XIII OLIMPIADA HONDUREÑA DE MATEMÁTICAS

Gracias, Lempira, 31 de octubre de 2015

SOLUCIONES DEL NIVEL I

Problema 1. Encuentre un número de dos cifras, tal que al intercambiar sus cifras se forma un nuevo número y al restarselo al original, su resultado es 45.

Solución:

Sea $n = 10a + b$ dicho número, entonces $10a + b - (10b + a) = 45 \Rightarrow 9a - 9b = 45$, de donde obtenemos que $a - b = 5$, luego un número podría ser 94.

Problema 2. Dos hormigas caminan por los lados de un cuadrado de 35 cm de lado. Comienzan a moverse simultáneamente, desde el mismo vértice y en sentidos opuestos. Una hormiga va a 1 cm/seg y la otra a 2 cm/seg. Calcular la distancia (en linea recta) que separa a las hormigas cuando han transcurrido exactamente 817 segundos desde que salieron.

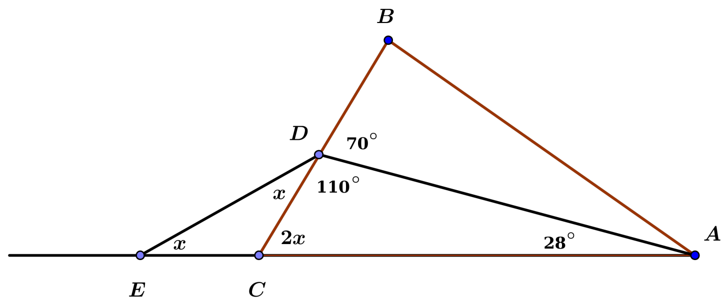
Solución:

La distancia que recorrió la primer hormiga es 817 cm (en contra de las manecillas del reloj), lo cual nos dice que recorrió 23 veces la distancia del lado del cuadrado, y 12 cm más del siguiente lado faltando 23 cm para recorrer 6 veces todo el cuadrado regresando al mismo veŕtice de donde partio.

La distancia que recorrió la segunda hormiga es 1634 cm (a favor de las manecillas del reloj), lo cual nos dice que recorrió 46 veces la distancia del lado del cuadrado, y 24 cm más del siguiente lado, faltando 11 cm para llegar al cuarto vértice (siendo el primer vértice el inicial). Por lo tanto, la distancia sería la hipotenusa del triangulo rectángulo con catetos 35 cm y (24-12) cm = 12 cm. Es decir, la distancia entre ambas hormigas es $\sqrt{35^2 + 12^2} = 37cm$.

Problema 3. Sea ABC un triángulo y D un punto del lado BC tal que $\measuredangle ADB = 70^o$ y $\measuredangle DAC = 28^o$. En la prolongación del lado AC se marca el punto E tal que $CD = CE$ (C queda entre A y E). Calcular la medida del ángulo $\angle BDE$.

Solución:



Observe que el triángulo ECD es isósceles, con $\angle DEC = \angle EDC = x$. Se deduce que $2x + 110° + 28° = 180°$, y por lo tanto $x = 21°$. Finalmente, se concluye que $\angle BDE = 180° - x = 159°$.

Problema 4. Hallar el menor entero positivo, tal que la suma de sus dígitos sea 2015 y el producto de sus dígitos sea 30^{31}.

Solución:

Note que el número buscado es, $n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{1640} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdots 5}_{31} \cdot \underbrace{8 \cdot 8 \cdots 8}_{10} \cdot \underbrace{9 \cdot 9 \cdots 9}_{15}$, puesto que $30^{31} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{1640} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot 5^{31} \cdot 8^{10} \cdot 9^{15}$, ya que la suma de sus dígitos nos da como resultado $2015 = 1 \cdot 1640 + 2 + 3 + 5 \cdot 31 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 15$.

Problema 5. Calcular el valor de la expresión

$$A = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2015^2}\right)$$

Solución:

Notemos que:

- $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2(2)}$
- $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{3} = \frac{3+1}{2(3)}$
- $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{8} = \frac{4+1}{2(4)}$

De donde se puede deducir que,

$$A = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2015^2}\right) = \frac{2015+1}{2(2015)} = \frac{2016}{4030} = \frac{1008}{2015}$$

Para justificar el resultado probaremos por inducción matemática que:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n},\ n\in\mathbb{N}$$

Supongamos que para $n=k, k\in N$, $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}$

Tomemos ahora $n=k+1$, entonces:

$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{(k+1)}{2k}\frac{[(k+1)^2-1]}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)}{2k}\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$

$=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$

Por lo tanto, queda demostrado el resultado.

