COMPENDIO MATEMÁTICO III PAC 2024

JUAN CARLOS IGLESIAS
JUAN PINEDA
MARIO ROBERTO CANALES
VÍCTOR ADOLFO CÁRDENAS

INTRODUCCIÓN

Este compendio ofrece un recorrido por tres temas fundamentales y fascinantes de la matemática: diversas demostraciones del Teorema de Pitágoras, la resolución de un problema olímpico, y la deducción de la fórmula cuadrática. Estos temas fueron presentados el día 13 de noviembre de 2024 en una serie de conferencias matemáticas para motivar a los estudiantes al estudio continuo de las matemáticas en su forma pura.

Inicialmente, se explora la deducción de la fórmula cuadrática, una herramienta crucial en álgebra que facilita la resolución de ecuaciones cuadráticas. Seguidamente, el Teorema de Pitágoras, uno de los pilares de la geometría, que ha trascendido generaciones y culturas debido a su simplicidad y su relevancia en diversos contextos, desde la construcción de edificios hasta el cálculo de distancias en el espacio. Este compendio reúne múltiples demostraciones de este teorema, incluyendo enfoques geométricos y algebraicos.

La última sección examina un problema de competición matemática de nivel olímpico, un contexto en donde los estudiantes de diversos países se enfrentaron haciendo uso de un pensamiento crítico y habilidades analíticas avanzadas. El problema 4 presentado en el examen de la XXVI Olimpiada Matemática de Centroamerica y del Caribe reune una variedad de tópicos que eran útiles para su solución.

Este compendio se propone como una fuente de inspiración para estudiantes, docentes y entusiastas de las matemáticas, ofreciendo no solo conocimientos matemáticos sólidos, sino también ejemplos de la aplicación y el impacto de estos conceptos en contextos históricos y contemporáneos.

Contenido

Publicada digitalmente el 13 de noviembre de 2024

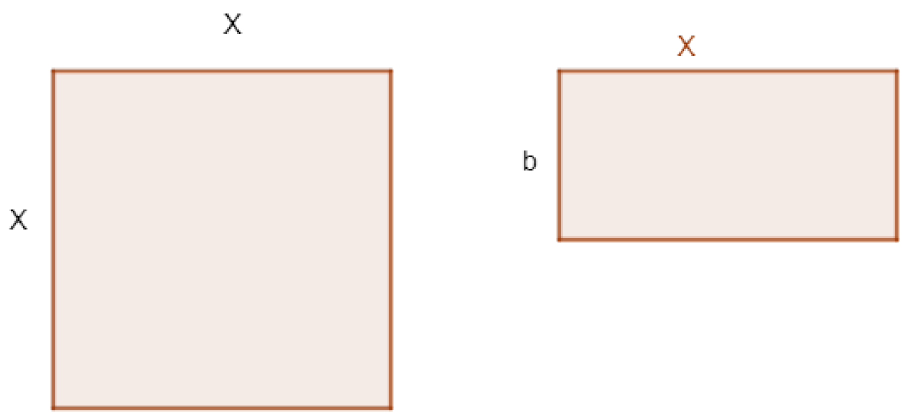
Sección Académica de Ciencias Matemáticas

UPNFM CURSPS

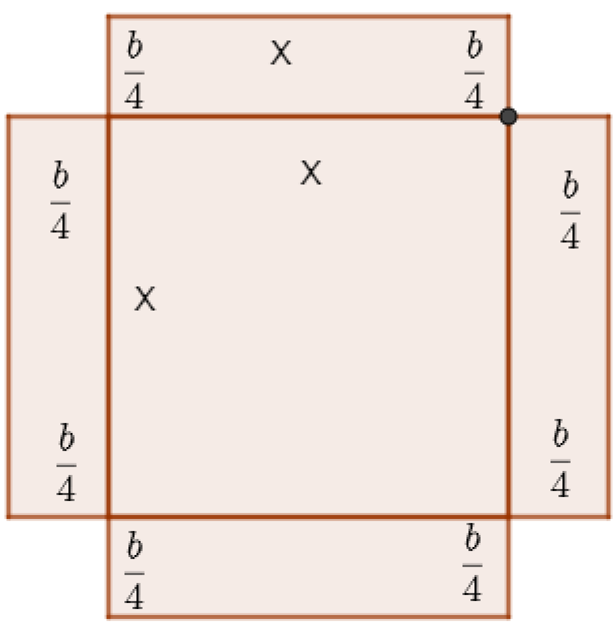
Completación del cuadrado

M. Sc. Mario Canales

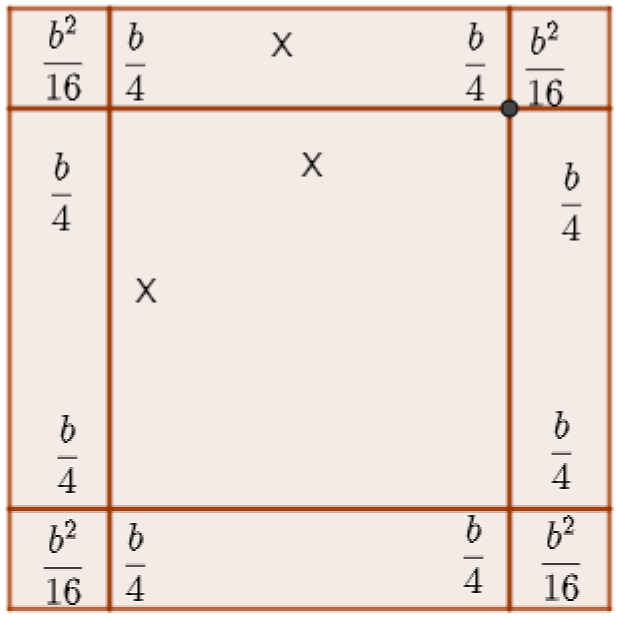
Dado la ecuación $x^2 + bx$, representa el área de un cuadrado de lado x y área x^2 y un rectángulo con área bx:



Se divide el rectángulo en 4 partes iguales a lo largo del labo b , y se obtienen 4 rectángulos con lados x y $\frac{b}{4}$, cuya área es $\frac{b}{4}x$ cada uno. Luego se forma la siguiente figura:



Se puede notar que la figura le hace falta las esquinas y al completarla se forma:



Donde cada pequeño cuadrado tiene dimessón $\frac{b}{4}$ y el área de cada uno de ellos es $\frac{b^2}{16}$. Luego se obtiene:

$$x^2 + bx + 4\left(\frac{b^2}{16}\right)$$

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$$

simplificando

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

factorizando

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Luego la expresión $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ es la que se utiliza para completar el cuadrado.

