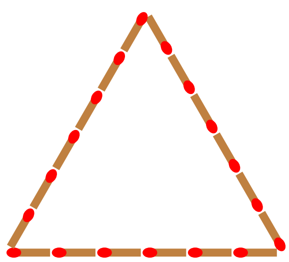
XVI OLIMPIADA HONDUREÑA DE MATEMÁTICAS

La Esperanza, Intibucá, 20 de Octubre de 2018

1. Soluciones Nivel I

Problema 1. Como cada lado del triángulo está compuesto por 6 fósforos, Kevin utilizó $6 \times 3 = 18$ fósforos en su construcción. Por lo que le sobran $38 - 18 = 20$ fósforos para construir un cuadrado. Como un cuadrado tiene 4 lados, cada lado del cuadrado estará formado por $\frac{20}{4} = 5$ fósforos.
Aquí un bosquejo de la solución:

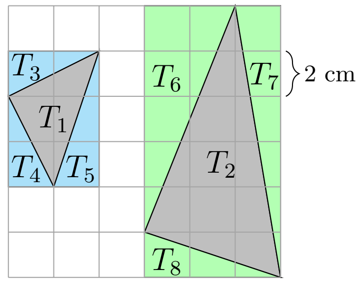


Problema 2. En la figura mostrada a continuación se han marcado los triángulos $T_1, T_2, \ldots, T_8$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, 8$ denotaremos el área del triángulo T_i por $|T_i|$. Entonces, el problema nos pide encontrar el valor de $|T_2| - |T_1|$.

Observa que la unión de los triángulos T_1, T_3, T_4 y T_5 es un rectángulo de dimensión 4cm×6cm. Similarmente, la unión de los triángulos T_2, T_6, T_7 y T_8 es un rectángulo de dimensión 6cm×12cm. Por lo que:

$$|T_1| + |T_3| + |T_4| + |T_5| = 4\text{cm} \times 6\text{cm} = 24\text{cm}^2 \tag{1}$$

$$|T_2| + |T_6| + |T_7| + |T_8| = 6\text{cm} \times 12\text{cm} = 72\text{cm}^2 \tag{2}$$



Como $T_3, T_4, \ldots, T_8$ son triángulos rectángulos con catetos paralelos a los ejes, podemos calcular fácilmente su área:

$|T_3| = \frac{1}{2}(4 \times 2)\text{cm}^2 = 4\text{cm}^2$ $\quad |T_4| = \frac{1}{2}(2 \times 4)\text{cm}^2 = 4\text{cm}^2$ $\quad |T_5| = \frac{1}{2}(2 \times 6)\text{cm}^2 = 6\text{cm}^2$

$|T_6| = \frac{1}{2}(4 \times 10)\text{cm}^2 = 20\text{cm}^2$ $\quad |T_7| = \frac{1}{2}(2 \times 12)\text{cm}^2 = 12\text{cm}^2$ $\quad |T_8| = \frac{1}{2}(6 \times 2)\text{cm}^2 = 6\text{cm}^2$

Combinando estos resultados con las ecuaciones (1) y (2) obtenemos que $|T_1| = 10\text{cm}^2$ y $|T_2| = 34\text{cm}^2$, por lo tanto, la diferencia de las áreas de los dos triángulos que indica el problema es:

$$|T_2| - |T_1| = 24\text{cm}^2.$$

Problema 3. Sea $S = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{7\cdots7}_{77-veces}$ la suma de los primeros 77 números intibucanos, entonces, el problema nos piden encontrar el dígito de las decenas de S. Nota que solamente los dígitos de las unidades y decenas de los 77 números intibucanos "aportan" al dígito de las decenas de S.

$$\begin{array}{r}
7+ \\
77+ \\
777+ \\
\vdots \\
77\cdots777+ \\
777\cdots777 \\
\hline
S
\end{array}$$

Luego, el dígito de las decenas de S es el mismo dígito de las decenas de:

$$7 + \underbrace{77 + 77 + \cdots + 77}_{76-veces} = 7 + 77 \cdot 76 = 5859$$

Por lo tanto, el dígito de las decenas de la suma de los primeros 77 números intibucanos es 5.

Problema 4. Por hipótesis el triángulo APC es isósceles y $\measuredangle APC = 80°$, entonces $\measuredangle ACP = 80°$ y $\measuredangle PAC = 20°$ (ya que la suma de ángulos internos de un triángulo miden 180°). Como el triángulo ABC es equilátero, se tiene que $\measuredangle BAC = 60°$. Note que $\measuredangle BAC = \measuredangle BAP + \measuredangle PAC$, luego

$$\measuredangle BAP = \measuredangle BAC - \measuredangle PAC = 60° - 20° = 40°$$

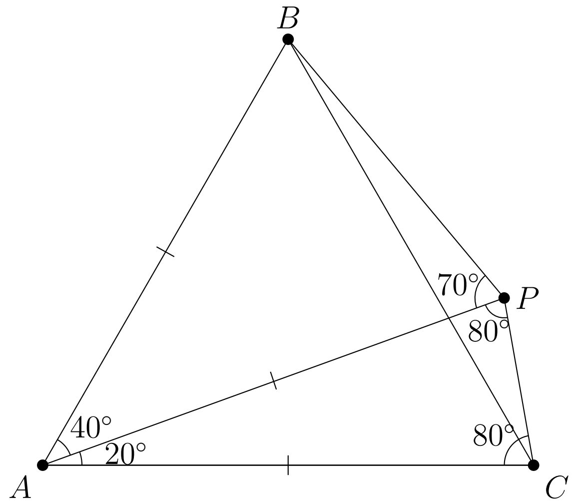
Utilizando nuevamente que el triángulo ABC es equilátero se tiene que $AB = AC$ y como el triángulo APC es isósceles también tenemos que $AC = AP$. Combinando estas dos igualdades se concluye que $AB = AP$ y por lo tanto el triángulo ABP es también isósceles, luego $\measuredangle ABP = \measuredangle APB$.