Problema 6. Sean a y b dos números naturales tales que $a^2+b^2=10530$ y $\text{mcm}(a,b)=297$. Calcular a y b.

Solución:

Notemos que $297=3\cdot 3\cdot 3\cdot 11$, es decir que los números que buscamos deben estar formados por dichos factores, de donde $a=3^3=27$, y $b=3^2\cdot 11=99$, tambien satisface $a=99, b=27$.

GOBIERNO DE LA REPÚBLICA DE HONDURAS

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN

XIII OLIMPIADA HONDUREÑA DE MATEMÁTICAS

Gracias, Lempira, 31 de octubre de 2015

SOLUCIONES DEL NIVEL II

Problema 1. Encontrar todos los números de dos dígitos tal que al restarle la suma de sus dígitos el resultado es 45.

Solución:

Sea $n = 10a + b$, tal que a y b son dígitos.
Entonces $(10a + b) - (a + b) = 45 \Rightarrow 9a = 45 \Rightarrow a = 5$, y como b puede ser cualquier dígito, entonces los números buscados son 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59.

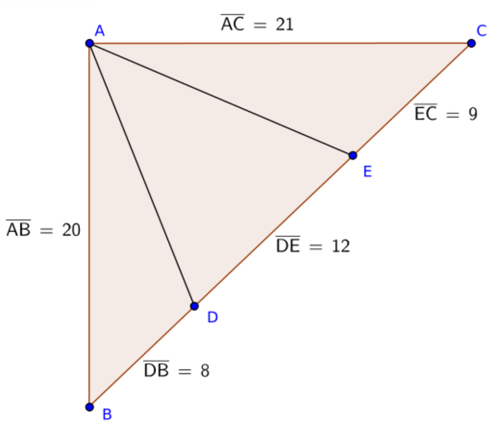
Problema 2. Lempira escribió el número n de 100 cifras, todas iguales a 9. A continuación, calculó n^2 (n elevado al cuadrado) y finalmente halló la suma de todos los dígitos de n^2. Determinar el valor de la suma que halló Lempira.

Solución:

Sea $n = \underbrace{999\cdots 9}_{100\,cifras}$, entonces $n^2 = (10^{100}-1)^2 = 10^{200}-2\cdot 10^{100}+1 = 1\ \underbrace{0\cdots 0}_{199\,cifras}\ 1-2\ \underbrace{0\cdots 0}_{100\,cifras}$, de donde obtenemos que $n^2 = \underbrace{9\cdots 9}_{99\,cifras}\,8\,\underbrace{0\cdots 01}_{100\,cifras}$, luego la suma es $s = 9\cdot 99 + 8 + 1 = 900$.

Problema 3. Sea ABC un triángulo rectángulo con $AB = 20$, $AC = 21$ y $BC = 29$. Sean D y E puntos del lado BC tales que $BD = 8$ y $EC = 9$. Calcular la medida del ángulo $\angle DAE$.

Solución:

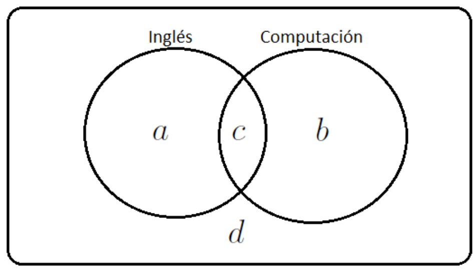


Observe que los triángulos ABE y ACD son isoceles. Por lo tanto, $180° = \angle ABE + \angle BAE + \angle AEB = \angle ABE + 2\angle BAE = \angle ABE + 2(\angle BAD + \angle DAE)$. Similarmente, $180° = \angle ACD + 2(\angle EAC + \angle DAE)$. Sumando estas dos últimas ecuaciones se deduce que $180° = \angle ABE + \angle ACD + 2\angle DAE$ Pero, $\angle ABE + \angle ACD = \angle ABC + \angle ACB = 90°$, ya que $\angle BAC = 90°$. Por lo tanto, $\angle DAE = 45°$.