Deducción de la fórmula cuadrática

Sea $ax^2+bx+c=0$ la ecuación general de la ecuación cuadrática. Luego se divide toda la ecuación entre a , el coeficiente principal, se obtiene:

$$\frac{ax^2+bx+c}{a}=0$$

Simplificando:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

El término para completar el cuadrado es:

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Se suma a la derecha y a la izquierda de la ecuación

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Elevando al cuadrado y factorizando

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

Sumando fracciones

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

Arreglando el numerador

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Sacando raíz cuadrada a ambos lados:

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}} = \sqrt{\frac{b^{2}-4ac}{4a^{2}}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^{2}-4ac}{4a^{2}}}$$

Despejando x:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

De lo cual, se obtiene la fórmula cuadrática.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

■

Enfoque babilónico de solución de ecuaciones cuadráticas

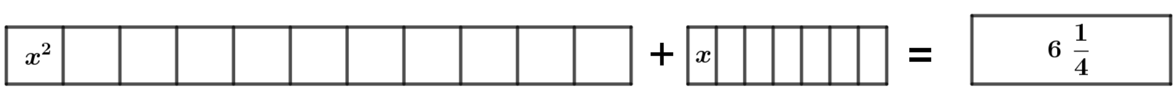
M. Sc. Juan Pineda

El enfoque babilónico de solución de ecuaciones cuadráticas se ejemplifica en un problema en la Tablilla BM 13901: «He sumado siete veces el lado de mi cuadrado y once veces el área, [obteniendo] 6; 15»

En expresión actual es de la forma $7x + 11x^2 = 6;15$, refiriéndose al área de 11 cuadrados, un rectángulo de lados igual al del cuadro (x)y 7, equivalente al área de un rectángulo de medida $6;15$ en notación sexagesimal, es decir $6\frac{1}{4}$ en el sistema decimal

En el caso específico del problema de la tablilla **BM 13901,** se puede representar gráficamente de la forma siguiente:

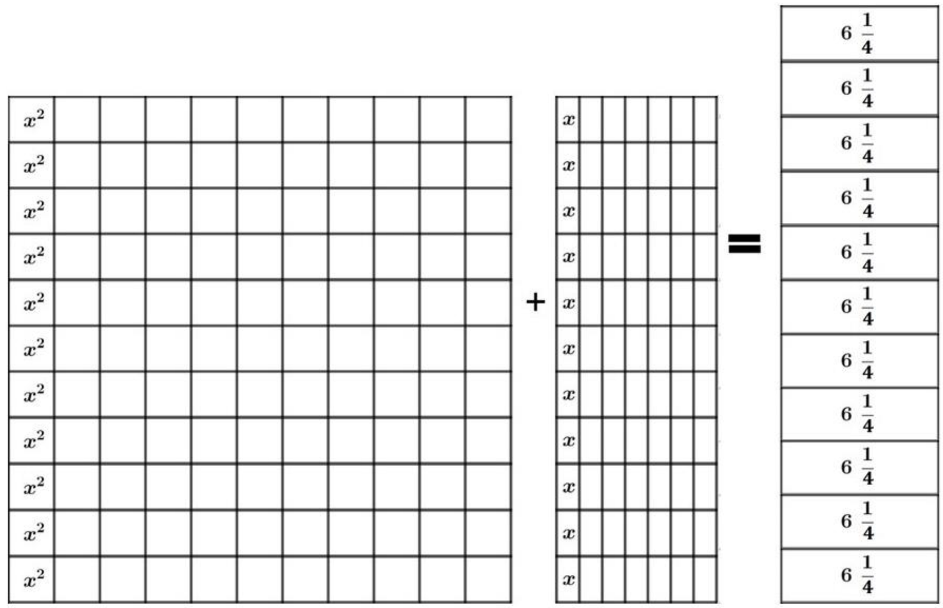
Se tiene $11x^2 + 7x = 6\frac{1}{4}$



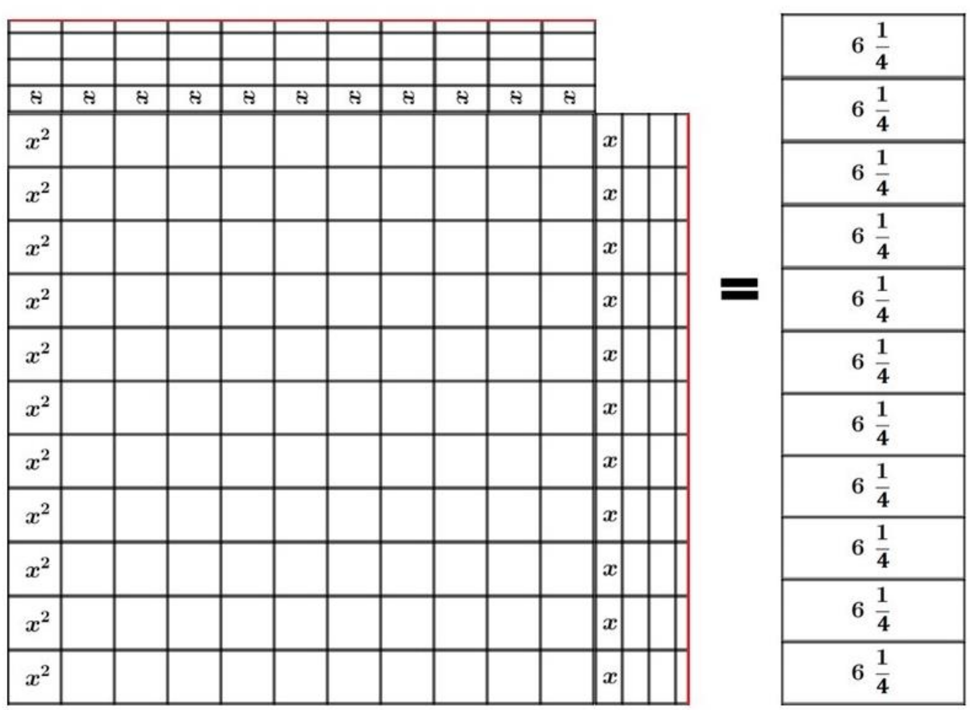
Se multiplica por 11 cada término de la expresión:

$$11^2x^2 + 11(7)x = (11)6\frac{1}{4}$$

$$(11x)^2 + (7)(11x) = 68\frac{3}{4}$$



Dividir 7 por 2, que es $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$, que es dividir el segundo rectángulo, y reordenar las piezas junto al cuadrado

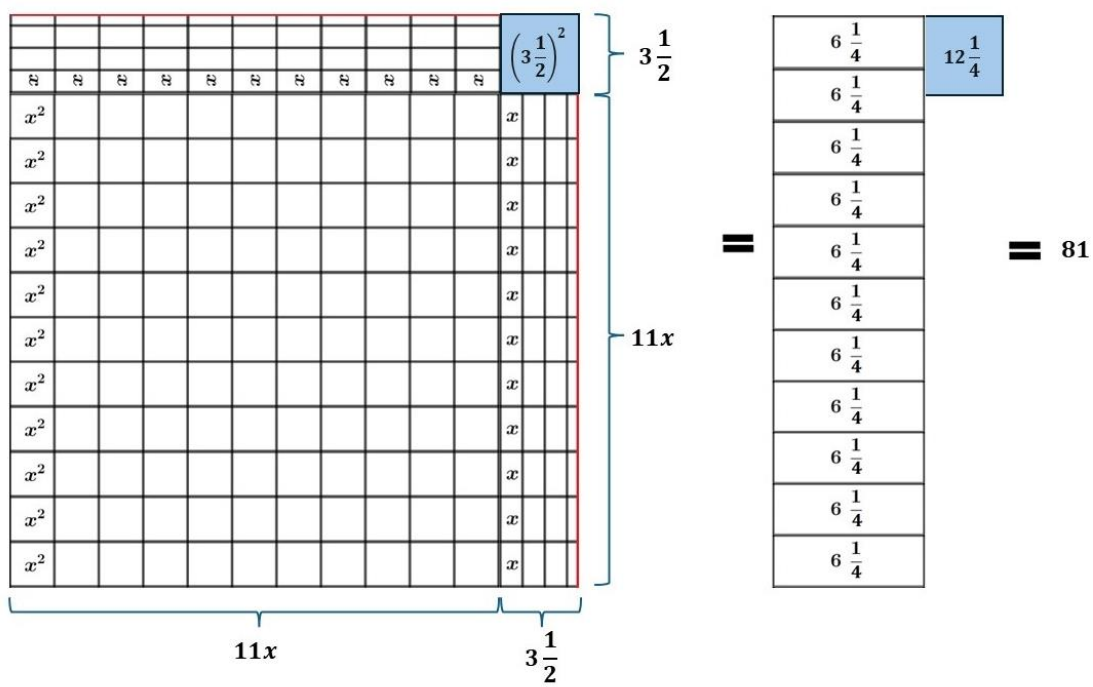


$$(11x)^2 + 2\left(\frac{7}{2}\right)(11x) = 68\frac{3}{4}$$

Al completar al cuadrado se obtiene:

