Revista de Matemáticas Aleph

La relación binaria $(\tau_1)_{\tau_2}$ en la teoría de factorizaciones.

The binary relation $(\tau_1)_{\tau_2}$ in factorization theory

José E. Calderón Gómez
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Mayagüez
joseemilio.calderon@upr.edu

Publicado digitalmente: 15/11/2024

RESUMEN

La teoría de τ-factorizaciones, también conocida como la teoría de factorizaciones generalizadas, fue desarrollada por Anderson y Frazier en el año 2006. Fue el resultado de una generalización de las factorizaciones comaximales de McAdam y Swam, reemplazando la condición de ser elementos comaximales elementos que se relacionan. En este artículo se estudia la relación $(\tau_1)_{\tau_2}$ donde τ_1 y τ_2 son relaciones binarias sobre el conjunto de los elementos no cero no unidad de un dominio de integridad, mostrando las propiedades algebraicas que se heredan entre estas y como se ve afectada la $(\tau_1)_{\tau_2}$-factorización de un elemento.

PALABRAS CLAVES: factorizaciones, algebra abstracta

Revista de Matemáticas Aleph

INTRODUCCIÓN

La teoría de factorizaciones sobre dominios de integridad surge como una generalización de las factorizaciones de los números enteros positivos, las cuales están determinadas por el Teorema Fundamental de la Aritmética, pero llevada a estructuras más generales como los dominios de integridad o anillos conmutativos con identidad. La teoría clásica de factorizaciones se enfocó en la representación de los elementos como el producto de elementos conocidos como irreducibles o átomos.

Un elemento a distinto de cero y no unidad en un dominio de integridad, D, es llamado átomo o elemento irreducible, si cuando $a = bc$, implica que b o c es una unidad de D. Una forma más intuitiva de este concepto es pensar que es un elemento que no puede ser representado como el producto de dos o más elementos que no sean cero ni unidad. Es lo más parecido al concepto de número primo en $\mathbb{N}$, con respecto a la definición básica, los únicos divisores de un primo son 1 y el mismo. Hay que resaltar que en álgebra abstracta la definición de un elemento primo es distinta a la conocida en teoría de números. Un elemento a distinto de cero y no unidad es primo, si cuando $a|bc$, entonces $a|b$ o $a|c$. Los elementos primos son irreducibles, pero el converso es falso en general. Uno de los tipos de dominio de integridad más conocido es el Dominio de Factorización Única (UFD, por sus siglas en inglés), donde cada elemento que no es cero ni una unidad puede ser escrito como un producto único de átomos. Otra equivalencia para ser UFD, es que todo elemento se puede escribir como el producto de primos (como lo exige el Teorema Fundamental de la Aritmética).

Es posible destacar algunos dominios de integridad por las condiciones de factorización que poseen. Se dice que D es atómico, si todo elemento a distinto de cero y no unidad tiene una factorización de átomos. Por otro lado, un dominio de integridad D tiene la condición de cadenas ascendentes de ideales principales ($ACCP$ por sus siglas en inglés), si para toda sucesión de ideales principales de D, $\{(a_i)\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $(a_i) \subseteq (a_{i+1})$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \mathbb{N}$ implica que $(a_n) = (a_{n+1})$. En [8], se puede encontrar las implicaciones clásicas entre los dominios de integridad.

Aunque el enfoque de las factorizaciones mayormente ha sido con respecto a elementos irreducibles, se han estudiado factorizaciones en otros tipos de elementos tales como: elementos primales, elementos rígidos, entre otros. Por otro lado, varios algebristas han utilizado esta teoría de base para extender resultados sobre dominios de integridad a estructuras con la posibilidad de tener divisores de cero, sin identidad multiplicativa o incluso en monoides.

En el 2004, McAdam y Swam presentaron el concepto de las factorizaciones comaximales (ver [11] para más detalles). Este nuevo tipo de factorización fue la principal motivación para que, en 2006, Anderson y Frazier desarrollaran una noción de teoría de factorizaciones generalizadas sobre dominios de integridad. Los autores modificaron el concepto considerando una relación simétrica, sobre el conjunto de elementos no cero y no unidad, de tal manera que solo permite que se multipliquen elementos que estén relacionados con respecto a τ. Esta nueva teoría fue llamada teoría de factorizaciones generalizadas o teoría de τ-factorizaciones.

PRELIMINARES

Con el objetivo de simplificar la escritura se denotará, D como un dominio de integridad, $D^* = D - \{0\}$, $U(D)$ es el conjunto de unidades (aquellos elementos que tienen un inverso multiplicativo), los elementos que no son cero y no son unidad por $D^{\#} = D^* - U(D)$ y τ es una relación simétrica sobre $D^{\#}$. Para elementos $a, b \in D^{\#}$, con D un dominio de integridad, decimos que a y b son asociados, denotado por $a \sim b$ si y sólo si existe $\lambda \in U(D)$ tal que $a = \lambda b$.

Definición 2.1. [5] Sea $a \in D^{\#}$ y τ una relación simétrica sobre $D^{\#}$. Una τ-factorización de a es una expresión de la forma $a = \lambda a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$, donde $\lambda \in U(D)$, y para todo $i \neq j$, $a_i \tau a_j$.

En este artículo, por notación, se denota por " $\cdot$" al producto usual, por otro lado, "$*$" se refiere al τ-producto. Es decir, el producto $a * b$, implica que $a\tau b$ y el producto $\lambda a_1 * * * a_n$, implica que para todo $i \neq j$ el $a_i \tau a_j$. Si la relación simétrica τ está definida por, $x\tau y$ sí y sólo si $(x, y) = D$, entonces se obtienen las factorizaciones comaximales estudiadas por McAdam y Swam en [11]. Por otro lado, para la relación $\tau = D^{\#} \times D^{\#}$ se obtiene la teoría usual de factorizaciones, este hecho muestra que las nociones mencionadas son casos específicos de este nuevo concepto. Para estudiar las propiedades de las τ- factorizaciones los autores definieron y caracterizaron tipos de relaciones que poseen propiedades que ocurren naturales en las estructuras algebraicas, más allá de las relaciones más conocidas como las de equivalencia, etc. Las mismas se resumen en la siguiente definición.

Definición 2.2. [5] Sea τ una relación simétrica sobre $D^{\#}$.

1. La relación τ es una relación multiplicativa, si para $a, b, c \in D^{\#}$, $a\tau b$ y $a\tau c$ implica que $a\tau bc$.
2. La relación τ preserva asociados, si para a, b y $b' \in D^{\#}$ con $b \sim b'$, $a\tau b$ implica que $a\tau b'$ y si $b\tau a$, entonces $b'\tau a$.
3. La relación τ es una relación divisiva, si para $a, a', b \in D^{\#}$ con $a'|a, a\tau b$ implica que $a'\tau b$.

El siguiente ejemplo provee diversas relaciones y que propiedad poseen.

Ejemplo 2.3. Los siguientes ejemplos fueron definidos inicialmente en [5].

1. Considerar $S \subseteq D^{\#}$ y definir la relación τ_S como $a\tau_S b$ si y sólo si $a, b \in S$. Note que no se excluye que $S = \emptyset$, en este caso $\tau_\emptyset$ es divisiva y multiplicativa.

Más aún, todo elemento en $D^{\#}$ es un $\tau_{\emptyset}$-átomo. Por otro lado, si S es un conjunto multiplicativamente cerrado, entonces la relación τ_S es multiplicativa y los únicos elementos con una τ_S- factorización pertenecen a S (por su cerradura multiplicativa). Si S es un conjunto saturado (cerrado bajo factores), entonces la relación τ_S es divisiva. Finalmente, como se mencionó previamente, para $S = D^{\#}$ se obtiene la teoría de factorizaciones usual. Es por este hecho que Anderson y Frazier llamaron la teoría de τ-factorizaciones la teoría de factorizaciones generalizadas.