Problema 4. En un colegio, el 81 % de los alumnos estudia inglés y el 80 % de los alumnos estudia computación. La proporción de los alumnos que estudian inglés entre los que estudian computación es igual al doble de la proporción de los alumnos que estudian inglés entre los que no estudian computación. Hallar el porcentaje de alumnos de la escuela que no estudia ni inglés ni computación.

Solución:

Sean a la cantidad de alumnos que estudian inglés pero que no estudia computación.
b la cantidad de alumnos que estudian computación pero no estudia inglés.
c la cantidad de alumnos que estudian inglés y computación.
d la cantidad de alumnos que no estudian inglés ni computación.



Por hipótesis se tiene que $\dfrac{c}{b+c} = 2\dfrac{a}{a+d}$, de donde

$$\frac{c}{a} = 2\frac{b+c}{a+d} \tag{1}$$

Por otra parte, $\dfrac{b+c}{a+b+c+d} = \dfrac{80}{100}$, luego

$$\frac{a+d}{a+b+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} - \frac{b+c}{a+b+c+d} = 1 - \frac{80}{100} = \frac{20}{100}$$

Remplazando en (1) resulta que $\dfrac{c}{a} = 2\dfrac{\frac{80}{100}}{\frac{20}{100}} = 8 \Rightarrow c = 8a$.

Dado que el 81 % de los alumnos estudia inglés

$$\frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{9a}{a+b+c+d} = \frac{81}{100}$$

De donde se deduce que $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{9}{100}$, finalmemte

$$\frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+d}{a+b+c+d} - \frac{a}{a+b+c+d} = \frac{20}{100} - \frac{9}{100} = \frac{11}{100}$$

Por lo tanto, los alumnos que no estudian ni inglés ni computación son el 11 %.

Problema 5. Mario escribió 13 números consecutivos, para ello utilizó: tres veces el 0, una vez el 1, catorce veces el 2, una vez el 3, una vez el 4, una vez el 5, catorce veces el 6, una vez el 7, dieciséis veces el 8 y trece veces el 9. ¿Cuáles son los 13 números consecutivos que pudo escribir Mario? Escriba todas las posibilidades.

<u>**Solución:**</u>

Sean $n, n+1, \ldots, n+12$ los números que escribió Mario, la cantidad de dígitos que utilizó se pueden resumir en la siguiente tabla:

dígito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cantidad	3	1	14	1	1	1	14	1	16	13

Observe que los trece números son de 5 dígitos, ya que

$$3+1+14+1+1+1+14+1+16+13 = 65 = 5 \cdot 13$$

Para un número natural m defina $d_i(m)$ como el dígito que ocupa la posición i, de derecha a izquierda, del número m, es decir, $d_1(m)$ representa el dígito de las unidades de m, $d_2(m)$ el dígito de las decenas de m, $d_3(m)$ el dígito de las centenas de m y así sucesivamente.[1]

Note que $d_1(n) = d_1(n+10)$, $d_1(n+1) = d_1(n+11)$ y $d_1(n+2) = d_1(n+12)$, por tanto deben haber tres dígitos consecutivos que Mario escribió al menos 2 veces cada uno. Esto implica que $d_1(n) = 8$. Luego, Mario utilizó en los dígitos de las unidades de los trece números: una vez los números del 1 al 7 y dos veces los números 8, 9 y 0.

Cantidad de dígitos restantes

dígito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cantidad	1	0	13	0	0	0	13	0	14	11

Como $d_1(n) = 8$, para los dígitos de las decenas de los trece números se tiene que:

$$\begin{array}{rr} d_2(n+1) = d_2(n) & 2 \text{ veces el dígito } d_2(n) \\ d_2(n+2) = \cdots = d_2(n+11) = d_2(n)+1 & 10 \text{ veces el dígito } d_2(n)+1 \ (mod\ 10) \\ d_2(n+12) = d_2(n)+2 & 1 \text{ vez el dígito } d_2(n)+2 \ (mod\ 10) \end{array}$$

Contrastando con la tabla anterior se observa que la única posibilidad es que $d_2(n) = 8$. Es decir, se utilizaron en las decenas, dos veces el número 8, diez veces el número 9 y una vez el 0.

