XIV OLIMPIADA HONDUREÑA DE MATEMÁTICAS

22 de Octubre del 2016

SOLUCIONES DE NIVEL I

Problema 1. En el colegio hay 1360 estudiantes inscritos. De los estudiantes inscritos $\frac{3}{5}$ se anotaron en el jornada de la mañana. De los estudiantes de la jornada de la mañana, $\frac{1}{4}$ van al Kinder, $\frac{2}{3}$ van a la primaria y los demás van a la secundaria. ¿ Cuántos estudiantes van a la secundaria en la jornada de la mañana?

Solución:

El número de estudiantes que van en la jornada de la mañana es: $\frac{3}{5}(1360) = 816$, de estos van $\frac{1}{4}(816) = 204$ al Kinder, $\frac{2}{3}(816) = 544$ van a la primaria , y es resto $816 - 204 - 544 = 68$ van a secundaria.

También se puede:

De los 816 van a secundaria $(1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3})(816) = \frac{1}{12}(816) = 68$.

Problema 2. Un grupo de 7 mujeres necesitan 35 segundos para hacer 7 Quesadillas. ¿Cuántas Quesadillas hacen un grupo de 55 mujeres si se tardan 2016 segundos?

Solución:

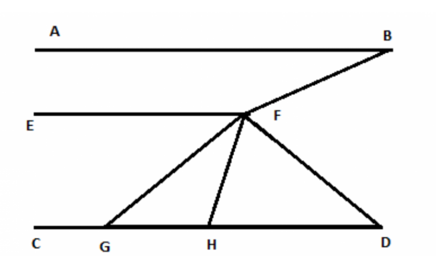
Como 7 mujeres necesitan 35 segundos para hacer 7 Quesadillas entonces 1 mujeres necesitan 35 segundos para hacer 1 Quesadilla y de esto se tiene que 55 mujeres necesitan 35 segundos para hacer 55 Quesadillas o 55 mujeres necesitan 2016 segundos para hacer $55\frac{2016}{35} = 3168$ Quesadillas

Problema 3. Sea a un número de cinco dígitos con todas las cifras distintas. b es un número de cuatro dígitos, donde la suma de los dígitos es 3. ¿Cuál es el valor máximo de $a - b$?.

Solución:

a debe tener cinco cifras diferentes y b cuatro cifras que sumen 3, para que $a - b$ sea lo más grande posible, a tiene que ser lo más grande posible y b lo más pequeño que se pueda, entonces a es: 98765 y b es: 1002, por lo que $a - b = 98765 - 1002 = 97763$.

Problema 4. En la figura, AB, CD y EF son todas paralelas. $\measuredangle ABF = 20°$, $\measuredangle DFB = 80°$ y $\measuredangle DHF = 80°$, ¿cuál es el valor de $\measuredangle DFH$?.



Solución:

Al prolongar EF hasta un punto F', se obtendría que: $\measuredangle BFF' = 20°$ y $\measuredangle EFH = 80°$ por ángulos alternos internos, con esto se encuentra que $\measuredangle DFF' = 60°$ y concluimos que: $\measuredangle DFH = 180° - 80° - 60° = 40°$.

Problema 5. $956ab2$ es un número, donde a, b son dígitos y este número es divisible entre 11 y 6. ¿Cuál es la suma $a + b$?

Solución:

La respuesta pueden ser:$5, 8$ u 11.

Veamos porque:

Se necesita que sea múltiplo de 6, es decir múltiplo de 2 y 3, pero es múltiplo de 2 y para que sea divisible por 3 es necesario que $9 + 5 + 6 + a + b + 2 = a + b + 22$ sea múltiplo de 3.

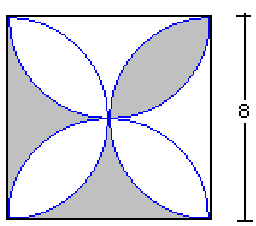
Por otro lado tiene que ser múltiplo de 11 o sea $9 + 6 + b - (5 + a + 2) = b - a + 8$ tiene que ser múltiplo de 11.

De estó último se tiene que: $b - a = -8$ o $b - a = 3$.