2. Aunque definida en [5], desarrollada en [10], una de las relaciones que Ortiz-Albino y sus estudiantes han estudiado muy de cerca es la relación $\tau_{(n)}$ definida sobre $\mathbb{Z}^{\#}$ como $\tau_{(n)} = (\mathbb{Z}^{\#} \times \mathbb{Z}^{\#}) \cap \equiv_n$. En otras palabras, $a\tau_{(n)}b$ si y sólo si $n|b-a$ (o $b-a \in (n)$) para a y b elementos no cero y no unidades. Por ejemplo 24 = 4 * 6, es una $\tau_{(2)}$- factorización, pero $24 = 3 * 12$ no lo es ya que $(3,12) \notin \tau_{(2)}$. La relación $\tau_{(n)}$ es de equivalencia, es multiplicativa y preserva asociados si $n = 1$ o $n = 2$, mientras que es divisiva solo cuando $n = 1, \tau_{(1)} = D^{\#} \times D^{\#}$. Para más detalles sobre relación $\tau_{(n)}$ ver [3], [10], [14], [17]. Esta relación puede ser generalizada sobre cualquier dominio de integridad tomando a J un ideal y definiendo la relación $a\tau_{(J)}b$ (originalmente denotada como τ_J) si y sólo si $b-a \in J$ (ver [10], para más detalles).

3. Sea D un dominio de integridad, entonces $D[x]$ es también un dominio de integridad (ver [9]). Sobre este dominio considerar la relación $p(x)\partial q(x)$ si y sólo si $deg(p(x)) = deg(q(x))$. Es una relación de equivalencia que preserva asociados.
4. Sobre un dominio con máximo común divisor o "GCD domain" D considere la relación $a\tau_{[\,]}b$ si y sólo si $gcd(a,b) = 1$. Note que esta relación no es

reflexiva, es divisiva, pero en general no es multiplicativa. La relación es multiplicativa sobre dominios con la propiedad de que producto de primitivos es primitivo. Para más detalles sobre la relación $\tau_{[\,]}$, ver el [5] y [15].

Los diferentes tipos de relaciones proveen características específicas sobre las τ- factorizaciones. Si τ es una relación multiplicativa y $a = \lambda a_1 *** a_n$ es una τ-factorización, entonces $a = \lambda a_1 * (a_2 \cdots a_i \cdot a_{i+1} \cdots a_n)$ es una τ- factorización, esto es, toda τ-factorización de largo n puede ser reducida a un producto de dos elementos. Por otro lado, si τ es una relación que preserva asociados, entonces es posible omitir la unidad enfrente de la expresión de las τ-factorizaciones. Si $a = \lambda a_1 \ *** \ a_n$ es una τ-factorización, entonces $a = (\lambda a_1) *** a_n$ es una τ-factorización. De hecho, las relaciones divisivas también preservan asociados, de modo que en este caso es posible también omitir las unidades en las τ-factorizaciones. Por último, si τ es una relación divisiva, $a = a_1 *** a_n$ y para a_i, $a_i = b_1 *** b_m$ es una τ- factorización, entonces $a = a_1 *** a_{i-1} * b_1 *** b_m * a_{i+1} * ** a_n$ es una τ- factorización (A esto se le llama un τ-refinamiento de τ-factorizaciones).

Anderson y Frazier en [5] clasificaron los dominios de integridad según las condiciones finitas de τ-factorización de la siguiente manera.

Definición 2.4. [5] Sea D un dominio de integridad y τ una relación simétrica sobre $D^{\#}$.

1. Se dice que D satisface la condición de cadenas ascendente de ideales principales con respecto a τ (se denota $\tau - ACCP$, por sus siglas en inglés), si para cada sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_n \mid_\tau a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_k \sim a_{k+1}$ cuando $k \geq \mathbb{N}$.
2. Se dice que D es un dominio de integridad τ-atomico, si todo elemento $a \in D^{\#}$ tiene una τ -factorización de τ-átomos.

3. Se dice que D es un Dominio de τ- factorización única ($\tau - UFD$, por sus siglas en inglés), si D es τ-atómico y para cualquier par de τ-factorizaciones de τ-átomos, tales que $\lambda a_1 *** a_n = \mu b_1 *** b_m$, entonces $n = m$ y $a_i \sim b_i$ para cada $i, j \in 1, \dots, n$.
4. Se dice que D es un Dominio de τ- factorización acotada ($\tau - BFD$, por sus siglas en inglés), si para todo $a \in D^{\#}$, existe un N_a (que depende de a), tal que si $\lambda a_1 *** a_n$ es una τ- factorización de a, se tiene que $n \leq N_a$.
5. Se dice que D es un Dominio τ- factorial a la mitad ($\tau - HFD$, por sus siglas en inglés), si toda τ- factorización de τ-átomos de $a \in D^{\#}$ tiene la misma longitud.
6. Se dice que D es un Dominio con finitas τ-factorizaciones ($\tau - FFD$, por sus siglas en inglés), si D es τ-atómico y si para todo $a \in D^{\#}$ existe sólo un número finito de τ- factorizaciones distintas, salvo reorden y asociados.

$$
\begin{tikzcd}
\text{UFD} \arrow[r] \arrow[dd, "*"'] & \text{FFD} \arrow[r] \arrow[d, "*"'] & \text{BFD} \arrow[r] \arrow[dd, "*"'] & \text{ACCP} \arrow[r] \arrow[dd] & \text{atomic} \\
& \tau\text{-FFD} \arrow[dr] & & & \\
\tau\text{-UFD} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau\text{-BFD} \arrow[r, "*"] & \tau\text{-ACCP} \arrow[r, "*"] & \tau\text{-atomic} \\
& \tau\text{-HFD} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Ilustración 19. Diagrama de estructuras y τ-estructuras, cuando τ es divisiva.

En [2], Serna demostró que si se considera una relación de equivalencia unital (es decir, $a\tau b$ y $\lambda \in U(D)$, entonces $(\lambda a)\tau(\lambda b)$), τ' es la clausura que preserva asociados de τ, entonces D es un $\tau' - UFD$ (respectivamente $\tau' - FFD$, $\tau' - BFD$, τ'-atómico, tiene $\tau' - ACCP$) si y sólo si D es un $\tau - UFD$ (respectivamente $\tau - FFD$, $\tau - BFD$, τ- atómico, tiene $\tau - ACCP$).

Haralick [12] presentó un concepto de composición entre relaciones algo distinto a lo usual. Sea $R \subseteq A \times A$ y $H \subseteq A \times B$ el autor define

(2.1) $R \circ H = \{(b,b') \in B \times B : para\ algún\ (a,a') \in R, (a,b) \in H\ y\ (a',b') \in H\}$.

Esta nueva composición permite obtener una nueva relación binaria definida sobre el conjunto B. El objetivo del autor era mapear pares a pares bajo una función o relación que hace la misma asociación para cada componente del par ordenado. Por otro lado, si $S \subseteq B \times B$, Haralick define el concepto de homomorfismo entre las relaciones binarias R y S, de la siguiente manera.

Definición 2.5. [12] Sean $R \subseteq A \times A, S \subseteq B \times B\ y\ H \subseteq A \times B$. H es un homomorfismo de R a S sí y solo sí:

1. H está definido sobre todo A (para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(a,b) \in H$).
2. H es únicamente valuada sobre B ($(a,b)\ y\ (a,b') \in H$, implica que $b = b'$).
3. $R \circ H \subseteq S$. A la relación $R \circ H$ se le conoce como imagen homomorfa de R en S.