Cantidad de dígitos restantes

dígito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cantidad	0	0	13	0	0	0	13	0	12	1

Como $d_1(n) = d_2(n) = 8$, para los dígitos de las centenas de los trece números se tiene que:

$$\begin{array}{rr} d_3(n+1) = \cdots = d_3(n+11) = d_3(n) & 12 \text{ veces el dígito } d_3(n) \ (mod\ 10) \\ d_3(n+12) = d_3(n)+1 & 1 \text{ vez el dígito } d_2(n)+1 \ (mod\ 10) \end{array}$$

Por lo tanto, la única opción es que $d_3(n) = 8$, es decir, para los dígitos de las centenas de los trece números se utilizaron doce veces el número 8 y una vez el número 9.

[1] Para cada i defina $m_i = m \ (mod\ 10^i)$, entonces $d_1(m) = m_1$ y para $i > 1$, $d_i(m) = \frac{m - m_{i-1}}{10^{i-1}} \ (mod\ 10)$.

Cantidad de dígitos restantes

dígito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cantidad	0	0	13	0	0	0	13	0	0	0

Ahora, las únicas dos opciones posibles son: $d_4(n) = 2, d_5(n) = 6$ y $d_4(n) = 6, d_5(n) = 2$. Por tanto, todas las posibilidades de los trece números que pudo escribir Mario son:

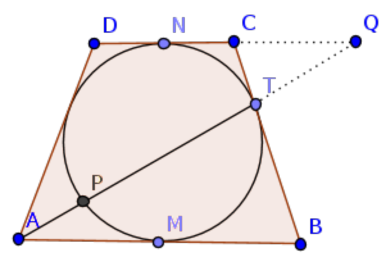
$26,888 \quad 26,889 \quad 26,890 \quad 26,891 \quad 26,892 \quad 26,893 \quad 26,894 \quad 26,895 \quad 26,896 \quad 26,897 \quad 26,898 \quad 26,899 \quad 26,900$

y

$62,888 \quad 62,889 \quad 62,890 \quad 62,891 \quad 62,892 \quad 62,893 \quad 62,894 \quad 62,895 \quad 62,896 \quad 62,897 \quad 62,898 \quad 62,899 \quad 62,900$

Problema 6. El trapecio isósceles $ABCD$ de bases AB y CD tiene una circunferencia k que es tangente a sus cuatro lados. Sea T el punto de tangencia de k con el lado BC, y P es el segundo punto de intersección de AT con k. Si se sabe que $\dfrac{AP}{AT} = \dfrac{2}{5}$, calcular $\dfrac{AB}{CD}$.

Solución:



Como $ABCD$ es isósceles, k toca a las bases AB y CD en sus puntos medios M y N respectivamente. Sea $AB = 2a$ y $CD = 2b$, por ser el trapecio isósceles y segmentos de tangentes obtenemos que $AM = BM = BT = a$ y $CN = CT = b$, también por potencia de un punto respecto de k,

$$AP \cdot AT = AM^2 = a^2. \tag{2}$$

Si prolongamos AT y CD hasta que se corten en Q, con esto los triángulos $\triangle ABT$ y QCT son semejantes por ser $AB \| CD$, y AQ con CB son segmentos transversales a estos. Como $AB = 2BT$ obtenemos $QC = 2CT = 2b$. Entonces $QN = QC + CN = 2b + b = 3b$, de modo que, nuevamente por potencia de punto de un punto,

$$QP \cdot QT = QN^2 = 9b^2. \tag{3}$$

De la semejanza se tiene $\frac{AT}{QT} = \frac{BT}{CT} = \frac{a}{b}$. Ahora usando (2) y (3) para obtener $\frac{a^2}{9b^2} = \frac{AP \cdot AT}{QP \cdot QT} = \frac{AP}{QP} \cdot \frac{a}{b}$; luego $\frac{AP}{QP} = \frac{a}{9b}$.
Por otra parte

$$\frac{AP}{QP} = \frac{AT - PT}{QT + PT} = \frac{1 - \frac{PT}{AT}}{\frac{QT}{AT} + \frac{PT}{AT}}.$$

Como $\frac{PT}{AT} = \frac{AT-AP}{AT} = 1 - \frac{AP}{AT}$, la condición $\frac{AP}{AT} = \frac{2}{5}$ nos da $\frac{PT}{AT} = \frac{3}{5}$. En consecuencia,

$$\frac{a}{9b} = \frac{AP}{QP} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{\frac{b}{a} + \frac{3}{5}},$$

que conduce a $\frac{a}{b} = \frac{13}{3}$. De modo que la respuesta es $\frac{AB}{CD} = \frac{13}{3}$.