$$(11x)^2 + 2\left(\frac{7}{2}\right)(11x) + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 68\frac{3}{4} + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$(11x)^2 + 2\left(\frac{7}{2}\right)(11x) + 12\frac{1}{4} = 68\frac{3}{4} + 12\frac{1}{4}$$

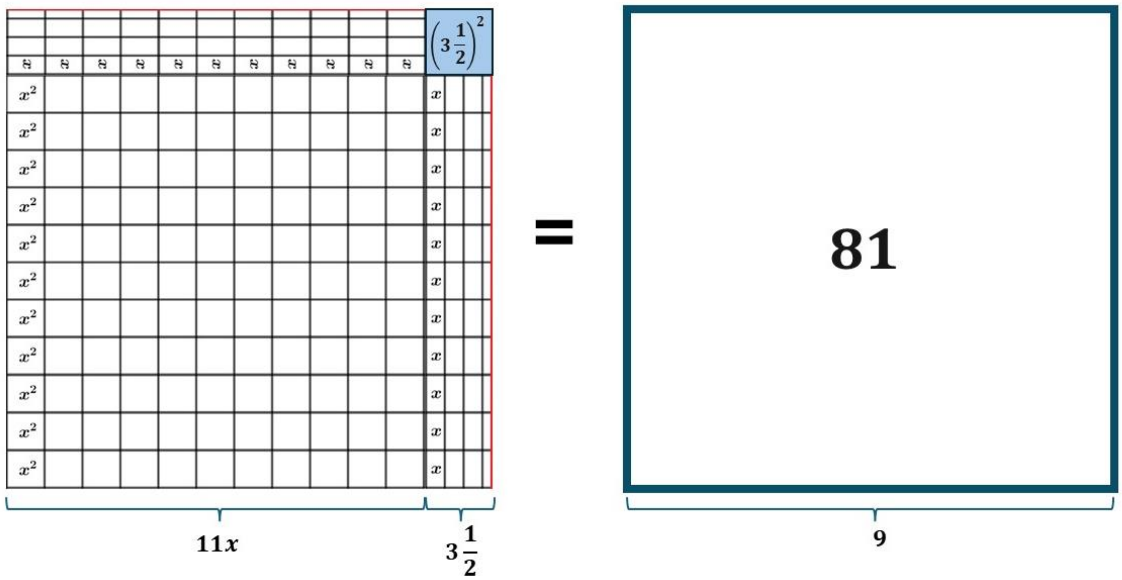


Esto es:

$$(11x)^2 + 7(11)x + 12\frac{1}{4} = 68\frac{3}{4} + 12\frac{1}{4} = 81$$

$$\left(11x + 3\frac{1}{2}\right)^2 = 9^2$$

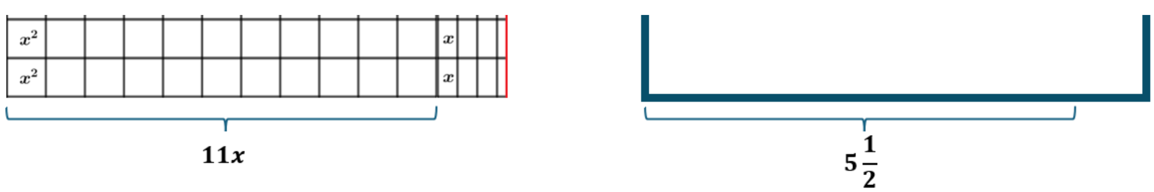
Luego expresamos a 81 como un cuadrado de lado 9:



Restar $3\frac{1}{2}$, que se multiplicó, de cada lado:

$$11x + 3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} = 9 - 3\frac{1}{2}$$

$$11x = 5\frac{1}{2}$$



$$11x = 5\frac{1}{2} = \frac{11}{2} = 11 \cdot \frac{1}{2}$$

Por lo tanto: $x = \frac{1}{2}$

En forma general para resolver una ecuación de la forma $ax^2 + bx = c$, con aquellos valores concretos para a, b, c. Tenemos que deducir x. La solución babilónica nos dice:

1. Multiplicar c por a, lo que da ac:

   $a^2x^2 + abx = ac$, y agrupando $(ax)^2 + b(ax) = ac$

2. Dividir b por 2, que es $\frac{b}{2}$
3. Elevar $\frac{b}{2}$ al cuadrado para obtener $\frac{b^2}{4}$
4. Sumar esto a ac, que es

$$(ax)^2 \quad + \quad 2\left(\frac{b}{2}\right)ax \quad + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad = \quad ac \quad + \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = ac + \frac{b^2}{4}$$

5. Tomar su raíz cuadrada. $\sqrt{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{ac + \frac{b^2}{4}} \rightarrow ax + \frac{b}{2} = \sqrt{ac + \frac{b^2}{4}}$
6. Restar $\frac{b}{2}$, lo que hace: $ax = \sqrt{ac + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}$
7. Dividir esto por a, y la respuesta es: $x = \frac{\sqrt{ac+\frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}}{a}$

Esto es equivalente a la fórmula que se enseña hoy

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

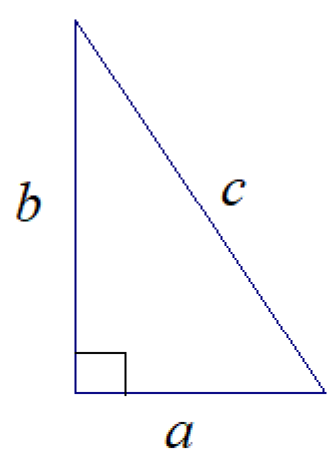
Teorema de Pitágoras

M. Sc. Juan Carlos Iglesias

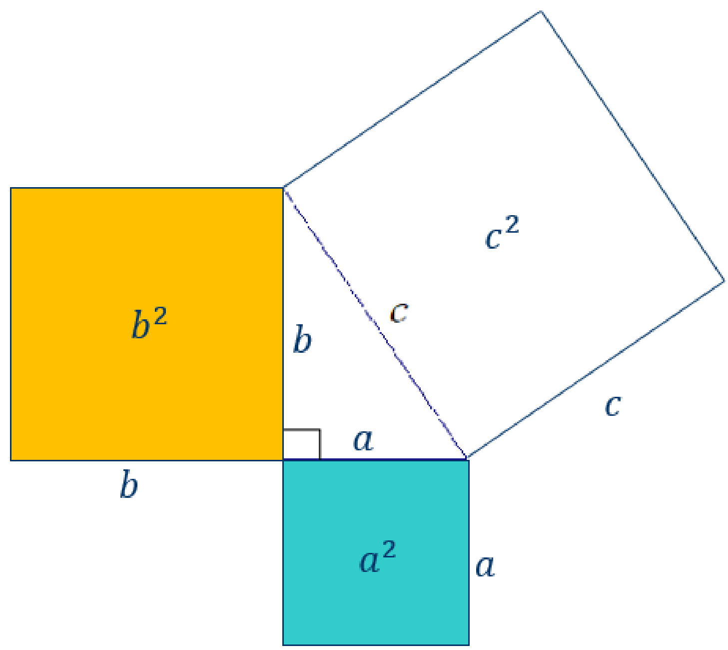
Pitágoras fue un filósofo – matemático griego que nació en la Isla de Samos, 569 – 475 a.C. Se supone que viajó por el mundo de su tiempo para acceder al conocimiento de otras civilizaciones. Fundó lo que se conoció como escuela Pitagórica. EL Teorema de Pitágoras es uno de los resultados más famosos de la geometría.