La definición anterior es la misma que la presentada por Harary [13]. Note que las partes (1) y (2) de la definición son equivalente a decir que H es una función bien definida de A a B. Haralick estudió como caracterizar estos homomorfismos, pero no hay precedentes de un estudio más concerniente a propiedades algebraicas de la relación. En este trabajo estudiamos la definición 2.5, donde $A = B = D^{\#}$ para D un dominio de integridad.

LA RELACIÓN $(\tau_1)_{\tau_2}$

Tomando el caso particular $R = \tau_2$ donde τ_2 es relación sobre $D^{\#}$ se obtiene que la relación $(\tau_1)_{\tau_2}$ es una relación sobre $D^{\#}$, en esta sección estudiamos casos particulares para la relación $(\tau_1)_{\tau_2}$. Formalmente definida a continuación.

Definición 3.1. Sean $a, b \in D^{\#}$, τ_1 y τ_2 relaciones sobre $D^{\#}$. Entonces

(3.1) $\quad a(\tau_1)_{\tau_2} b \Longleftrightarrow \exists a', b' \in D^{\#}$ tal que $(a', a) \in \tau_2, (b', b) \in \tau_2, (a', b') \in \tau_1$

En [16] Méndez trabajo la relación $\tau_1 \circ \tau_2$. Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y las relaciones $\tau_1 = \{(a, b), (b, a), (c, b), (b, c), (d, d)\}$ y $\tau_2 = \{(e, a), (d, a), (e, c), (e, b), (f, f)\}$. Se obtienen las siguientes relaciones $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(e, b), (e, c), (e, a), (d, b)\}$, $\tau_2 \circ \tau_1 = \{(d, a)\}$. Mientras que $(\tau_1)_{\tau_2} = \emptyset$ y $(\tau_2)_{\tau_1} = \{(d, b)\}$. Esto muestra que en general no hay igualdad entre la composición de relaciones con la relación estudiada en este trabajo. El siguiente apartado presenta un caso donde se obtiene la igualdad entre $(\tau_1)_{\tau_2}$ y $\tau_1 \circ \tau_2$.

La relación $\tau_{(n)}$ ha sido estudiada en profundidad por Ortiz-Albino y su grupo de investigación, se han buscado diversas representaciones de estas relaciones, Méndez en [16] demostró que $\tau_{(n)} \circ \tau_{(m)} = \tau_{(d)}$ donde $d = gcd(n, m)$. Es natural ver que resulta de la relación $\left(\tau_{(n)}\right)_{\tau_{(m)}}$.

Proposición 3.2. Si $n, m \in N$, entonces $\left(\tau_{(n)}\right)_{\tau_{(m)}} = \tau_{(gcd(n,m))}$.

<u>*Demostración*</u>.

Sea $d = gcd(n, m)$. Por la identidad de Bezout existe s y t tales que $d = ns + mt$. ($\subseteq$) Suponer que $a\left(\tau_{(n)}\right)_{\tau_{(m)}} b$, entonces existen $x, y \in \mathbb{Z}^{\#}$ tales que $n|(y - x)$, $m|(a - x)$ y $m|(b - y)$. Como $d|n$ y $d|m$ se obtiene que $d|(y - x - (a - x) + b - y) = (b - a)$. Esto es $a\tau_{(d)}\, b$.

($\supseteq$) Por otro lado, suponer que $a\tau_{(d)}b$, esto implica que existen i, k_1 y $k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $a = i + dk_1$ y $b = i + dk_2$. Reemplazando d en ambas ecuaciones se obtiene que

$$a = i + nsk_1 + mtk_1$$
$$b = i + nsk_2 + mtk_2.$$

Poner $x = a - mtk_1 = i + nsk_1$ y $y = b - mtk_2 = i + nsk_2$. Se obtiene que $n|(y - x), m|(x - a)$ y $m|(y - b)$, esto demuestra la igualdad.

Note que los ideales (n) y $(-n)$ son iguales ya que $n \sim -n$, con esto entre manos es claro que $\tau_{(n)} = \tau_{(-n)}$. De modo que la Proposición 3.2 es válida para n y $m \in Z - \{0\}$. Por otro lado, es posible considerar el caso para n o $m = 0$. Si ambos son cero, por la Proposición 2.4 $\left(\tau_{(0)}\right)_{\tau_{(0)}} = \tau_{(0)}$. Si $m = 0$, $a\,\tau_{(0)}a$ para todo $a \in \mathbb{Z}^{\#}$. Para ver la forma de la relación $\left(\tau_{(0)}\right)_{\tau_{(m)}}$, suponer que $a\left(\tau_{(0)}\right)_{\tau_{(m)}}b$, entonces existen c y d tales que $c = d, m|a - c\; y\; m|b - c$, de aquí que $m|b - a$. Por otro lado, suponer que $a\tau_{(m)}b$. Esto implica que ambos elementos están en la misma clase de equivalencia. Entonces existe $1 \leq i \leq m - 1$ tal que $a = i + mk_1$ y $b = i + mk_2$. Note que $i\tau_{(0)}i,\ i\tau_{(m)}a\; y\; i\tau_{(m)}b$. Por lo tanto, $\left(\tau_{(0)}\right)_{\tau_{(m)}} = \tau_{(m)}$.

Por otro lado, considere las relaciones $\tau_{(n)}$ y $\tau_{[\,]}$ sobre $\mathbb{Z}$. Para $a\; y\; b \in \mathbb{Z}^{\#}$ con $a\left(\tau_{(n)}\right)_{\tau_{[\,]}}b$ si y sólo si existen a' y b' tales que $n|b' - a'$, $gcd(a', a) = 1$ y $gcd(b', b) = 1$. Por ejemplo, considerar $n = 3$, note que en este caso $-5\tau_{(3)}7$, entonces todo elemento en $\mathbb{Z}^{\#} - (5)$ se $\left(\tau_{(n)}\right)_{\tau_{[\,]}}$ - relaciona con todo elemento en $\mathbb{Z}^{\#} - (7)$.

Proposición 3.3. *Sea $n \in \mathbb{Z}$. Los siguientes enunciados se satisfacen.*

1. $(\tau(n))\tau[\,] = \mathbb{Z}^{\#} \times \mathbb{Z}^{\#}$.
2. *Si n es primo, entonces* $\left(\tau_{[\,]}\right)_{\tau_{(n)}} = \mathbb{Z}^{\#} \times \mathbb{Z}^{\#} - [(n) \times (n)]$.

<u>Demostración.</u> Sean $a\; y\; b \in \mathbb{Z}^{\#}$, donde $a = p_1^{a_1} \cdots p_l^{a_m}$ y $b = p_1^{b_1} \cdots p_l^{b_m}$.

(1) Basta tomar p primo tal que $p \neq p_i$ para todo $1 \leq i \leq m$, se sigue que $p\tau_{(n)}p$, $gcd(a, p) = gcd(b, p) = 1$; entonces $(a, b) \in \left(\tau_{(n)}\right)_{\tau_{[\,]}}$.