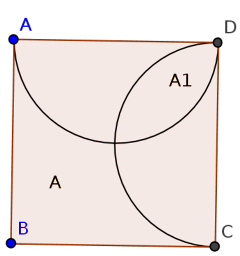
i) Si $b - a = -8 \Leftrightarrow b = a - 8$ y $a \geq 8$ entonces $a + a - 8 + 22 = 2a + 14$ es múltiplo de 3, el único valor que cumples es $a = 8 \to b = 0$, es decir el número es: 956802 y $a + b = 8$.

ii) Si $b - a = 3 \Leftrightarrow b = a + 3$ y $a \leq 6$ entonces $a + a + 3 + 22 = 2a + 25$ es múltiplo de 3, los posibles valores de a son $a = 1, 4 \to b = 4, 7$ respectivamente, es decir el número puede ser 956142 o 956472 y $a + b = 5, 11$.

Problema 6. Encuentre el área sombreada de



Solución:



El área somreada es equivalente a encontrar el área A de la figura.

Observemos que el área A deseada es:

$A = A_{cuadrado} - A_c + A_1$, donde A, A_1 se observan en la figura y A_c es el área de un círculo el cual se forma con dos de los semicírculos de la figura.

i) $A_c = \pi(4)^2 = 16\pi$

ii) $A_1 = 2(\frac{1}{4}\pi(4)^2 - \frac{1}{2}(4)^2) = 8\pi - 16$

Con esto el área sombreada es: $A = 8^2 - 16\pi + (8\pi - 16) = 48 - 8\pi$

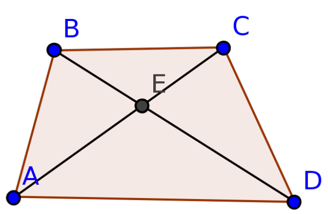
Respuesta es: $48 - 8\pi$

XIV OLIMPIADA HONDUREÑA DE MATEMÁTICAS
22 de Octubre del 2016
SOLUCIONES DE NIVEL II

Problema 1. Una abuela, su hija y su nieta pudieron decir en el año 2016 que la suma de sus edades era 100. ¿En qué año nació la nieta, si cada edad es una potencia de 2?
Solución:
Como los años son potencias de dos, las posibilidades son: $2, 4, 8, 16, 32, 64$, no pueden tener edades iguales y entre la abuela y la nieta tiene que haber una diferencia considerable. Los valores que resulta son: Abuela 64, Madre 32 y nieta 4. Por lo que la nieta nació en el 2012.

Problema 2. Mariano multiplica los enteros pares positivos consecutivos $(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots)$ hasta que el resultado sea divisible entre 2016. ¿Cuál es el último factor por el cual multiplicó Mariano?
Solución:
Observemos que $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k) = 2^k(k!)$ donde k sería la cantidad de números que se multiplican y $2016 = (2^5)(3^2)(7)$, de esto tiene que aparecer el 7 como factor y es el mayor de los factores primos por lo que $k = 7$ y que el producto resulta ser $2^7(7!)$ que es claro que $2^5 \mid 2^7$, $3^2 \mid 7!$ y $7 \mid 7!$. Por lo que el último factor por el se multiplico es 14.

Problema 3. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo se cortan en un punto interior E. El área del triángulo ABE mide 6 cm^2, la del triángulo CDE mide también 6 cm^2 y la del triángulo BCE mide 12 cm^2. Muestre que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio.
Solución:



Observe que los triángulos ABC y BCD tienen la misama área que es 18 cm^2, además BC es común a los dos triángulos, por los que se tendría que los triángulos tienen una altura con la misma medida, cuyas alturas parten desde A y D respectivamente, así que como las dos alturas son paralelas y forman ángulos rectos con las prolongaciones del segmento BC, por lo que segmento BC sería paralelo al segmento AD, es decir el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio.

Problema 4. Determine cuántos números de tres dígitos tienen la siguiente propiedad:
Al restar 297 de ese número, obtenemos un número de tres dígitos que tiene los mismos dígitos, pero en orden inverso.
Solución:
Sea abc el número con dígitos a, b, c. La propiedad que cumple es: $abc - 297 = cba$.
Simplificando tenemos

$$abc - 297 = cba \Leftrightarrow 100a + 10b + c - 297 = 100c + 10b + a \Leftrightarrow$$

$$99a - 99c = 297 \Leftrightarrow a - c = 3$$

con esto los posibles valores de a y c son: $(a, c) = (4, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 4), (8, 5), (9, 6)$, es decir hay 6 posibles valores de a y c, con esto se tiene que para cada valor de b están estas 6 posibilidades. Por lo tanto existen $6(10) = 60$ números que cumplen dicha condición.