Teorema: *En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

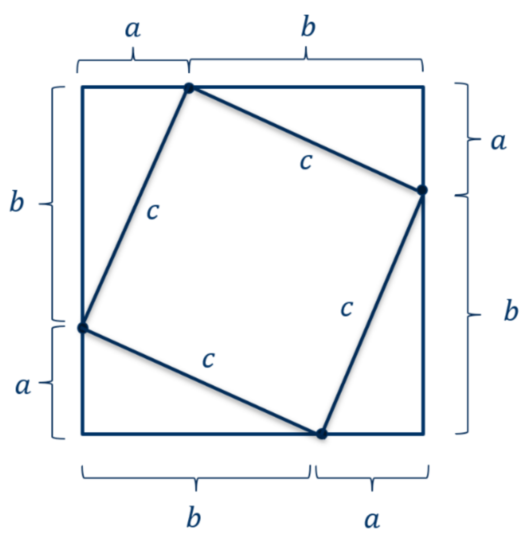
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Interpretación del teorema de Pitágoras:



Demostración 1:



$$A_{\blacksquare\, Orig} = 4A_{⊿} + A_{\blacksquare\, pequ}$$

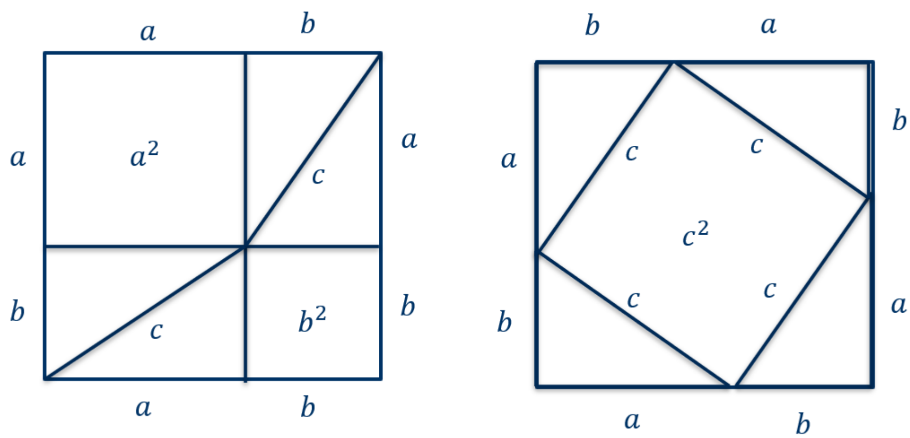
$$(a+b)^2 = 4\left[\frac{1}{2}ab\right] + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

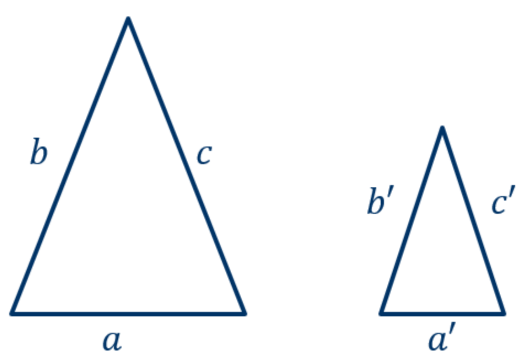
■

Demostración 2:

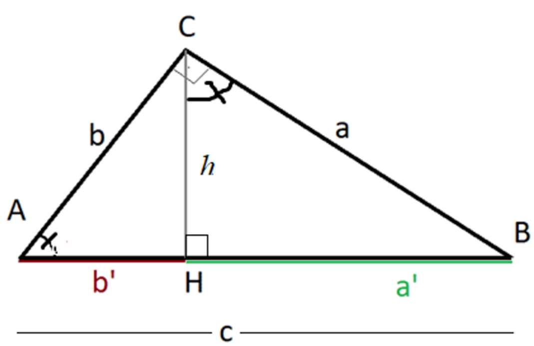


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Demostración 3: *Se presume que esta es la demostración que difundía Pitágoras:*



$$\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} = k$$



$$\Delta ACH \sim \Delta ABC$$

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{b}$$

$$\rightarrow b^2 = cb'$$

$$\Delta BCH \sim \Delta ABC$$

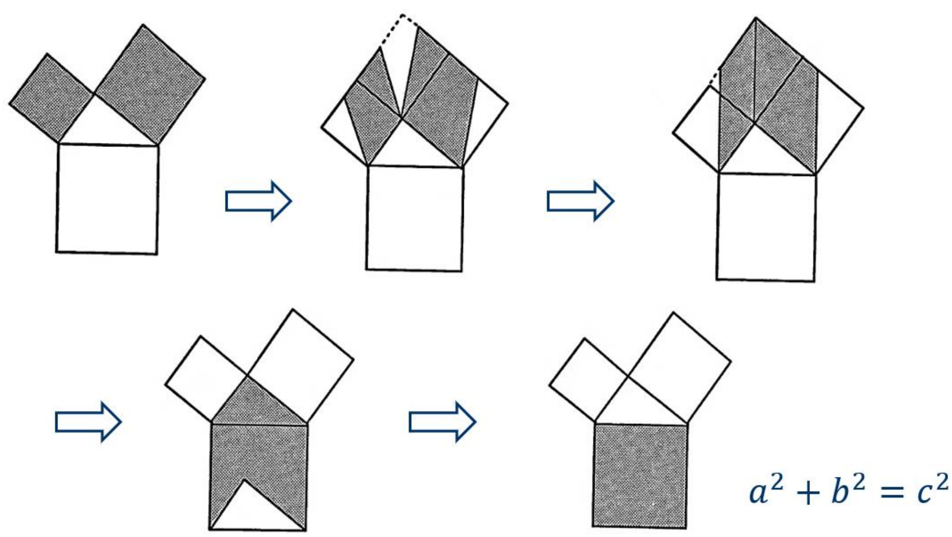
$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{a}$$

$$\rightarrow a^2 = ca'$$

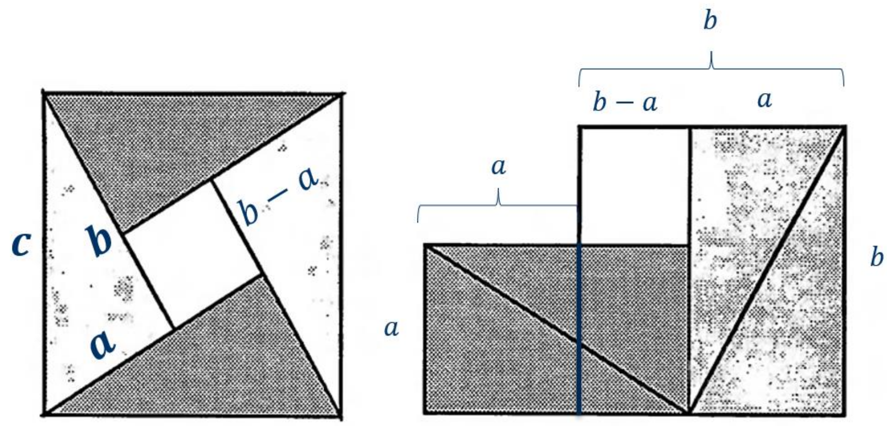
$$a^2 + b^2 = ca' + cb' = c(a' + b') = c^2$$

$$\blacksquare$$

Demostración 4: "Pappus"