(2) Note que como n es primo los elementos $1,2, \ldots, n - 1$ son primos relativos a n, por el Teorema de Dirichlet en la sucesión $i + nk$ para $i = 1,2, \ldots n - 1$ hay infinitos primos. Suponer que $a \equiv i(mod\, n)$ y $b \equiv j(mod\, n)$, existen infinitos primos congruentes a a e infinitos primos congruentes a b. Basta tomar un par $p \in [i]_n$ y un $q \in [j]_n$ primos con $p \neq q$ y $p, q \notin \{p_1, \ldots, p_m\}$. Por lo tanto, $a\left(\tau_{[\,]}\right)_{\tau_{(n)}}b$. Suponer que $i = 0\; y\; j \neq 0$, poner $a = ns$ y $b = j + nk$, como n es primo se sigue

que $gcd(a,b) = 1$. Por la reflexividad de $\tau_{(n)}$ se obtiene que $a(\tau_{[\,]})_{\tau_{(n)}}b$. Por otro lado, si $nk_1(\tau_{[\,]})_{\tau_{(n)}}nk_2$, entonces existen a' y b' tales que $gcd(a',b') = 1$, $n|(nk_1 - a')$ y $n|(nk_2 - b')$. Esto es, $a' = n + nk_1$ y $b' = n + nk_2$, se sigue que n es un factor primo en común de a' y b', una contradicción. Por ende, este caso no ocurre, es decir $(nk_1, nk_2) \notin (\tau_{[\,]})_{\tau_{(n)}}$.

Note que en la demostración de la Proposición 3.3 inciso (1) la reflexividad provee la existencia de los elementos que se necesitaban, de modo que el resultado se puede generalizar para cualquier relación reflexiva.

Para p primo la relación $(\tau_{[\,]})_{\tau_{(p)}}$ es divisiva, entonces preserva asociados. Además, la relación es multiplicativa. En [16] Méndez, obtuvo un resultado similar para la composición particular $\tau_{[\,]}$ o $\tau_{(2)}$. Como la relación es divisiva, $\mathbb{Z}$ es un $(\tau_{[\,]})_{\tau_{(p)}} - UFD$. Note además que los primos y los elementos de la forma p^k son $(\tau_{[\,]})_{\tau_{(p)}}$ - átomos.

Si $S \subseteq D^{\#}$, a partir de la relación τ_S es posible obtener diferentes tipos de factorizaciones. Por ejemplo, si $S = \{x \in D^{\#} : x\ es\ primo\}$, las τ_S-factorizaciones son las factorizaciones en elementos primos, si $S = D^{\#}$, se obtienen las factorizaciones usuales. La relación τ_S es útil para generalizar estos conceptos.

Proposición 3.4. *Sean S y P subconjuntos de $D^{\#}$, entonces $(\tau_S)_{\tau_p} \subseteq \tau_p$. Si $S \cap P \neq \emptyset$, entonces $(\tau_S)_{\tau_p} = \tau_p$*

<u>Demostración.</u>

(1) Sean $a\ y\ b \in D^{\#}$. Suponer que $a(\tau_S)_{\tau_P}b$ Entonces existen $a', b' \in D^{\#}$ tales que $a'\tau_S b', a'\tau_P a\ y\ b'\tau_P b$. Lo que implica que $a', b' \in S, a', a \in P\ y\ b', b \in P$, se sigue que $a', b' \in P \cap S$. Por la simetría de τ_P se obtiene que $a\tau_P a', a'\tau_P b'\ y\ b'\tau_P a$. Como la relación es transitiva, entonces $a(\tau_P)_{\tau_S}b$.

Para demostrar la otra contenencia, suponer que $a\tau_P b$. Por hipótesis, existe $a' \in P \cap S$. Se sigue que $a'\tau_s a', a'\tau_P a \; y \; a'\tau_P b$. Por definición, $a(\tau_s)_{\tau_P} b$.

Por otro lado, si se considera que $S \cap P = \emptyset$, entonces $(\tau_s)\ \tau_P = \emptyset$. Para ver esto, suponer que $a\ (\tau_s)\tau_P\, b$. Entonces existen $a',\ b' \in D^{\#}$ tales que $a'\tau_s\, b'$, $a'\tau_P\ a$ y $b'\tau_P\ b$. Esto es, $a',\ b' \in S$ y $a', a\ , b', b \in P$, se sigue que $a',\ b' \in S \cap P$. Como $S \cap P = \emptyset$, es una contradicción, por tanto $(\tau_P)\ \tau_S = \emptyset$.

■

Note que si P es un conjunto saturado (multiplicativo), entonces la relación τ_P es divisiva (multiplicativa). Si $S \subseteq D^{\#}$ es tal que τ_s no necesariamente es divisiva, la relación $(\tau_s)_{\tau_P}$ es divisiva. La razón para que esto se encuentra más adelante.

CONSTRUCCIONES CON OPERADORES PARTICULARES

En el presente apartado se analiza el comportamiento de relaciones muy conocidas en el contexto de las τ-factorizaciones y aplicaciones sobre una relación de los operadores $|\,, |_\tau\ y\ \sim$.

Proposición 4.1. Sea τ una relación sobre $D^{\#}$ (τ no necesariamente simétrica).

1. Se obtiene que $\tau \leq \tau_{\sim}$.
2. La relación $\tau_{\sim}$ preserva asociados. Más aún $\tau_{\sim} = \tau'$. Por lo tanto, τ preserva asociados si y sólo si $\tau_{\sim} = \tau'$.
3. Si τ es una relación simétrica y transitiva que preserva asociados, entonces $\sim_\tau\ \leq\ \tau$.

<u>*Demostración.*</u>

(1) Consecuencia del hecho que $\sim$ es una relación reflexiva.

(2) Sean $a, b\ y\ c\ \in D^{\#}$ tales que $a\tau_{\sim} b$ con $b \sim c$ (respectivamente $a \sim c$). Por definición, existen a' y b' tales que $a'\tau\, b'$, $a' \sim a$, $b' \sim b$. Como $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $D^{\#}$, entonces , $b' \sim c$ (respectivamente $a' \sim c$). Por lo tanto, $a\tau_{\sim} c$ (respectivamente $c\tau_{\sim} b$). Entonces la relación $\tau_{\sim}$ contiene a τ' (ver [2]), es

decir $\tau' \leq \tau_{\sim}$. Por definición de asociado, si $a' \sim a$, $b' \sim b$, entonces existen $\lambda\ y\ \mu \in U(D)$ con $a' = \lambda a$ y $b' = \mu b$ De esto $\lambda a\, \tau\, \mu b$, esto es $a\tau' b$. Por lo tanto, $\tau_{\sim} = \tau'$.

(3) Tomar $a \sim_{\tau} b$, por definición existen a', b' tales que $a' \sim b'$, $a' \tau\, a$ y $b' \tau\, b$. Como τ es simétrica que preserva asociados $a\, \tau\, a'$ implica que $a\, \tau\, b'$. Como τ es transitiva y simétrica $a \tau b$.

Para profundizar en la relación $\tau_{\sim} = \tau'$ en el caso donde τ es una relación de equivalencia ver [2].

La Proposición 4.2 considera el operador "|" como una relación. Para no confundir la "τ" -imagen de la relación | con la relación $|\tau$ (τ -divide), se denota la relación $a(|)_{\tau} b$ si y solo si existen a' y b' tales que $a'|b'$, $a' \tau a$ y $b'\, \tau\, b$.

Proposición 4.2. Sea τ una relación sobre $D^{\#}$ (no necesariamente simétrica). Los siguientes se satisfacen.