Problema 5. En un desierto hay serpientes, ratones y alacranes. Cada mañana, cada serpiente se come un ratón, cada mediodía, cada alacrán mata a una serpiente, cada noche, cada ratón se come a un alacrán. Si después de cinco días el único animal que queda vivo es un ratón, ¿cuántos ratones había al inicio?

Solución:

En la siguiente tabla de abajo hacia arriba se muestra cuántos animales de cada uno hay antes de cada jornada: M(Mañana), MD(Medio día) y N(Noche). El número de ratones al inicio de los cinco días es 189.

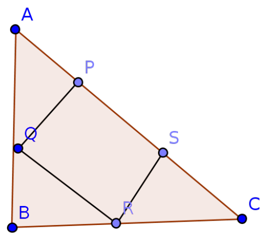
M,MD, N	# Serpientes	# Ratones	# Alacranes
5N	0	1	0
5MD	1	1	1
5M	1	2	1
4N	1	2	3
4MD	4	2	3
4M	4	6	3
3N	4	6	9
3MD	13	6	9
3M	13	19	9
2N	13	19	28
2MD	41	19	28
2M	41	60	28
1N	41	60	88
1MD	129	60	88
1M	129	189	88

Problema 6. Sea ABC un triángulo rectángulo con hipotenusa AC y $PQRS$ un cuadrado con lado PS sobre AC, Q está sobre AB, R está sobre BC y $AB = 3, BC = 4, PQ = \frac{60}{x}$.
Encuentre x.

Solución:

Observemos que:
Los ángulos $\angle SCR$ y $\angle PAQ$, $\angle SCR$ y $\angle CRS$, $\angle PAQ$ y $\angle AQP$ son tres pares de ángulos complementarios, de aquí se obtiene que $\angle SCR \cong \angle AQP$, $\angle CRS \cong \angle PAQ$ y $PQ = RS$. Por lo que se tiene que $\triangle PAQ \sim \triangle SRC$ y $\triangle PAQ \sim \triangle BAC$
Por lo que

$$\frac{PA}{SR} = \frac{AQ}{RC} = \frac{PQ}{SC}$$



y

$$\frac{PA}{BA} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$

Además $\triangle ABC$ tiene hipotenusa $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, hagamos $a = PA, b = AQ$ y $y = PQ$. Sustituyendo se tiene

$$\frac{a}{y} = \frac{b}{RC} = \frac{y}{5 - a - y}$$

y

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{y}{4}$$

De la primera se tiene que: $y^2 = a(5 - a - y)$ y de la segunda $a = \frac{3}{4}y$ al sustituir se tiene

$$y^2 = \frac{3}{4}y(5 - \frac{7}{4}y) \Rightarrow y = \frac{3}{4}(5 - \frac{7}{4}y) \Rightarrow y = \frac{60}{37} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = 37$$

XIV OLIMPIADA HONDUREÑA DE MATEMÁTICAS

22 de Octubre del 2016

SOLUCIONES DE NIVEL III

Problema 1. Halle el menor entero positivo múltiplo de 9 cuyos dígitos sean todos pares.

Solución:

Para que sea múltiplo de 9, la suma de los dígitos es múltiplo de 9 y como todos los dígitos son pares está suma es por lo menos 18, y para que ese número sea el menor, el número de dígitos tiene que ser mínomo, lo cual se optiene si consideramos el dígito 8, por ejemplo los posibles números con estas condiciones es: $8, 8, 2$ en algún orden. Y el menor que forman estos números es: 288.

Problema 2. En la lista de los 6 números A, B, C, D, E y F cada número es la suma de los anteriores a él. Por ejemplo $D = A + B + C$. Si $F = 7392$, escriba los números que aparecen en dicha lista.

Solución:

Observemos que para que se cumplan las condiciones se tiene que cumplir

$$B = A$$

$$C = A + B = 2A$$

$$D = A + B + C = 2C = 4A$$

$$E = A + B + C + D = 2D = 8A$$

$$F = A + B + C + D + E = 2E = 16A$$

De la última ecuación y usando que $F = 7392$, entonces $A = \frac{7392}{16} = 462$, $B = 462$, $C = 924$, $D = 1848$, $E = 2696$.

Problema 3. En un trapecio $ABCD$ de bases AB y CD, E es el punto medio de BC y F el punto medio de DA. Si el área del cuadrilátero $ABEF$ es el doble del área del cuadrilátero $FECD$. Halla el valor del cociente $\frac{AB}{DC}$.