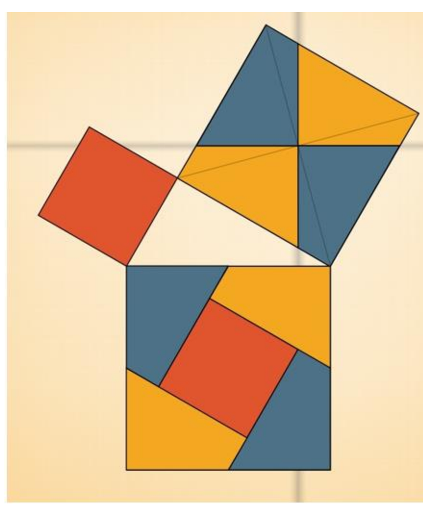


Demostración 5: “Pitágoras”

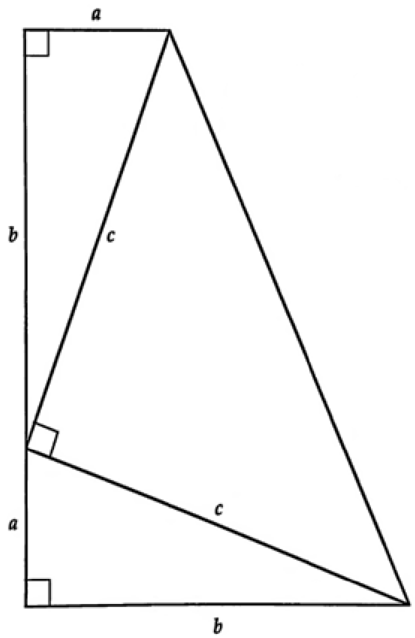


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Demostración 6: “Perigal”



Demostración 7: *James A. Garfield, 20 presidente de USA*



$$A_{Trapecio} = 2\,A_{\Delta 1} + A_{\Delta 2}$$

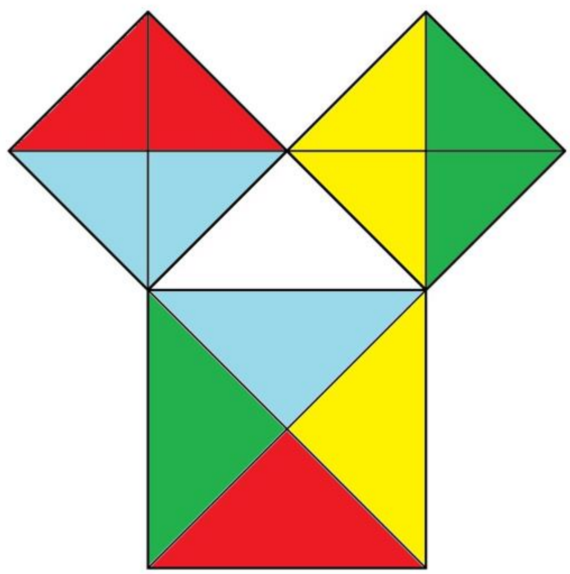
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)(a+b) = 2\left[\frac{1}{2}ab\right] + \frac{1}{2}\,c^2$$

$$\frac{1}{2}\,a^2 + ab + \frac{1}{2}\,b^2 = ab + \frac{1}{2}c^2$$

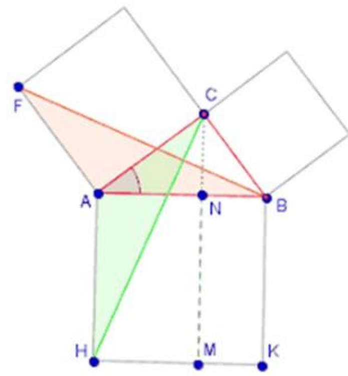
$$a^2 + b^2 = c^2$$

■

Demostración 8: "Platón" (isósceles)

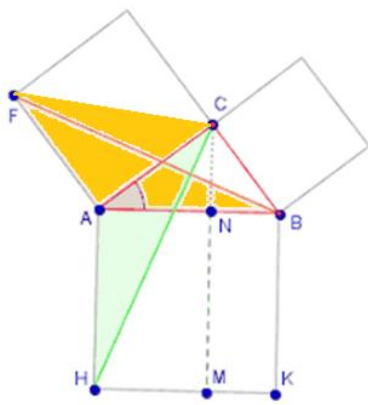


Demostración 9: "Euclides"



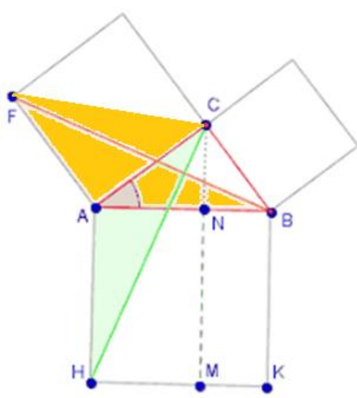
$$\triangle ABF \cong \triangle ACH \quad por\ LAL$$

$$\rightarrow A_{\triangle ABF} = A_{\triangle ACH}$$



$$\triangle ABF \cong \triangle ACH \quad por\ LAL$$

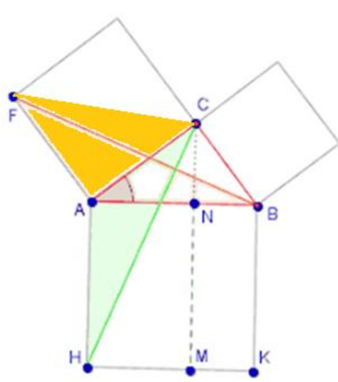
$$\rightarrow A_{\triangle ABF} = A_{\triangle ACH}$$