XIII OLIMPIADA HONDUREÑA DE MATEMÁTICAS

Gracias, Lempira, 31 de octubre de 2015

SOLUCIONES DEL NIVEL III

Problema 1. Encontrar todos los números de tres dígitos tal que al restarle la suma de sus dígitos el resultado es 450.

Solución:

Sea $n = 100a + 10b + c$, tal que a, b y c son dígitos.
Entonces $(100a + 10b + c) - (a + b + c) = 450 \Rightarrow 99a + 9b = 450 \Rightarrow 11a + b = 50$, de donde se nota que $a = 4$, $b = 6$ es la única solución, entonces los números buscados son 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469.

Problema 2. Se tienen 26 tarjetas y cada una tiene escrito un número. Hay dos con el 1, dos con el 2, dos con el 3, y así siguiendo hasta dos con el 12 y dos con el 13. Hay que distribuir las 26 tarjetas en pilas de manera que se cumplan las dos condiciones siguientes:

- Si dos tarjetas tienen el mismo número están en la misma pila.
- Ninguna pila contiene una tarjeta cuyo número es igual a la suma de los números de dos tarjetas de esa misma pila.

Determinar cuál es el mínimo número de pilas que hay que hacer.

Solución:

Probaremos que el mínimo de pilas es tres, denotaremos con (i, i) el par de tarjetas con el mismo número i, para $i = 1, 2, 3, \ldots 13$.
Supongamos que tenemos dos pilas, entonces iremos colocando las tarjetas de forma obligada.
Notemos que al principio tendremos $\{\underbrace{(1,1)}_{pila\,1} \,|\, \underbrace{(2,2)}_{pila\,2}\}$, ya que $1 + 1 = 2$,

luego en segundo lugar$\{\underbrace{(1,1),(4,4)}_{pila\,1} \,|\, \underbrace{(2,2)}_{pila\,2}\}$ ya que $2 + 2 = 4$,

luego en el tercer paso $\{\underbrace{(1,1),(4,4)}_{pila\,1} \,|\, \underbrace{(2,2),(5,5),(8,8)}_{pila\,2}\}$, ya que $4 + 4 = 8$, y $1 + 4 = 5$,

luego note que la pareja $(3, 3)$ ya no puede ir en ninguna de las pilas, puesto que $1 + 3 = 4$, y $2 + 3 = 5$, esto prueba que necesitamos más de dos pilas.
luego una posible distribución sería:

$$\{\underbrace{(1,1),(4,4),(7,7),(10,10),(13,13)}_{pila\,1} \,|\, \underbrace{(2,2),(3,3),(11,11),(12,12)}_{pila\,2} \,|\, \underbrace{(5,5),(6,6),(8,8),(9,9)}_{pila\,3}\}$$

Problema 3. Sean a, b, c las tres raíces de la ecuación $3x^3 + x + 2015 = 0$. Encuentra

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3.$$

Solución:

Como a, b, c son raíces de la ecuación se cumple que $a+b+c = 0$ y $abc = -\frac{2015}{3}$, también $3a^3 + a + 2015 = 0$, $3b^3 + b + 2015 = 0$ y $3c^3 + c + 2015 = 0$, que sumando estas últimas se obtiene

$$3(a^3 + b^3 + c^3) + (a+b+c) + 3(2015) = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -2015.$$

Con esto

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 = (-c)^3 + (-a)^3 + (-b)^3 =$$
$$= -(a^3 + b^3 + c^3) = -(-2015) = 2015.$$

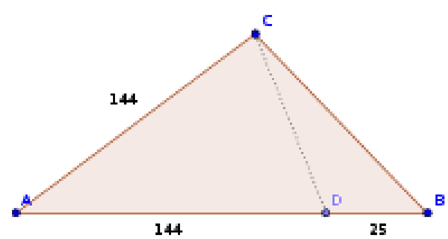
Problema 4. Sea ABC un triángulo tal que $AB = 169$, $AC = 144$ y $3\measuredangle A + 2\measuredangle B = 180°$. Calcular la medida del lado BC.

