delta\ KEP$ es isósceles.

Dado que ΔBKP y ΔKEP son isósceles y comparten un lado en común ($\overline{KP}$) entonces su unión $BKEP$ es un cuadrilátero "deltoide ó cometa" $\rightarrow \overline{BE} \perp \overline{KP}$ y $\overline{BE}$ biseca a $\overline{KP} \rightarrow \angle KBE = 30°$. Como $\angle CBD = 40° \rightarrow \angle CBE = 70°$.

Problema 6

Determine todo

$\therefore$ Por lo tanto, en ΔCBE, $\angle BCE = 80° - ECD° = 30° \rightarrow \angle CEB = 80°$

$$x^4 - xy + 2x - 3y = 2014$$

Solución:

Dado que es una ecuación de dos variables, entonces la estrategia será formar dos ecuaciones lineales a partir de esta y las cuales involucren ambas variables. Realizando procesos algebraicos se tiene:

$$x^2 - xy + 2x - 3y = 2014$$

$$x^2 - xy + 2x - 3y + y = 2014 + y$$

$$x^2 - xy + 2x - 2y = 2014 + y$$

$$x(x + 2) - y(x - 2) = 2014 + y$$

$$(x - y)(x + 2) = 2014 + y$$

$$(x + 2) = \frac{2014 + y}{(x - y)}$$

Sea $p \in Z^+$ entonces por definición de elemento neutro:

$$\frac{p(x + 2)}{p} = \frac{2014 + y}{(x - y)}$$

Igualando los numeradores entre si y los denominadores entre si se obtiene:

- $p(x + 2) = 2014 + y$

  $px - y = 2014 - 2p$ ...(1)

- $x - y = p$...(2)

Restando la ecuación (2) a la ecuación (1)

$$(p - 1)x = 2014 - 3p$$

$$x = \frac{2014 - 3p}{p - 1}$$

Por consiguiente $p - 1$ debe ser un divisor de 2014 y de $3p$.

$D_{2014} = \{1,2,19,38,53,106,1007,2014\}$. Además, se sabe que $\frac{impar}{par}$ y $\frac{par}{impar}$ no son números enteros, entoncesel único divisor que cumple para esta igualdad es $p - 1 = 1$

$x = \frac{2014-6}{1} = 2008Yy = 2008 - 2 = 2006$

- ✓ $2008^2 - 2008 \times 2006 + 2 \times 2008 - 3 \times 2006 = 2014$

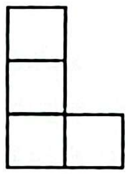
$\therefore$ (2008,2006) es la única solución a la ecuación planteada.

SOLUCION NIVEL III

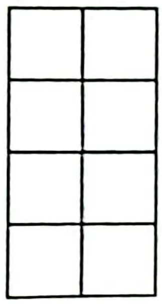
Problema 1: Dada la lista formada por los enteros positivos que utilizan exclusivamente los dígitos 0, 1 y 2. ¿Qué número ocupa la posición 83?

Desarrollamos la sucesión de números que solo tienen los dígitos 0,1 y 2; se tiene: 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222, 1000, ... se puede observar que los números menores que 10 solo son cuatro, los números que están entre 10 y 22 son 5 números, luego estos nueve números están presentes en los elementos siguientes, los números entre 1000 y 2000 son 27, ocurriendo lo mismo con los números mayores o iguales que 2000, así de 0 a 999 hay 27, de 1000 a 1999 otros 27 y lo mismo para los números desde el 2000 hasta el 9,999 hay 27 números dando un total de 81 números. Se vuelve a contar a partir del 10,000 porque no hay números entre 2,222 y 9,999 que cumplan con la condición, de este modo el número en la posición 82 es 10,000 y finalmente el número que ocupa la posición 83 es el 10,001.

Problema 2: ¿Es posible cubrir un tablero de 10x10 con piezas del siguiente estilo sin que se traslapen ni se salgan del tablero?