1. Se obtiene que $\tau \leq \tau_{|}$. Más aún, la relación $\tau_{|}$ preserva asociados
2. $\left(\tau_{|}\right)_{|} = \tau_{|}$
3. La relación $\tau_{|}$ es multiplicativa.
4. Si para todo par $a, b \in D^{\#}$ existe $c \in Z_{\tau}(a)$ tal que $c|b$ (ó $gcd(a,b) \neq 1$), entonces $\tau_{|} = D^{\#} \times D^{\#}$.
5. Si τ es una relación simétrica, transitiva y divisiva, entonces $(|)_{\tau} \leq \tau$.
6. Sea $S = \{a \in D^{\#} : gcd(a,b) \neq 1 \text{ para todo b } \in \mathrm{D}^{\#}\}$. Si $\tau \leq \tau_S$ y suponer que τ es simétrica y divisiva, entonces $\tau \leq (|)_{\tau}$.
7. Suponer que τ es una relación simétrica. Si $a|_{\tau} b$, los siguientes se cumplen.
   a. $a \tau_{|} b$.
   b. Si además τ es reflexiva, entonces $a(|)_{\tau} b$.

<u>*Demostración.*</u>

(1) Note que la relación | es reflexiva, de aquí que $\tau \leq \tau_{|}$. Por otro lado, suponer que para $a, b\ y\ c \in D^{\#}$ tales que $a\tau_{|} b$ con $b \sim c$ (respectivamente $a \sim c$. Por definición existe $a'y\, b'$ tales que $a'\tau b'$, $a'|a\ y\ b'|b$. Como $b \sim c$ (respectivamente

$a \sim c$), entonces $b'|c$ ($a'|c$). Por lo tanto, $a\tau_{|}c$ $\left(c\tau_{|}b\right)$.

(2) Por (1) $\tau_{|} \leq (\tau_{|})_{|}$. Por otro lado, sean $a\ y\ b\ \in D^{\#}$ tales que $a(\tau_{|})_{|}b$, entonces existen a', b' tales que $a'\tau_{|}b'$, $a'|a$ y $b'|b$; luego existen a'', b'' tales que $a''\tau b''$, $a''|a'$ y $b''|b'$. Por la transitividad de $|$ se obtiene que $a''|a$ y $b''|b$. Por definición, $a\tau_{|}b$.

(3) Suponer que $a(\tau_{|})b$, $a(\tau_{|})c$, entonces existen a', a'', b', c' tales que $a'|a, b'|b, a'\tau b', a''|a, c'|c\ y\ a''\tau c'$. Note que $a\tau_{|}b'c'$ ya que $a|a\ y\ b'c'|bc$. Como $a|a\ y\ b'c'|bc$, entonces $a(\tau_{|})bc$. Por (2), $(\tau_{|})_{|} = \tau_{|}$. Por lo tanto, $a\tau_{|}bc$ esto demuestra qu e $\tau_{|}$ es una relación multiplicativa por derecha. Para demostrar la multiplicatividad por izquierda se produce de forma análoga.

(4) Sean $a\ y\ b \in D^{\#}$, por hipótesis existe $c \in D^{\#}$ tal que $a\tau c$ y $c|b$. Como $a|a$ se obtiene que $a\tau_{|}b$.

(5) Suponer que $a(|)_{\tau}b$, entonces existen $a'\,y\,b'$ tales que $a'|b'$, $a'\tau a\ y\ b'\tau b$. Como la relación es divisiva, entonces $a'\tau b$. Finalmente, por la transitividad se obtiene que $a\tau b$.

(6) Suponer que $\tau \leq \tau_S$ y que $a\tau b$. Por hipótesis $\gcd(a,b) = d \neq 1$. Por ende, $d|a$ y $d|b$, entonces $d\tau a$ y $d\tau b$. Por la simetría de τ y la definición de $(|)_{\tau}$ se obtiene que $a(|)_{\tau}b$.

(7) Suponer que $a|_{\tau}b$, entonces existen $\lambda \in U(D), b_1, \dots, b_n \in D^{\#}$ tales que $b = \lambda b_1 *** a *** b_n$ con $a\tau b_i, b_i\tau b_j$ para $i \neq j$. (a) Como $a|a$ y $b_i|b$ se obtiene que $a\tau_{|}b$. (b) Por otro lado, dado que $b\tau b$, entonces $a(|)_{\tau}b$.

Por los incisos (1) y (3) en la Proposición 4.2 las $\tau_{|}$-factorizaciones se pueden reescribir como $\tau_{|}$-productos de longitud dos es posible omitir la unidad. Las $\tau_{|}$-factorizaciones tienen la forma $a * b$ con $a\tau_{|}b$. Un hecho importante respecto a la relación $\tau_{|}$ es que si un elemento tiene una $\tau_{|}$-factorización entonces todo múltiplo de este tiene una $\tau_{|}$-factorizacion. Note que si $a\tau_{|}b, a|x\ y\ b|y$, entonces $x(\tau_{|})_{|}y$, por Proposición 4.2 inciso (2) $x\tau_{|}y$. Suponer que $a = a_1 * a_2$ es una $\tau_{|}$-factorización y $b = ak$ para algún $k \in D^{\#}$. Como $a_1\tau_{|}a_j$, entonces $a_1k\tau_{|}a_j$; de aquí se obtiene que

$$b = k(a_1 * a_2) = (a_1 k) * a_2$$

es una $\tau_|$-factorización de b. A su vez este análisis provee un criterio para determinar si un elemento es un τ-átomo. Como $\tau \leq \tau_|$, los $\tau_|$-átomos son también τ-átomos. Más aún, si todo elemento en $(a) - \{a\}$ es un $\tau_|$-átomo, entonces a es un $\tau_|$-átomo. Sobre relaciones en general esto no ocurre. Por ejemplo, sobre $\mathbb{Z}$ considerar la relación $\tau_{(2)}$, en este contexto $15 = 3 * 5$ es una $\tau_{(2)}$-factorización, pero 30 es un $\tau_{(2)}$-átomo.

La Proposición 4.2 inciso (4) provee un criterio para determinar cuándo un elemento no $|_\tau$-divide a otro, es decir si $(a, b) \notin (|)_\tau$, entonces en toda τ-factorización de b no tiene al elemento a como un τ-factor.

Ejemplo 4.3. Construcción de algunas relaciones $\tau_|$, con relación sobre $\mathbb{Z}^\#$.

1. Sobre $\mathbb{Z}$ considerar la relación $8\tau 3$ y $5\tau 3$. Aplicando el operador $|$ a la relación se obtiene que
$$\tau_| = \{(8k_1, 3k_2), (5k_3, 3k_4) : k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3, 4\}.$$
Note que $16\tau_| 15$, pero $(2, 3) \notin \tau_|$. Lo que implica que en general la relación $\tau_|$ no es divisiva.
2. Considere la relación $\tau_{[\,]}$, se sigue que
$$(\tau_{[\,]})_| = \mathbb{Z}^\# \times \mathbb{Z}^\# - \{(p^\alpha, p^\beta) : p \text{ es primo} \wedge \alpha, \beta \geq 0\}.$$
Para ver esto, sean $a\ y\ b \in \mathbb{Z}^\#$ tales que $a(\tau_{[\,]})_| b$, entonces existen $a'\ y\ b'$ tales que $\gcd(a', b') = 1, a'|a\ y\ b'|b$. Si $a = p^\alpha\ y\ b = p^\beta$ para algún p primo, entonces todo divisor (distinto de 1) de $a\ y\ b$ es de la forma p^γ, pero $\gcd(p^{\gamma_1} p^{\gamma_2}) \neq 1$, contradicción.
Por otro lado, suponer que
$$(a, b) \in \mathbb{Z}^\# \times \mathbb{Z}^\# - \{(p^\alpha, p^\beta) : p \text{ es primo} \wedge \alpha, \beta \geq 0\}.$$
Esto es, $a\ y\ b$ no son al mismo tiempo potencias del mismo primo. Por lo

tanto, tenemos dos casos:

(1) Para $q\ y\ r$ primos distintos tales que $a = r^{\alpha}\ y\ b = q^{\beta}$. Se sigue que $r|a, q|b\ y\ gcd(r,q) = 1$.