Solución:

En el triángulo ABC tenemos que $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180° = 3\measuredangle A + 2\measuredangle B$, luego

$$\measuredangle C = 2\measuredangle A + \measuredangle B$$

Sea D en el lado AB tal que $AD = 144$. El triángulo ACD es isósceles, con $\measuredangle ACD = \measuredangle ADC = \dfrac{180° - \measuredangle A}{2} = \measuredangle A + \measuredangle B$.



Entonces, el triángulo CBD tiene $\measuredangle BCD = 2\measuredangle A + \measuredangle B - (\measuredangle A + \measuredangle B) = \measuredangle A$ y $\measuredangle CBD = \measuredangle B$, por lo que es semejante al triángulo ABC. Por lo tanto, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{BD}$, es decir,

$$BC^2 = AB \cdot BD$$

Como $BD = AB - AD = 169 - 144 = 25$, $BC^2 = 169 \cdot 25$, de donde resulta $BC = 65$.

Problema 5. Lempira hace la lista, en orden ascendente, de los primeros 2015 números naturales cuya suma de dígitos es igual a 5. ¿Cuál es el último número de la lista de Lempira?

Solución:

Sea x un número de los de la lista de Lempira. Si x tiene a los más k-dígitos, entonces podemos escribir $x = \overline{x_1 x_2 \cdots x_k}$, donde $0 \leq x_i \leq 5$ y $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 5$. Observe que contar cuantos número de la lista de Lempira de a lo más k-dígitos es un problema de permutaciones con repetición. Por lo tanto hay

$$f(k) = \frac{(k+4)!}{(k-1)!\ 5!}$$

de a los más k-dígitos en la lista de Lempira. El valor de $f(k)$ más cercano a 2015 se obtiene para $k = 10$, $f(10) = 2002$. Esto significa que el número más grande de 10-dígitos es el número 5000000000 y está en la posición 2002. Luego, el número de la posición 2015 lo encontramos haciendo la siguiente lista:

posición	número	posición	número	posición	número
2002	5000000000	2008	10000000103	2014	10000000220
2003	10000000004	2009	10000000112	2015	10000000301
2004	10000000013	2010	10000000121		
2005	10000000022	2011	10000000130		
2006	10000000031	2012	10000000202		
2007	10000000040	2013	10000000211		

Por lo tanto, el número de la posición 2015 en la lista de Lempira es 10000000301.

Problema 6. Diremos que un entero positivo n es increíble si tiene dos divisores positivos d_1, d_2 tales que $n = (d_1 - 1)(d_2 + 3)$. Hallar todos los números increíbles.

Solución 1 Como d_1 y d_2 son divisores de n se tiene que esxisten enteros positivos a y b tales que $n = (d_1 - 1)(d_2 + 3)$, $n = ad_1$ y $n = bd_2$, con esto y la igualdad $n = (d_1 - 1)(d_2 + 3) = d_1 d_2 + 3d_1 - d_2 - 3$ obtenemos que $d_2 + 3 = ld_1$ y $3(d_1 - 1) = md_2$ para enteros positivos l y m, por lo que $d_2 = ld_1 - 3$ y

$$3(d_1 - 1) = m(ld_1 - 3) \Leftrightarrow d_1(lm - 3) = 3(m - 1).$$

También obtenemos que $d_2(lm - 3) = 3(3 - l)$
En ambas ecuaciones tenemos tres casos:
Caso I: Si $lm < 3$ entonces $3(m-1) = d_1(lm-3) < 0 \Rightarrow m < 1$, que no es posible.
Caso II: Si $lm > 3$ entonces $3(3-l) = d_2(lm-3) > 0 \Rightarrow l < 3$, es decir $l = 1, 2$.
i) Si $l = 1$ entonces $d_2 = \frac{6}{m-3}$, $d_1 = \frac{3(m-1)}{m-3}$, como d_2 y d_1 son enteros positivos, los posibles valores de m son $4, 5, 6, 9$, de esto