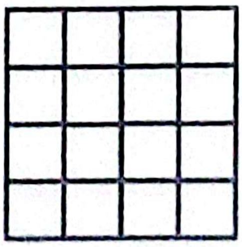
Solución:



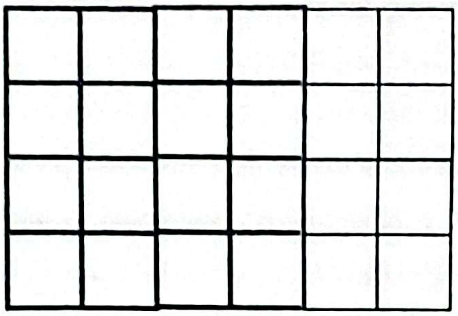
Primero llevamos a cabo varias construcciones:

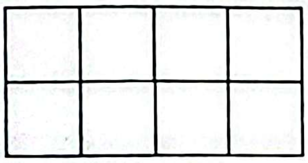
Paso 1: A partir de dos figuras se puede formar un rectángulo de 2x4.

Paso 2: Luego si se juntan dos rectángulos como el anterior se tiene un tablero de 4x4:

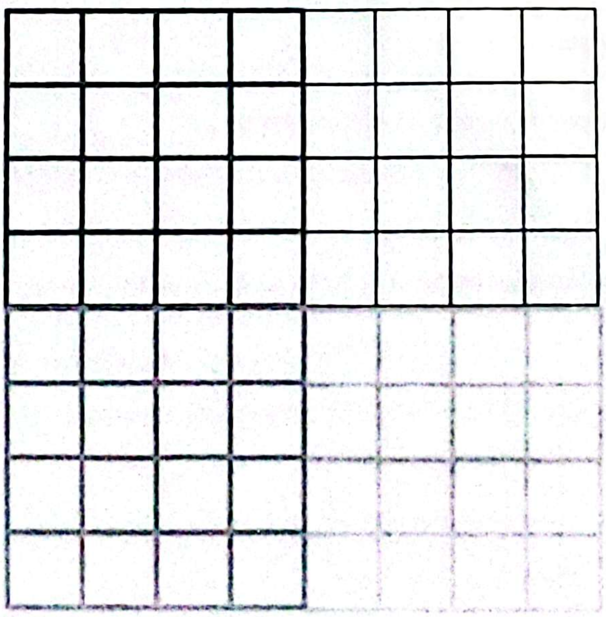


Paso 3: Luego si se anexa otros dos rectángulos, buscando construir un tablero de 6x6 se nota que esto no es posible:

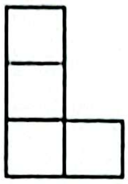




Lo que ocurre en este caso es que no puede formarse un tablero anexando solo dos cuadros a un lado del cuadrado. Por otro lado si al tablero de 4x4 se le agregan cuatro cuadrados por lado si se forma un tablero de 8x8



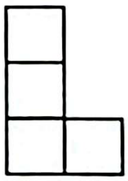
Según el razonamiento hecho en los pasos anteriores, se puede asumir que solo se puede rellenar un tablero de nxn cuando n es múltiplo de cuatro, con figuras de la forma



Ya encontrada una condición para el problema, se debe demostrar que dicha proposición es cierta, para esto haremos uso de la inducción matemática, tomando como n el número de lados que debe tener el tablero.

Paso 1 de inducción: como el tablero debe ser cuadrado el primer caso es cuando es un tablero de 4x4, ya que por la forma de la pieza no puede existir un tablero de menor cantidad de cuadros por lado. Este paso hace referencia a la construcción en el paso 2.

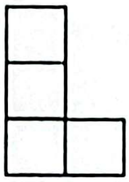
Hipótesis de inducción: Solo se puede rellenar un tablero de k x k cuando k es múltiplo de cuatro, con figuras de la forma



Paso 3: se demostrara que Solo se puede rellenar un tablero de (k+4) x (k+4) cuando k+4 es múltiplo de cuatro, con figuras de la forma.

Por la hipótesis de inducción se sabe que solo se puede rellenar un tablero de kxk cuando k es múltiplo de cuatro, por ende k=4q, para algún q; luego se tiene que los tableros son de la forma (4q+4) x (4q+4), o sea [4(q+1)] x [4(q+1)] de donde es claro que [4(q+1)] es múltiplo de cuatro.

Por tanto: Solo se puede rellenar un tablero de kxk cuando k es múltiplo de cuatro, con figuras de la forma



Por último, un tablero de 10 x 10 no puede ser cubierto por este estilo de piezas sin que se traslapen ni se salgan del tablero, ya que 10 no es múltiplo de 4.