(2) Si $a = {r_1}^{\alpha_1}{r_2}^{\alpha_2} \ldots {r_n}^{\alpha_n}\ y\ a = {r_1}^{\alpha_1}{r_2}^{\alpha_2} \ldots {r_n}^{\alpha_n}$ para $n, m > 1$. Basta con tomar $r_i \neq q_j$ para obtener que $\gcd(r_i, q_j) = 1, r_i|a\ y\ q_j|b$. En ambos casos se obtiene que $a(\tau_{[\,]})_{|}b$. Esto demuestra la igualdad. Note que $12(\tau_{[\,]})_{|}24$, $4|12\ y\ 4|24$. Pero $(4,4) \notin (\tau_{(n)})_{|}$. Esto demuestra que la relación no es divisiva. Por otro lado, los elementos de la forma p^{α} para p primo son $(\tau_{[\,]})_{|}$-átomos. Por ende, si $p\ y\ q$ son primos distintos se sigue que si $pq|a$, entonces a tiene una $(\tau_{[\,]})_{|}$-factorización.

PROPIEDADES DE LA RELACIÓN $(\tau_1)_{\tau_2}$

En los apartados anteriores se presentaron algunas relaciones particulares. Note que la relación $\tau_{\sim}$ preserva asociados, pero este no es el único caso. El Teorema 5.1 generaliza esto tomando la τ_2 imagen de una relación τ_1. Ciertas propiedades sobre τ_2 pueden ser heredadas en la relación $(\tau_1)_{\tau_2}$.

Teorema 5.1. Sean $\tau_1\ y\ \tau_2$ dos relaciones simétricas sobre $D^{\#}$. Los siguientes enunciados se cumplen.

1. Si τ_2 es una relación divisiva (o que preserva asociados), entonces $(\tau_1)_{\tau_2}$ es una relación divisiva (que preserva asociados).
2. Si $\tau_1\ y\ \tau_2$ son congruencias sobre $D^{\#}$ y τ_2 es una relación multiplicativa, entonces $(\tau_1)_{\tau_2}$ es una relación multiplicativa.

<u>Demostración.</u>

(1) Sean $a', b\ y\ b' \in D^{\#}$ tales que $a(\tau_1)_{\tau_2}b, a'|a\ y\ b'|b$. Por la definición de $(\tau_1)_{\tau_2}$, existe $a''y\ b''$ tales que $a''\tau_1 b''$, $a''\tau_2 a$ y $b''\tau_2 b$. Como τ_2 es divisiva se obtiene

$a''\tau_2 a'$ y $b''\tau_2 b'$ por definición $a'(\tau_1)_{\tau_2} b'$. El otro caso es similar. La Figura 2 es una representación gráfica de lo discutido.

$$\begin{tikzcd}
a'' \arrow[r, leftrightarrow, "\tau_1"] \arrow[d, "\tau_2"'] & b'' \arrow[d, "\tau_2"] \\
a' \arrow[r, leftrightarrow, "(\tau_1)_{\tau_2}"'] & b'
\end{tikzcd}$$

Ilustración 20. $(\tau_1)_{\tau_2}$ *es divisa*

(2) Sean a, b y $c \in D^{\#}$ tales que $a(\tau_1)_{\tau_2} b$ y $a(\tau_1)_{\tau_2} c$. Por definición existen a', a'', b' y $c' \in D^{\#}$ tales que $a'\tau_1 b'$, $a''\tau_1 c'$, $a'\tau_2 a$, $a''\tau_2 a$, $b'\tau_2 b$ y $c'\tau_2 c$. Como τ_2 es una relación multiplicativa, entonces $a\tau_2 a'a''$ ($a''a'\tau_2 a$ por ser τ_2 una relación de equivalencia). Como τ_1 es una congruencia sobre $D^{\#}$ se obtiene que $a'a''\tau_1 b'c'$.

Por ser τ_2 una congruencia se obtiene que $b'c'\tau_2 bc$. Por lo descrito anteriormente se obtiene que $a(\tau_1)\tau_2 bc$. En la Figura 3 se muestra gráficamente la idea de la demostración).

■

$$\begin{tikzcd}
a'a'' \arrow[r, leftrightarrow, "\tau_1"] \arrow[d, "\tau_2"'] & b'c' \arrow[d, "\tau_2"] \\
a \arrow[r, leftrightarrow, "(\tau_1)_{\tau_2}"'] & bc
\end{tikzcd}$$

Ilustración 21. $(\tau_1)_{\tau_2}$ *es multiplicativa*

El caso $\tau_1 = \tau_2$

En la presente sección se analizan las propiedades de la relación τ_τ. Claramente si τ es una relación sobre $D^\#$, la relación τ_τ también lo es. La Proposición 5.2 es consecuencia directa de la definición de τ_τ.

Proposición 5.2. Sea τ una relación sobre $D^\#$ (no necesariamente simétrica). Los siguientes se cumplen.

1. Si τ es reflexiva, entonces τ_τ es reflexiva.
2. Si τ es simétrica, entonces τ_τ es simétrica.
3. Si τ es una relación inyectiva y transitiva, entonces τ_τ es transitiva.

Proposición 5.3. Sea τ una relación binaria sobre un conjunto arbitrario no vacío A. Los siguientes enunciados se cumplen.

1. Si τ es una relación simétrica, entonces $\tau \subseteq \tau_\tau$. Si τ es también transitiva, entonces $\tau_\tau = \tau$.
2. Si τ es una relación reflexiva, entonces $\tau \subseteq \tau_\tau$.

Demostración.

(1) Sean a y $b \in A$, tales que $a\tau b$, como τ es una relación simétrica, entonces $b\tau a$. Por definición $a\tau_\tau b$. Por otro lado, suponer que $a\tau_\tau b$, por definición, existen elementos a' y b' tales que $a'\tau a,\ b'\tau b$ y además $a'\tau b'$. Por la simetría de la relación τ se obtiene que $a\tau a'$ y por la transitividad de la relación se obtiene que $a\tau b$.

(2) Suponer que $a\tau b$. Como τ es reflexiva, entonces $a\tau a$ y $b\tau b$. Por definición se obtiene que $a\tau_\tau b$.

■

No necesariamente las relaciones τ y τ_τ son comparables, el siguiente ejemplo muestra este hecho.

Ejemplo 5.4. Sea $A = \{a, b, c\}$ y la relación $\tau = \{(a, b),\ (a, a),\ (c, b)\}$, se ve que $\tau_\tau = \{(a, a),\ (a, b),\ (b, a),\ (b, b)\}$. Claramente estas relaciones no son comparables, pero $\tau \cap \tau_\tau = \{(a, a), (a, b)\}$.

Una consecuencia directa del Teorema 5.1 inciso (1) es que para τ una relación simétrica sobre $D^{\#}$, si τ preserva asociados, entonces τ_τ preserva asociados. Si τ es divisiva, entonces τ_τ es divisiva.

Que la relación τ_τ sea divisiva (preserve asociados) no implica, en general, que τ sea divisiva (preserve asociados). Considerar la relación $\tau = \{(p,p),(p,-p),(-p,p)\}$ para p un primo arbitrario pero fijo. Note que $\tau_\tau = \{(\pm p, \pm p)\}$ que es una relación divisiva (que preserva asociados), pero τ no lo es.

Debido a que si τ es una relación simétrica, se obtiene que $\tau \subseteq \tau_\tau$. Este caso fue estudiado a profundidad por Ortiz-Albino [14], Serna [2] y Juett [15]. Para evadir esto, se asumirá que τ no necesariamente es una relación simétrica. En este contexto resulta necesario analizar las propiedades concernientes a τ-factorizaciones como las introducidas por Méndez en [16]. Para efectos del documento en el resto de la sección se utiliza la siguiente definición de τ-factorización, dada por Méndez.