$$\triangle ABF \cong \triangle ACH \quad por\ LAL$$

$$A_{\triangle ABF} = A_{\triangle ACH}$$

$$A_{\triangle ABF} = A_{\triangle ACF}$$

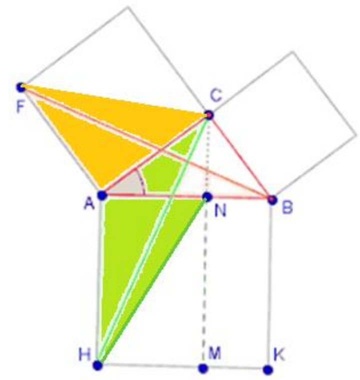


$$\triangle ABF \cong \triangle ACH \quad por\ LAL$$

$$A_{\triangle ABF} = A_{\triangle ACH}$$

$$A_{\triangle ABF} = A_{\triangle ACF}$$

$$A_{\triangle ANH} = A_{\triangle ACH}$$

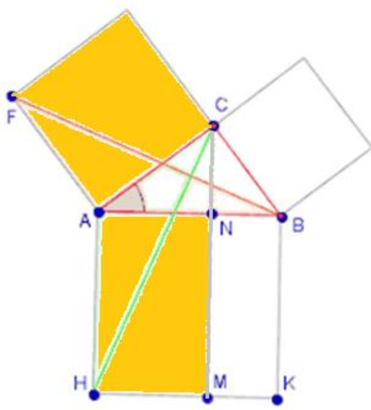


$$\triangle ABF \cong \triangle ACH \quad por\ LAL$$

$$A_{\triangle ABF} = A_{\triangle ACH}$$

$$A_{\triangle ABF} = A_{\triangle ACF}$$

$$A_{\triangle ANH} = A_{\triangle ACH}$$

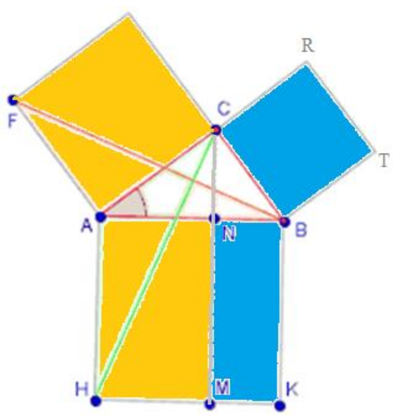


$$\triangle ABF \cong \triangle ACH \quad por\ LAL$$

$$A_{\triangle ABF} = A_{\triangle ACH}$$

$$A_{\triangle ABF} = A_{\triangle ACF}$$

$$A_{\triangle ANH} = A_{\triangle ACH}$$



$$\triangle ABF \cong \triangle ACH \quad por\ LAL$$

$$A_{\triangle ABF} = A_{\triangle ACH}$$

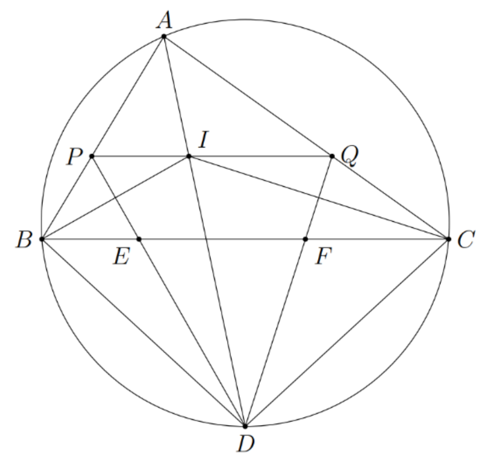
$$A_{\triangle ABF} = A_{\triangle ACF}$$

$$A_{\triangle ANH} = A_{\triangle ACH}$$

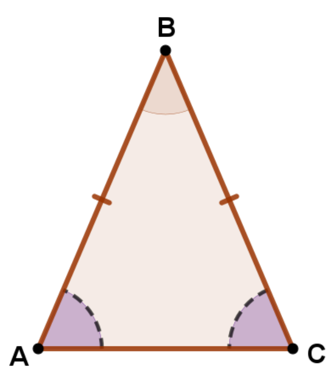
Temas involucrados en el Problema 4 de la OMCC 2024

M. Sc. Víctor Cárdenas

Problema 4. *Sea ABC un triángulo, I su incentro y Γ su circuncírculo. Sea D la segunda intersección de AI con Γ. La recta paralela a BC por I corta a AB y a AC en P y Q, respectivamente. Las rectas PD y QD cortan a BC en E y F, respectivamente. Demostrar que los triángulos IEF y ABC son semejantes.*



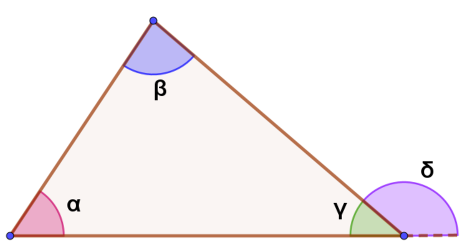
Previo a ver la demostración, se presenta los temas que se esperaba el estudiante dominará para resolver este ejercicio.



Triangulo Isósceles

$$AB = BC$$

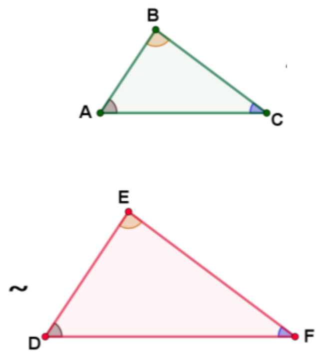
$$\measuredangle A = \measuredangle C$$



Ángulos internos de un triángulos y ángulo externo

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\delta = \alpha + \beta$$

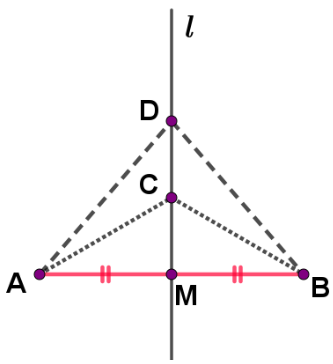


Triángulos semejantes

Sus ángulos correspondientes son iguales

y

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

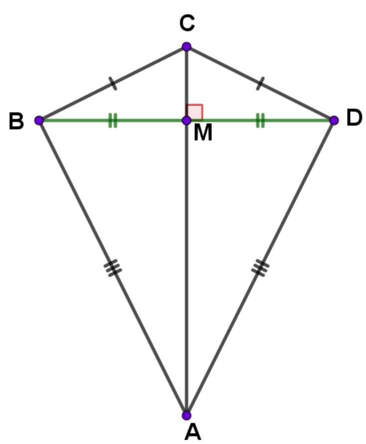


Mediatriz de un segmento

L es perpendicular a AB y lo biseca:

$$l \perp AB \text{ y } AM = MB$$

$$\forall P \in l, AP = PB$$

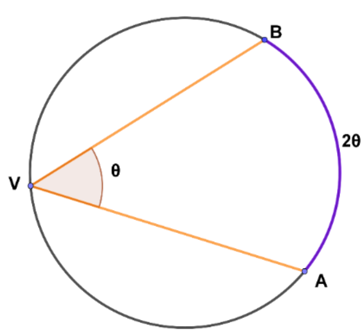


Cuadrilátero cometa

Tiene 2 pares de lados consecutivos iguales.