Problema 3. Sea $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Calcule

$$f\left(\frac{1}{1}\right) + f\left(\frac{2}{1}\right) + f\left(\frac{3}{1}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{1}\right)$$

$$+f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$+\cdots + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)$$

Solución:

Se desarrolla la imagen de los valores:

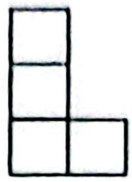
$f\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{4}{5}, f\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{9}{10}, \ldots f\left(\frac{n}{1}\right) = \frac{n^2}{1+n^2},$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}, f\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{13}, \ldots f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{4+n^2},$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{10}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{13}, f\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{1}{2}, \ldots f\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{n^2}{9+n^2},$

Luego desarrollamos la imagen los números de la forma $\frac{n}{n}$, $f\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} = \frac{1^2}{1+1^2} = \frac{1}{2}$, dado este procedimiento se garantiza que $f\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{2}$ para todo n, luego $\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{i}\right) = \frac{n}{2}$, así se tiene una parte de la suma total.

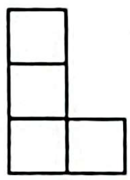
Según el razonamiento hecho en los pasos anteriores, se puede asumir que solo se puede rellenar un tablero de nxn cuando n es múltiplo de cuatro, con figuras de la forma



Ya encontrada una condición para el problema, se debe demostrar que dicha proposición es cierta, para esto haremos uso de la inducción matemática, tomando como n el número de lados que debe tener el tablero.

Paso 1 de inducción: como el tablero debe ser cuadrado el primer caso es cuando es un tablero de 4x4, ya que por la forma de la pieza no puede existir un tablero de menor cantidad de cuadros por lado. Este paso hace referencia a la construcción en el paso 2.

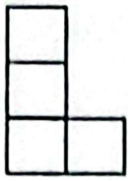
Hipótesis de inducción: Solo se puede rellenar un tablero de k x k cuando k es múltiplo de cuatro, con figuras de la forma



Paso 3: se demostrara que Solo se puede rellenar un tablero de (k+4) x (k+4) cuando k+4 es múltiplo de cuatro, con figuras de la forma.

Por la hipótesis de inducción se sabe que solo se puede rellenar un tablero de kxk cuando k es múltiplo de cuatro, por ende k=4q, para algún q; luego se tiene que los tableros son de la forma (4q+4) x (4q+4), o sea [4(q+1)] x [4(q+1)] de donde es claro que [4(q+1)] es múltiplo de cuatro.

Por tanto: Solo se puede rellenar un tablero de kxk cuando k es múltiplo de cuatro, con figuras de la forma



Por último, un tablero de 10 x 10 no puede ser cubierto por este estilo de piezas sin que se traslapen ni se salgan del tablero, ya que 10 no es múltiplo de 4.

Problema 3. Sea $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Calcule

$$f\left(\frac{1}{1}\right)+f\left(\frac{2}{1}\right)+f\left(\frac{3}{1}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{1}\right)$$

$$+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)$$

Solución:

Se desarrolla la imagen de los valores:

$f\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{2}, f\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{4}{5}, f\left(\frac{3}{1}\right)=\frac{9}{10}, \dots f\left(\frac{n}{1}\right)=\frac{n^2}{1+n^2},$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}, f\left(\frac{2}{2}\right)=\frac{1}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{13}, \dots f\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{n^2}{4+n^2},$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{10}, f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{13}, f\left(\frac{3}{3}\right)=\frac{1}{2}, \dots f\left(\frac{n}{3}\right)=\frac{n^2}{9+n^2},$

Luego desarrollamos la imagen los números de la forma $\frac{n}{n}$, $f\left(\frac{n}{n}\right)=\frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}=\frac{1^2}{1+1^2}=\frac{1}{2}$, dado este procedimiento se garantiza que $f\left(\frac{n}{n}\right)=\frac{1}{2}$ para todo n, luego $\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{i}\right)=\frac{n}{2}$, así se tiene una parte de la suma total.