Definición 5.5. [16] Sea τ una relación sobre $D^{\#}$ no necesariamente simétrica. Un producto $a = \lambda a_1 *** a_n$, para $\lambda \in U(D)$ es una τ-factorización si $a_i \tau a_{i+1}$.

Al eliminar la simetría de la relación, Méndez trabajo con propiedades laterales de las relaciones, la relación $\tau \subseteq D^{\#} \times D^{\#}$ preserva asociados por izquierda (derecha), si para $a\tau b$ y $a \sim c\,(b \sim c)$, se obtiene que $c\tau b\,(a\tau c)$. Similarmente, τ es divisiva por izquierda (derecha) si para $a\tau b$ y $a'|a\,(b'|b)$, se obtiene que $a'\tau b\,(a\tau b')$. Finalmente, la relación es multiplicativa por izquierda (derecha) si para $a\tau b$ y $c\tau b$ $(a\tau c)$ se obtiene que $ac\tau b$ $(a\tau bc)$. Si la relación preserva alguna de las propiedades por ambos lados se dice que la relación preserva esta propiedad.

Proposición 5.6. Sea τ una relación sobre $D^{\#}$ (no necesariamente simétrica) los siguientes se cumplen.

1. Si τ preserva asociados por derecha, entonces τ_τ preserva asociados por izquierda.
2. Si τ es divisiva por derecha, entonces τ_τ es divisiva por izquierda.

Demostración.

(1) Sean $a, b\ y\ c \in D^{\#}$. Suponer que $a\tau_\tau b\ y\ a \sim c\ (b \sim c)$. Por definición existen $a'\ y\ b'$ tales que $a\tau b', a'\tau a\ y\ b'\tau b$. Como τ preserva asociados por derecha, entonces $a'\tau c$. Por definición se obtiene que $c\tau_\tau b$.

(2) Suponer que $a\tau_\tau b\ y\ x|b$. Por definición, existen $a'\ y\ b'$ tales que $a'\tau b'$, $a'\tau a$ y $b'\tau b$. Como τ es divisiva por derecha, entonces $b'\tau x$. Por la definición de τ_τ se obtiene que $a\tau_\tau x$.

■

En general si τ es una relación divisiva por izquierda, no necesariamente la relación τ_τ es divisiva por derecha. Por ejemplo, considerar la relación sobre $\mathbb{Z}$, claramente la relación es divisiva por izquierda (preserva asociados por izquierda). Note que $\tau_\tau = \{(2,2)\}$ que es una relación que no es divisiva (no preserva asociados) por izquierda ni por derecha.

Proposición 5.7. Suponer que $a = \lambda a_1 *** a_n$es una τ-factorización tal que $a_n\tau a_1$, entonces $a = \lambda a_1 *** a_n$ es una τ_τ- factorización.

Demostración.

Sea $a = \lambda a_1 *** a_n$ una τ-factorización, por definición $a_i\tau a_{i+1}$. Entonces $a_i\tau_\tau a_{i+1}$, para $i \geq 2$. Por hipótesis $a_n\tau a_1$ entonces $a_1\tau_\tau a_2$. Por lo tanto, $a = \lambda a_1 *** a_n$ es una τ_τ-factorización.

■

El caso $\tau_1 \leq \tau_2$

En esta sección se analizan las implicaciones entre las τ_1 - factorizaciones, τ_2-factorizaciones y las $(\tau_1)_{\tau 2}$-factorizaciones. Se inicia la sección con un resultado que no necesita que una relación está contenida en la otra.

Debido a que se está trabajando con dos diferentes definiciones de τ-factorización se aclara con qué definición se está trabajando. La Proposición 5.8 es funcional para ambas definiciones de τ-factorización.

Proposición 5.8. Suponer que τ_1 es una relación simétrica sobre $D^{\#}$ y τ_2 una relación reflexiva. Si a es un $(\tau_1)_{\tau_2}$-átomo, entonces a es un τ_1-átomo.

<u>*Demostración*</u>.

Suponer que a tiene una τ_1-factorización, $a = \lambda a_1 *** a_n$. Como τ_2 es reflexiva, entonces se obtiene que $a_i \tau_2 a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, de aquí que $a_1 (\tau_1)_{\tau_2} a_j$. Por lo anterior $a = \lambda a_1 \; *** \; a_n$ es una $(\tau_1)_{\tau_2}$- factorización. Por ende, si a es un (τ_1)-átomo, entonces a es un τ_1-átomo.

Si se considera la definición usual (Definición 2.1) los resultados sobre las τ-factorizaciones cuando $\tau_1 \leq \tau_2$ fueron estudiados en profundidad por Ortiz-Albino en [14]. Por otro lado, si $a = \lambda a_1 *** a_n$ es una τ_1-factorización en el sentido de la Definición 5.5, entonces $a_i \tau_1 a_{i+1}$; dado que $\tau_1 \leq \tau_2$ se obtiene que $a_i \tau_2 \, a_{i+1}$ de modo que $a = \lambda a_1 *** a_n$ es una τ_2- factorización. El siguiente Teorema resume las implicaciones entre las τ_1-factorizaciones y las τ_2-factorizaciones con las $(\tau_1)_{\tau_2}$- factorizaciones cuando $\tau_1 \leq \tau_2$ en el sentido de la definición 5.5.

Teorema 5.9. Sean τ_1 y τ_2 dos relaciones (no necesariamente simétricas) tales que $\tau_1 \leq \tau_2$. Los siguientes se cumplen:

1. Si τ_1 es una relación simétrica, entonces toda τ_1- factorización es una $(\tau_1)_{\tau_1}$-factorización.
2. Toda $(\tau_1)_{\tau_1}$- factorización es una $(\tau_1)_{\tau_2}$- factorización.
3. Toda $(\tau_1)_{\tau_2}$- factorización es una $(\tau_2)_{\tau_2}$ - factorización.

<u>*Demostración.*</u>

Por el argumento antes del teorema, basta demostrar las contenencias entre las relaciones.

(1) Suponer que $a(\tau_1)_{\tau_1}b$ entonces existen a' y $b' \in D^{\#}$ tales que $a'\tau_1 b', a'\tau_1 a$ y $b'\tau_1 b$. Como $\tau_1 \leq \tau_2$, entonces $a'\tau_2 a$ y $b'\tau_2 b$, de aquí que $a(\tau_1)_{\tau_2}b$. Por lo tanto, toda $(\tau_1)_{\tau_1}$-factorización es una $(\tau_1)_{\tau_2}$-factorización.

(2) Suponer que $a(\tau_1)_{\tau_1}b$, entonces existen a' y b' tales que $a'\tau_1 a$, $b'\tau_1 b$ y $a'\tau_1 b'$. Como $\tau_1 \leq \tau_2$, entonces $a'\tau_2 a$ y $b'\tau_2 b$, por definición se obtiene que $a(\tau_1)_{\tau_2} b$

(3) Suponer que $\tau_1 \leq \tau_2$ y sea $a(\tau_1)_{\tau_2} b$, por definición, existen $a'\ y\ b' \in D^{\#}$ tales que $a'\tau_1 b'$, $a'\tau_2 a$ y $b'\tau_2 b$. Luego, $a'\tau_2 b'$ lo cual implica que $a(\tau_2)_{\tau_2} b$.