$$d_2 = 6, d_1 = 9, n = (8)(9) = 72$$

$$d_2 = 3, d_1 = 6, n = (5)(6) = 30$$

$$d_2 = 2, d_1 = 5, n = (4)(5) = 20$$

$$d_2 = 1, d_1 = 4, n = (3)(4) = 12$$

ii) Si $l = 2$ entonces $d_2 = \frac{3}{2m-3}$, $d_1 = \frac{3(m-1)}{2m-3}$, como d_2 y d_1 son enteros positivos, los posibles valores de m son $2, 3$, de esto

$$d_2 = 3, d_1 = 3, n = (2)(6) = 12(repetido)$$

$$d_2 = 1, d_1 = 2, n = (1)(4) = 4$$

Caso III: Si $lm = 3$ entonces $l = 3, m = 1$ y $d_2 = 3(d_1 - 1)$ por lo que $n = 3d_1(d_1 - 1)$ para cualquier entero $d_1 > 1$. En resumen los números increibles son: $4, 12, 20, 30, 72$ y todos los de la forma $3d_1(d_1 - 1)$ para cualquier entero $d_1 > 1$.

Solución 2

Consideremos un número increíble n y sean $d_1,\ d_2$ los correspondientes divisores; notemos que $d_1 \geq 2$. Como d_1 divide a $n = (d_1 - 1)(d_2 + 3)$ y $\text{mcd}(d_1, d_1 - 1) = 1$, vemos que d_1 divide a $d_2 + 3$. Luego $d_2 + 3 = kd_1$ para algún entero $k \geq 1$. Además, d_2 divide a $n = (d_1 - 1)(d_2 + 3) = (d_1 - 1)d_2 + 3(d_1 - 1)$, entonces d_2 divide a $3(d_1 - 1)$. Esto último implica que $d_2 \leq 3d_1 - 3$.

Si $k \geq 3$ entonces $d_2 + 3 = kd_1 \geq 3d_1$. Esto, combinado con $d_2 \leq 3d_1 - 3$ conduce a $d_2 + 3 = 3d_1$. Reemplazando $l = d_1 - 1 \geq 1$ obtenemos que n tiene la forma:

$$n = (d_1 - 1)(d_2 + 3) = l \cdot 3d_1 = 3l(l + 1)$$

Reciprocamente, cada número $n = 3l(l + 1)$ con $l \geq 1$ es increible. En efecto, elegimos $d_1 = l + 1$, $d_2 = 3l$. Es claro que $d_1,\ d_2$ dividen a n, y $(d_1 - 1)(d_2 + 3) = 3l(l + 1) = n$.

Si $k = 2$ entonces $d_2 + 3 = 2d_1 \Leftrightarrow d_2 = 2d_1 - 3$. Como d_2 divide a $3d_1 - 3$, también debe dividir a $(3d_1 - 3) - (2d_1 - 3) = d_1$. De modo que $d_2 \leq d_1$, lo que implica que $2d_1 - 3 \leq d_1 \Leftrightarrow d_1 \leq 3$.

Las únicas posibilidades son $d_1 = 2$ y $d_1 = 3$, que conducen a $d_2 = 1$ y $d_2 = 3$, respectivamente. Los correspondientes n son $n = 4$ y $n = 12$. Se verifica directamente que son increÃbles.

Si $k = 1$ entonces $d_2 + 3 = d_1$, luego $n = (d_1 - 1)(d_2 + 3) = d_1(d_1 - 1)$ y además $d_1 \geq 4$. Aquí $d_1 - 3 = d_2$ divide a $3(d_1 - 1) = 3d_1 - 3$, de modo que $d_1 - 3$ también divide a $(3d_1 - 3) - 3(d_1 - 3) = 6$.

Como $d_1 - 3 > 0$ (pues $d_1 \geq 4$), se deduce que $d_1 - 3 \in \{1, 2, 3, 6\} \Leftrightarrow d_1 \in \{4, 5, 6, 9\} \Rightarrow n = d_1(d_1 - 1) \in \{12, 20, 30, 72\}$.

Se comprueba directamente que los cuatros valores de n obtenidos son increíbles; $n = 12$ ya estaba presente en el caso $k = 2$.

En resumen, los valores increíbles de n son 4, 12, 20, 30, 72 y también todos los n de la forma $n = 3l(l + 1)$ con $l \geq 1$. Los cinco valores excepcionales no se pueden obtener de la fórmula anterior para ningún l.