Ahora bien, observando los casos específicos $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}$ y $f\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{4}{5}$ se ve que $f\left(\frac{2}{1}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, esta parte nos permite generalizar, la suma de las imágenes de dos números recíprocos siempre es una, como se demuestra a continuación:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}}=\frac{1}{n^2+1}$$

Por otra parte: $f(n)=\frac{n^2}{1+n^2}$

Luego al sumar las imágenes anteriores se tiene: $f\left(\frac{1}{n}\right)+f(n)=\frac{1}{n^2+1}+\frac{n^2}{1+n^2}=\frac{1+n^2}{1+n^2}=1$

Como se tienen n filas y n columnas de imágenes, la cantidad de las mismas es de n^2, si se emparejan las imágenes cuando los números son recíprocos entre sí, quedan $\frac{n^2-n}{2}$ parejas (ya que no se cuentan las imágenes de los números de la forma $\frac{n}{n}$); como ya se demostró antes la suma de las parejas de imágenes de recíprocos es siempre 1, por entre la suma de todas la parejas es $\frac{n^2-n}{2}$.

Por ultimo al sumar las dos cantidades encontradas se tiene que:

$$f\left(\frac{1}{1}\right)+f\left(\frac{2}{1}\right)+f\left(\frac{3}{1}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{1}\right)$$

$$+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$+\cdots$$

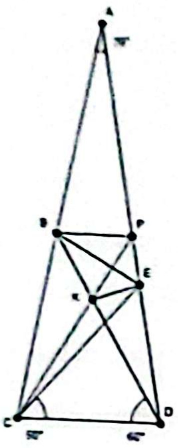
$$+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)=\frac{n^2-n}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}$$

Por tanto

La sumatoria es igual a $\frac{n^2}{2}$.

Problema 5. Sea ADC un triangulo isósceles con AC=AD y $\measuredangle A = 20°$. Sean B y E los puntos sobre AC y AD respectivamente, tales que $\angle ECD = 50°$ y $\angle BDC = 60°$. ¿Cuál es la medida del $\angle CEB$?

Solución:



Se traza $BP \parallel CD$ $t.q.$ $P \in \overline{AD} \rightarrow$ $BCDP$ es un trapecio isósceles $\rightarrow$ $BCDP$ es inscriptible en una circunferencia y por consiguiente $\angle PCB = \angle BDP = 80° - \angle BDC = 20°$. Además, por ángulos alternos internos $\angle PBD = \angle BDC = 60° y \angle BPC = \angle PCD = 60°$

Sea$\overline{CP} \cap \overline{BD} = K$ $\rightarrow \angle KCD = \angle PCD = 60° \rightarrow \Delta KCD$ es equilátero $\rightarrow \overline{CK} = \overline{CD} = \overline{DK}$, además por ángulos opuestos por el vértice $\angle BKP = \angle CKD = 60° \rightarrow \Delta\, BKP$ es equilátero $\rightarrow \overline{BK} = \overline{BP} = \overline{KP}$. Dado que $\angle CED = 50°$ y por hipótesis $\angle ECD = 50°$ entonces ΔCDE es isósceles $\rightarrow \overline{CD} = \overline{DE}$, por transitividad, se obtiene que $\Delta\, DKE$ es isósceles $\rightarrow \angle EKD = \angle KED = 80° \rightarrow \angle PKE = 40°, pero$ $\angle KPE = \angle CPD = 40° \rightarrow$ $\Delta\, KEP$ es isósceles.

Dado que ΔBKP y ΔKEP son isósceles y comparten un lado en común ($\overline{KP}$) entonces su unión $BKEP$ es un cuadrilátero "deltoideó cometa" $\rightarrow \overline{BE} \perp \overline{KP}$ y $\overline{BE}$ $biseca\ a$ $\overline{KP} \rightarrow \angle KBE = 30°$. Como $\angle CBD = 40° \rightarrow \angle CBE = 70°$.

Por lo tanto, $en\ \Delta CBE$, $\angle BCE = 80° - ECD° = 30° \rightarrow \angle CEB = 80°$

Problema 5. Determine cuantos números de 4 dígitos son tales que al borrar cualquier digito, el número de 3 dígitos resultante sea un divisor del número original.

Solución:

Por las condiciones del problema los casos a000, son triviales ya que al quitar el a, solo queda el cero.