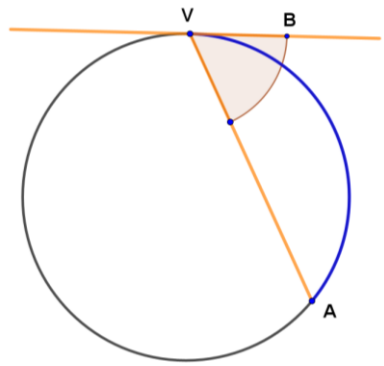
$$AB = AD \text{ y } BC = CD$$

Además, AC es mediatriz de BD



Ángulo inscrito

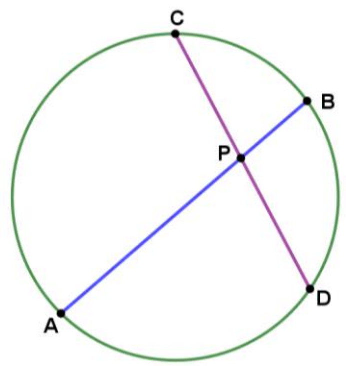
$$\measuredangle AVB = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



Ángulo semi-inscrito

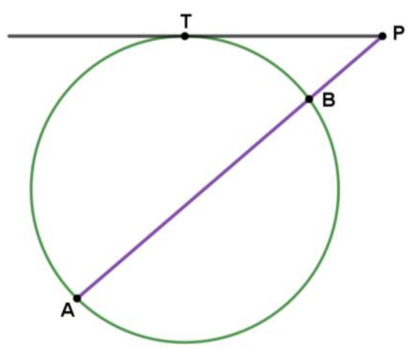
V es punto de tangencia, entonces

$$\measuredangle BVA = \frac{\widehat{AV}}{2}$$



Potencia de un punto P (interior)

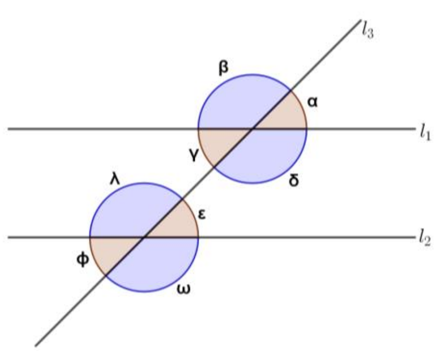
$$AP \cdot PB = PC \cdot PD$$



Potencia de un punto P (exterior)

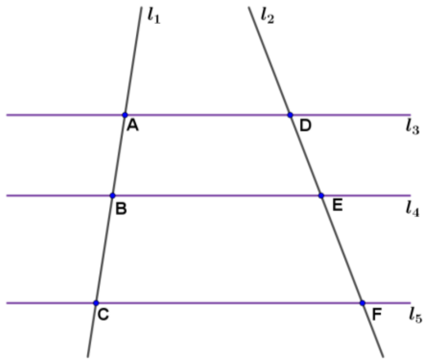
Sea PT tangente a la circunferencia, $T \in$ $Circunferencia$, entonces

$$PT^2 = PA \cdot PB$$



Ángulos entre rectas paralelas y una transversal

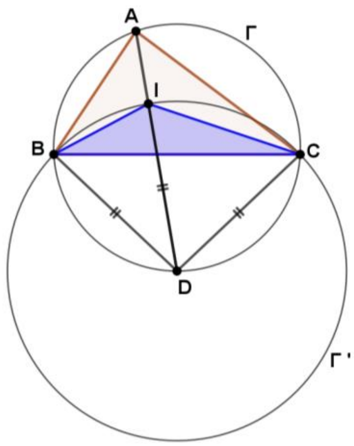
$$\alpha = \gamma = \varepsilon = \phi \ y \ \beta = \delta = \lambda = \omega$$



Teorema de Thales

Sean $l_3 \parallel l_4 \parallel l_5$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



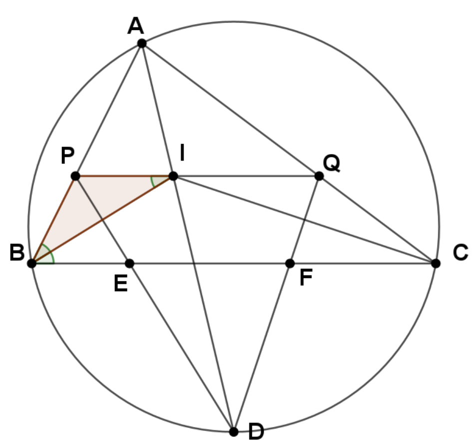
Propiedad especial: incentro y circuncentro

Sea ABC un triángulo, I su incentro, Γ su circuncírculo y D la intersección de AI con Γ; entonces, D es el circuncentro de BIC.

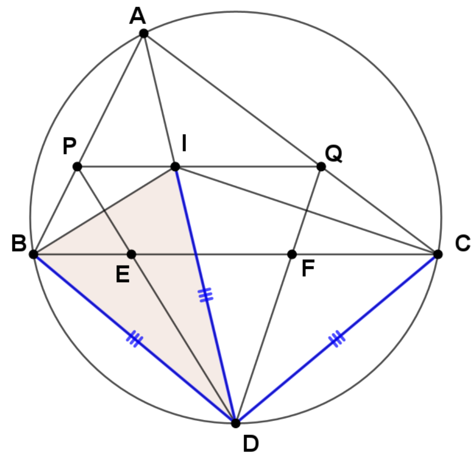
Se procede a presentar las dos soluciones esperadas para este problema:

Solución 1

1. Notar que $\triangle BPI$ es isósceles, ya que $\measuredangle PIB = \measuredangle IBE = \measuredangle PBI$

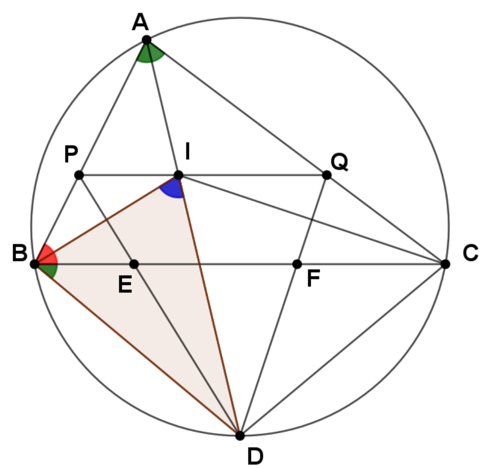


2. Luego, $\triangle BID$ también es isósceles
   - Se puede argumentar que por la propiedad de incentro – circuncentro se tiene que $DB = DC = DI$

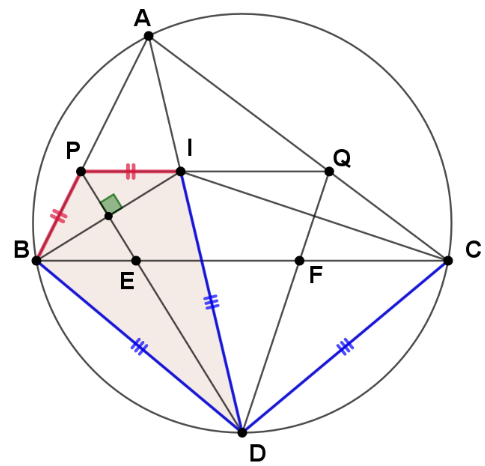


   - Alternativamente, por la igualdad de ángulos $\measuredangle DBI$ y $\measuredangle DIB$

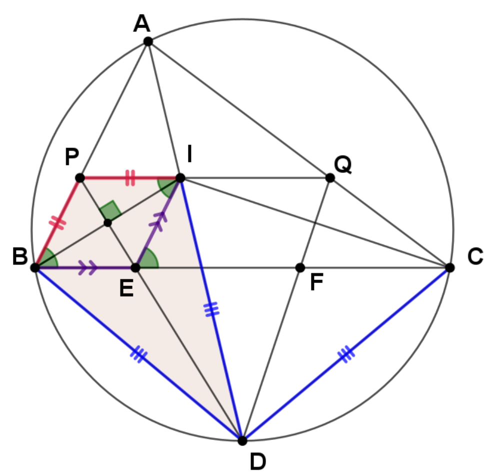
$$\measuredangle DBI = \measuredangle DBC + \measuredangle CBI = \measuredangle CBI + \measuredangle DAC = \frac{1}{2}\measuredangle B + \frac{1}{2}\measuredangle A = \measuredangle IBA + \measuredangle IAB$$
$$= \measuredangle DIB$$



3. Demostrar que $BP \parallel EI$
   a. Una forma es mostrando que el punto E está en la recta PD, que es mediatriz de BI, por lo tanto, $\triangle BEI$ es isósceles. Luego, $\measuredangle EIB = \measuredangle EBI = \measuredangle IBP$.