■

Note que si τ_2 es una relación simétrica y transitiva, por la Proposición 5.3 $(\tau_2)_{\tau_2} = \tau_2$, por otro lado, si $\tau_2$es solamente simétrica se obtiene que toda τ_2-factorización es una $(\tau_2)_{\tau_2}$ -factorización. Juntando esto con los resultados del Teorema 5.9 se obtiene el diagrama de la Figura 4 que resume las equivalencias entre las τ_1, τ_2 y las $(\tau_1)_{\tau_2}$ -factorizaciones.

$$
\begin{tikzcd}
\tau_1\text{-factorización} \arrow[r, "*"] \arrow[dd] & (\tau_1)_{\tau_1}\text{-factorización} \arrow[d] \\
 & (\tau_1)_{\tau_2}\text{-factorización} \arrow[d] \\
\tau_2\text{-factorización} \arrow[r, "*"] & (\tau_2)_{\tau_2}\text{-factorización}
\end{tikzcd}
$$

Ilustración 22. Equivalencias entre las $(\tau_i)_{\tau_j}$ cuando $\tau_1 \leq \tau_2$

En la Figura 4, $*$ representa que la relación τ_1 o τ_2 es una relación simétrica.

En el diagrama de la Figura 4 se pueden conectar las $(\tau_1)_{\tau_2}$- factorizaciones con las τ_1- factorizaciones bajo las condiciones de la Proposición 6.2.

ALGUNAS GENERALIZACIONES

En la Sección 5.3.4 se construyeron propiedades sobre relaciones a partir de los operadores $\sim$ (asociado a), $|$ (divide a) y $|_\tau$ (τ- divide a). Es posible generalizar las propiedades de las relaciones a partir de la construcción de una familia de relaciones a partir de otra relación (tomando esta como un operador).

Definición 6.1. Sean τ_1 y τ_2 relaciones sobre $D^{\#}$ Suponer que τ_1 es una relación simétrica.

1. Se dice que τ_1 preserva a la relación τ_2 por derecha si para $a\tau_1 b$, $a'\tau_2 a$ y $b'\tau_2 b$, entonces $a'\tau_1 b'$.
2. Se dice que la relación τ_1 preserva a la relación τ_2 por izquierda si para $a\tau_1 b$, $a\tau_2 a'$ y $b\tau_2 b'$, entonces $a'\tau_1 b'$.

Note que si τ_2 es una relación simétrica sobre $D^{\#}$ entonces los conceptos dados en la Definición 6.1 coinciden.

Con la definición anterior las relaciones divisivas se convierten en un caso especial poniendo a $\tau_2 = |$, de modo que τ_1 es divisiva si τ_1 preserva a la relación $|$ por izquierda. Más aún, con esta nueva definición es posible generar otras propiedades sobre las relaciones. Por ejemplo, la relación $\tau_|$ es una relación que preserva los múltiplos de los elementos que están relacionados, note que si τ preserva a $|$, entonces $\tau_| = \tau$.

Similarmente se pueden construir otras propiedades, por ejemplo, si τ_1 y τ_2 son dos relaciones simétricas, se dice que τ_1 es τ_2-divisiva si para $a\tau_1 b$, $a'|_{\tau_2} a$ y $b'|_{\tau_2} b$ implica que $a'\tau_1 b'$. Note que la relación $\tau_{(1)}$ es τ -divisiva para cualquier relación simétrica sobre $\mathbb{Z}^{\#}$.

Proposición 6.2. Sean τ_1 y τ_2 relaciones sobre $D^{\#}$. Si τ_1 es simétrica y preserva a τ_2 por izquierda. Los siguientes enunciados se cumplen.

1. Si τ_2 es tal que $a\tau_2 a'$ para todo $a \in dom(\tau)$, entonces $(\tau_1)_{\tau_2} \leq \tau_1$.
2. La relación $(\tau_1)_{\tau_2}$ preserva a τ_2 por izquierda.

<u>*Demostración.*</u>

(1) Suponer que $a(\tau_1)_{\tau_2}b,\ a\tau_2 a'\ y\ b\tau_2 b'$. Por definición existen a'' y $b'' \in D^{\#}$ tales que $a''\tau_1 b''$, $a''\tau_2 a$ y $b''\tau_2 b$. Como τ_1 preserva a τ_2 por izquierda, entonces $a\tau_1 b$.

(2) Suponer que $a(\tau_1)_{\tau_2}b,\ a\tau_2 a'\ y\ b\tau_2 b'$. Por definición, existen a'' y b'' tales que $a''^{\tau_1}b''$, $a''\tau_2 a$ y $b''\tau_2 b$. Como la relación τ_1 co-preserva a la relación τ_2 se obtiene que se continua con lo establecido anteriormente. Por definición, se obtiene que $a'(\tau_1)_{\tau_2}b'$, esto es, $(\tau_1)_{\tau_2}$ co-preserva a τ_2.

BIBLIOGRAFÍA

[1] A. G. Vargas-Jiménez, "τ-Multiplicative sets", M. Sc. Tesis, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Mayagüez, 2014.

[2] C. A. Serna Rapello, "Factorizaciones donde cada factor de un elemento pertenece a solo una clase de equivalencia", M. Sc. Tesis, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Mayagüez, 2014.

[3] C. A. Molina, "On the number of τ(n)-factors", M. Sc. Tesis, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Mayagüez, 2016.

[4] C. P. Mooney, "Generalized factorization in commutative rings with zero-divisors", PhD Thesis, The University of Iowa, 2013.

[5] D. D. Anderson and A. Frazier, "On a general theory of factorization in integral domains", Rocky Mountain J. Math.

[6] D. D. Anderson, D. F. Anderson, and M. Zafrullah, "Factorization in integral domains", J. Pure Appl. Algebra 69 (1990), 1–19.

[7] D. D. Anderson; S. Valdes-Leon. "Factorization in commutative rings with zero divisors". Rocky Mountain J. Math. 26 (2) (1996), 439–480.

[8] D. S. Dummit, R. M. Foote. "Abstract algebra". Wiley, 2003.

[9] T.W. Hungerford. "Algebra". Springer-Verlag, New York, 1974.

[10] S. M. Hamon, "Some topics in τ-factorizations", PhD Thesis, The University of Iowa, 2007.

[11] S. McAdam and R. G. Swam, "Unique comaximal factorization", J. Algebra 276 (2004), 180–192.

[12] R. M. Haralick, "The characterization of binary relation homomorphisms", International Journal of General Systems 4 (1978) , 113–121.

[13] F. Harary, "Graph theory". Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.

[14] R.M. Ortiz-Albino, "On Generalized nonatomic factorizations", PhD Thesis, The University of Iowa, 2008. [15] J.R. Juett, "Some topics in abstract factorization", PhD Thesis, The University of Iowa, 2013.

[16] D.F. Méndez, "La composición de relaciones y la teoría de τ factorizaciones", Ms.C Tesis, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Mayagüez, 2017.

[17] A. Hernández-Espiet y R.M. Ortiz-Albino, "On the characterization of τ(n)-

atoms", Rings, Monoids and Module Theory, Conference paper (2020).

[18] A. Musukwa y K. Kumwenda, "A special subring associated with irreducible elements in the ring of Z/nZ", MAYFEB Journal of Mathematics (2017), 1–7.

[19] D.D. Anderson, M. Axtell, S.J. Forman, J. Stickles, "When are Associates Unit Multiples?". Rocky Mountain J. Math. 34 (2004), no. 3, 811–828.

[20] J. Lanterman, "Irreducibles in the integers modulo n". In eprint arXiv:1210.2991 (2012).

[21] J.R. Juett, "Two counterexamples in abstract factorization", Rocky Mountain J. Math. 44 (1) (2014), 139–155.