Se N un número de cuatro dígitos de la forma: $N = a10^3 + b10^2 + c10 + d$

Desarrollando a partir de lo anterior la siguiente división

$$\frac{N}{a10^2 + b10 + c} = 10 + \frac{10c - 9d}{a10^2 + b10 + c}$$

De donde se deduce que $\frac{10c-9d}{a10^2+b10+c}$ debe ser numero natural para que se cumplan las condiciones del problema, luego como se trata de una fracción lo primero es determinar si $10c - 9d > a10^2 + b10 + c$, lo cual solo ocurre cuando $c = d = 0$. Eso reduce las posibilidades a 81 números de la forma $N = a10^3 + b10^2$.

Si tomamos N, de la forma aa00, o sea:$N = a10^3 + a10^2$, se nota que estos numero si cumplen con la condición: $\frac{aa00}{aa0} = \frac{a10^3+a10^2}{a10^2+a10} = 10$, igualmente para cuando se retira cualquiera de los ceros; por otra parte si se retira uno de los dígitos "a" se tiene: $\frac{aa00}{a00} = \frac{a10^3+a10^2}{a10^2} = 11$, queda demostrado que los números de la forma aa00 cumplen la condición, estos números son 1100, 2200, 3300, 4400, 5500, 6600, 7700, 8800 y 9900.

Ahora determinamos los números que cumplen la condición cuando $a \neq b$. Es decir los números de la forma ab00.

$\frac{ab00}{ab0} = \frac{a10^3+b10^2}{a10^2+b10} = 10$, eliminar un cero no garantiza que se cumpla la propiedad, en este caso ahora se quita el digito "b" teniendo entonces la siguiente división:

$\frac{ab00}{a00} = \frac{a10^3+b10^2}{a10^2} = 10 + \frac{b}{a}$ Se debe cumplir entonces que a divida a b.

$\frac{ab00}{b00} = \frac{a10^3+b10^2}{b10^2} = \frac{a10}{b} + 1$ Además debe ocurrir que b divida a 10a

Ya que a divide a b, los pares de dígitos (a,b) que cumplen esta condición (sin contar a los que son iguales, porque ya se probó esa parte), son: (1,2), (1,3), (1,4), ... (1,9), (2,4), (2,6), (2,8), (3,6), (3,9), (4,8).

Luego por la segunda condición encontrada b debe dividir a 10a, lo que reduce la cantidad de pares, por ejemplo 2 divide a 6, pero 6 no a divide a 10*2=200; así los pares que cumplen ambas condiciones son:

(1,2), (1,4),(1,5),(2,4),(3,6),(4,8). Probando cada uno de los pares se puede observar que el par (1,4) no cumple con las condiciones del problema ya que 1400 no es divisible entre 400 (quitando el 1), lo que deja únicamente 5 pares (a,b). Quedando solo los números 1200, 1500, 2400, 3600 y 4800; que sumándolos con la cantidad anterior de numero aa00, se tiene que 14 números cumplen con las condiciones del problema.

Problema 6. Sean a, b, c números enteros tales que $ab + bc + ca = 1$. Pruebe que $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ es cuadrado perfecto.

Solución:

Para demostrar que un número es un cuadrado perfecto se debe encontrar una expresión de la forma k^2 donde k es un número entero, entonces para mostrar que $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ es cuadrado perfecto se debe factorizar hasta encontrar una expresión elevada al cuadrado.

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = (a^2 + ab + bc + ca)(b^2 + ab + bc + ca)(c^2 + ab + bc + ca)$$

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = (a(a + b) + c(a + b)(b(b + a) + c(b + a))(c(c + a) + b(a + c))$$

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = ((a + b)(a + c))((a + b)(b + c))((a + c)(b + c))$$

De lo anterior se nota que el factor $(a + b)$ está dos veces, igual que $(b + c)$ y $(a + c)$, reorganizando la multiplicación se tiene:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = (a + b)(a + b)(b + c)(b + c)(a + c)(a + c)$$

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = (a + b)^2(b + c)^2(a + c)^2$$

Luego por la propiedad de los exponentes: $x^n y^n = (xy)^n$ se tiene que

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = [(a + b)(b + c)(a + c)]^2$$

Ahora se tiene una expresión elevada al cuadrado, y porque a, b y c son enteros su suma y luego el producto es un número entero, esto por la cerradura de la multiplicación y la suma, de este modo se cumple con la definición de número cuadrado perfecto. Por lo tanto $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ es cuadrado perfecto.