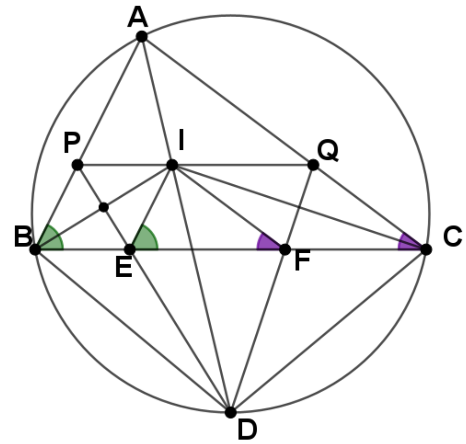


b. Alternativamente, mostrar que $BPID$ es un cometa, por lo que PD biseca a BI y PD es perpendicular BI. Además, BI biseca a PE pues es altura y bisectriz de BEP. Por lo tanto, $BEIP$ es paralelogramo.



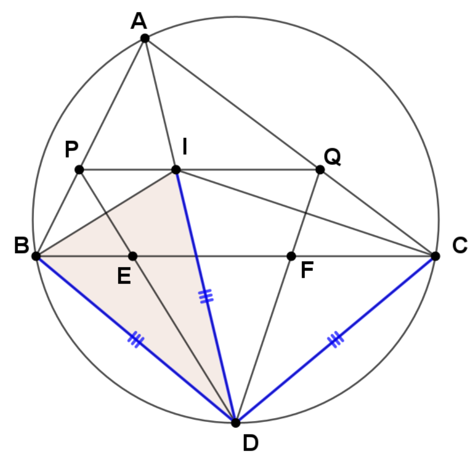
4. Concluir $\triangle ABC \sim \triangle IEF$

Indicar la analogía, que implica $IF \parallel AC$. La semejanza se puede concluir por criterio AA, pues $\measuredangle IEF = \measuredangle ABC$ y $\measuredangle IFE = \measuredangle ACB$, o también mencionando que son triángulos homotéticos.

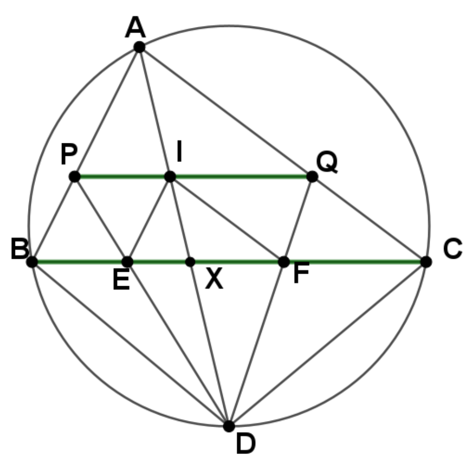


Solución 2

1. Como en la solución 1, se demuestra que $BD = BI$



2. Sea X la intersección de BC y AD. Como $PQ \parallel BC$,

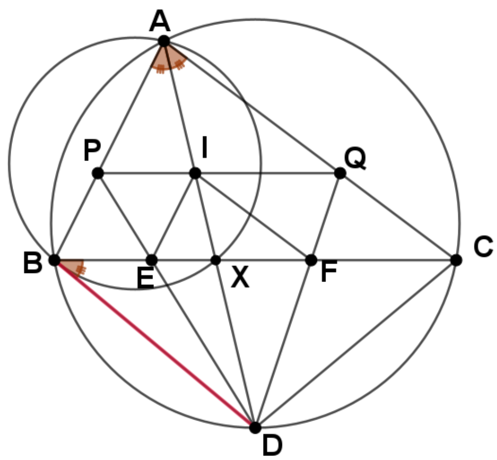


entonces por semejanza o teorema de Thales

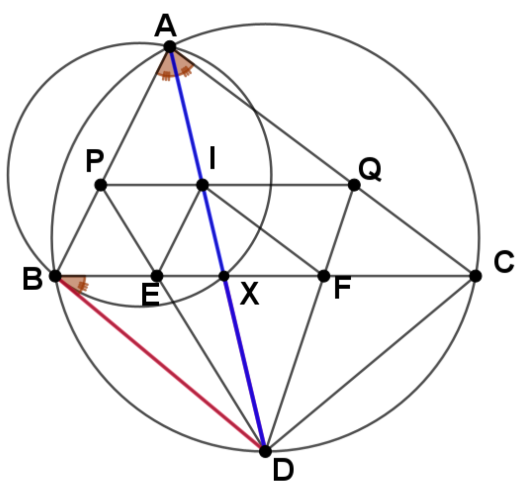
$$\frac{DE}{DP} = \frac{DX}{DI} \; y \; \frac{DX}{DI} = \frac{DF}{DQ}$$

3. La recta DB es tangente al circuncírculo de ABX, debido al teorema de ángulo semi-inscrito, pues:

$$\measuredangle DBX = \measuredangle DBC = \measuredangle DAC = \measuredangle BAD$$



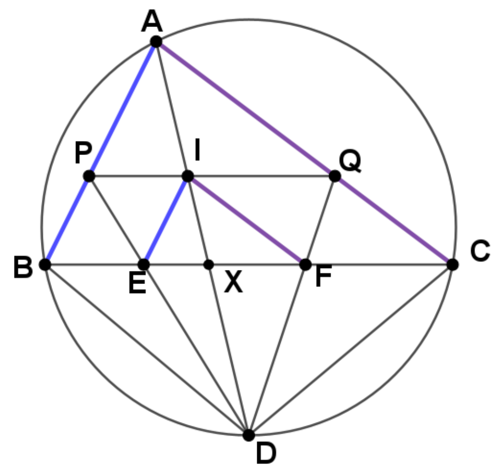
Por potencia de punto y 1 se tiene $DX \cdot DA = DB^2 = DI^2$



4. De la potencia se tiene que $\frac{DI}{DA} = \frac{DX}{DI}$ y utilizando 2 se tiene:

$$\frac{DE}{DP} = \frac{DI}{DA} \; y \; \frac{DI}{DA} = \frac{DF}{DQ}$$

Por lo tanto, $EI \parallel AB$ y $FI \parallel CA$



5. Como en la solución 1, se concluye que $\triangle IEF \sim \triangle ABC$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Capitán, F. J. G. Algunas demostraciones del Teorema de Pitágoras.

CONAMAT (Colegio Nacional de Matemáticas). (2016). *Álgebra* (4a ed.). CONAMAT. ISBN 9786073235846.

Comité Nacional de Olimpiadas de Honduras. (2024). *Examen XXVI OMCC 2024*.

Loh, P. S. (2019). A simple proof of the quadratic formula. *arXiv preprint arXiv:1910.06709*.

Moise, E. E., Downs, F. L., & Garcia, M. (1966). Geometría moderna.

Rechtman Bulajich, A. (2010). *Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras*. Revista Tzaloa, 2(1).

Quispe Rodríguez, E. (1995). *Geometría Primer Nivel* (1ra ed.). RACSO Editores.

Wikipedia. (2024, 10 de noviembre). *Matemática babilónica*. En Wikipedia, la enciclopedia libre. Recuperado el 10 de noviembre de 2024, de https://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_babil%C3%B3nica