Solución:

Por teorema de Thales se tiene que EF es la mediana de $ABCD$, y también se tendría que $ABEF$ y $FECD$ tiene la misma altura h. Con esto se tendría que

$A_1 = \frac{1}{2}H(FE + DC)$,

$2A_1 = \frac{1}{2}h(FE + AB)$

y $3A_1 = \frac{1}{2}(2h)(CD + AB)$

con $A_1 = ABEF$, de la primera y la segunda ecuación se obtiene que

$$A_1 = \frac{1}{2}h(AB - DC)$$

Sustituyendo en la tercera ecuación

$$3(\frac{1}{2}h(AB - CD)) = \frac{1}{2}(2h)(CD + AB) \Leftrightarrow 3AB - 3CD = 2CD + 2AB$$

$$\Leftrightarrow AB = 5CD \Leftrightarrow \frac{AB}{CD} = 5.$$

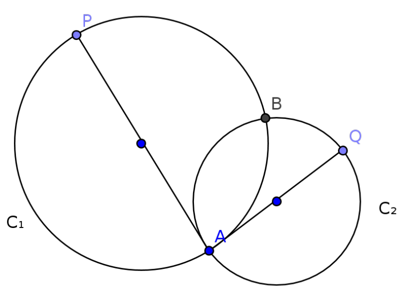
Problema 4. Encuentre el mayor entero n para el cual $n^3 + 2016$ será divisible por $n + 12$.
<u>Solución:</u>

Respuesta es:276
observemos que

$$\frac{n^3 + 2016}{x + 12} = \frac{n^3 + 12^3 + 288}{n + 12} = \frac{n^3 + 12^3}{n + 12} + \frac{288}{n + 12}$$
$$= n^2 + 12n + 12^2 + \frac{288}{n + 12}$$

Para que el cociente sea entero, $n + 12$ tiene que ser divisor de 288, y como se busca el mayor n, se tiene que cumplir que $n + 12 = 288 \Rightarrow n = 276$.

Problema 5. En la figura se muestran dos círculos C_1 y C_2 con diámetros PA y AQ. Los círculos se cortan en A y B, y la linea PA es tangente C_2 en A.
Demuestre que $\frac{PB}{BQ} = \frac{areaC_1}{areaC_2}$



<u>Solución:</u>

Primero probemos que PBQ están en una misma linea
Si PA es tangente al círculo C_2 en A, $\measuredangle PAQ = 90°$, pero AP es diametro de C_1, se obtiene que AQ es tangente de C_1 en A.
Usando el teorema de la tangente-secante para C_2 y el punto P, obteniendo $PB \times PQ = PA^2$
Similarmente usando e mismo teorema en C_2 y el punto Q obtenemos
$QB \times QP = QA^2$
Al dividir las dos ecuaciones $\frac{PB}{QB} = \frac{PB \times PQ}{QB \times QP} = \frac{PA^2}{QA^2}$. Por otro lado, $\frac{areaC_1}{areaC_2} = \frac{\pi\left(\frac{PA}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{QA}{2}\right)^2} = \frac{PA^2}{QA^2}$.
Por lo tanto $\frac{PB}{QB} = \frac{areaC_1}{areaC_2}$

Problema 6. Encuentre las soluciones enteras de la ecuación $\sqrt{x\sqrt{5}} - \sqrt{y\sqrt{5}} = \sqrt{6\sqrt{5} - 10}$
<u>Solución:</u>

$$\sqrt{x\sqrt{5}}-\sqrt{y\sqrt{5}}=\sqrt{6\sqrt{5}-10}\Leftrightarrow\sqrt{\sqrt{5}}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\sqrt{\sqrt{5}}\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}=\sqrt{5}-1\Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy}=6-2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x+y-6+2\sqrt{5}=2\sqrt{xy}\Leftrightarrow(x+y-6+2\sqrt{5})^2=4xy$$

$$\Leftrightarrow(x+y)^2-12(x+y)+4\sqrt{5}(x+y)+56-24\sqrt{5}=4xy$$

De aquí se cumple que $4\sqrt{5}(x+y-6)$ es entero, por lo que $x+y=6$, sustiyuyendo en

$$x+y-2\sqrt{xy}=6-2\sqrt{5}\Leftrightarrow xy=1$$

Con esto se tiene que x,y cumplen la ecuación $Z^2-6Z+5=0$, resolviendo $x=5,y=1$. La otra solución $x=1,y=5$ no cumple, ya que $\sqrt{1}-\sqrt{5}<0$.