Sumando ángulos internos en el triángulo ABP se tiene que

$$\begin{aligned}
180° &= \measuredangle BAP + \measuredangle ABP + \measuredangle APB \\
&= 40° + \measuredangle APB + \measuredangle APB \\
&= 40° + 2\measuredangle APB
\end{aligned}$$

De donde se concluye que

$$\measuredangle APB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

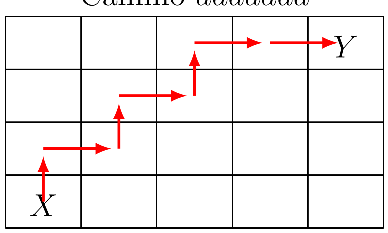


Problema 5. Sea $\mathcal{C}_{m,n}$ una cuadrícula de m filas y n columnas y sean X y Y dos celdas de la cuadrícula $\mathcal{C}_{m,n}$. Diremos que un *camino* de X a Y es una forma de llegar desde la celda X hasta la celda Y realizando únicamente movimientos hacia la derecha y hacia arriba.

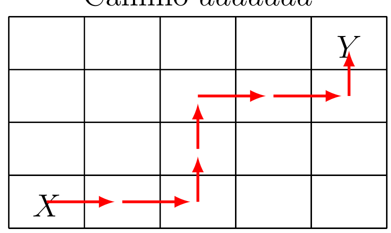
Para ejemplificar el algoritmo de solución de este problema utilizaremos una cuadrícula de 4 filas y 5 columnas en la que caracterizaremos todos los caminos de X a Y. Nota que para llegar desde la celda X hasta la celda Y debemos realizar 4 movimientos hacia la derecha y 3 movimientos hacia arriba. Un movimiento hacia la derecha lo representaremos con la letra d, mientras que un movimiento hacia arriba lo representaremos con la letra a. Así cada camino lo podemos representar como una cadena de 7 letras (4 d's y 3 a's).

En las siguientes gráficas se muestran los caminos *adadadd* y *ddaadda*.

Camino *adadadd*



Camino *ddaadda*



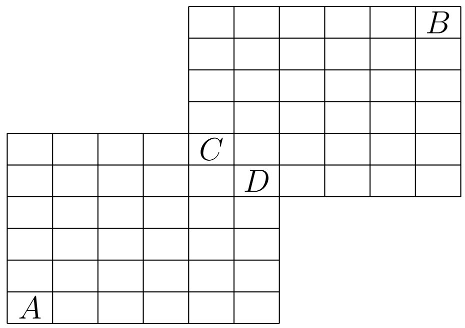
Entonces encontrar todos los caminos de X a Y es equivalente a encontrar todas las permutaciones diferentes que podemos formar con 4 letras d y 3 letras a.

De acuerdo con lo anterior, podemos generalizar lo siguiente: Sea $\mathcal{C}_{m,n}$ una cuadrícula de m filas y n columnas y sea $P(\mathcal{C}_{m,n})$ el total de caminos para llegar de la celda inferior izquierda hasta la celda superior derecha, entonces $P(\mathcal{C}_{m,n})$ se puede calcular como el número de permutaciones de $m-1$

letras d y $n-1$ letras a, lo que igual a:

$$P(\mathcal{C}_{m,n}) = \binom{(m-1)+(n-1)}{(n-1)}$$

En la siguiente gráfica hemos marcado las celdas C y D. Nota que para llegar desde la celda A hasta la celda B tenemos que pasar obligatoriamente por la celda C o la celda D y no existe ningún camino que pase simultáneamente por la celda C y D (ya que no están permitidos movimientos hacia la izquierda o hacia abajo), es decir, todos los caminos que pasan por la celda C son diferentes de todos los caminos que pasan por la celda D.

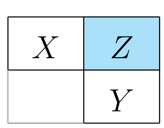


Sea n el número de caminos de A a B, entonces n lo podemos calcular como:

$$\begin{aligned}
n &= (\text{Número de caminos de } A \text{ a } C) \cdot (\text{Número de caminos de } C \text{ a } B)+ \\
&= (\text{Número de caminos de } A \text{ a } D) \cdot (\text{Número de caminos de } D \text{ a } B) \\
&= \binom{5+4}{4} \cdot \binom{4+5}{5} + \binom{4+5}{5} \cdot \binom{5+4}{4} \\
&= 2\binom{9}{4} \cdot \binom{9}{5} \\
&= 2 \cdot 126 \cdot 126 \\
&= 31752
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hay $31,752$ formas de llegar desde la celda A hasta la celda B realizando solamente movimientos hacia la derecha y hacia arriba.

Solución alternativa: Para esta solución escribiremos en cada celda el número de formas de llegar desde A hasta dicha celda. En la siguiente figura observa que para llegar a la celda pintada en azul solamente podemos hacerlo desde la celda inmediatamente a la izquierda o desde la celda inmediatamente abajo. Entonces es evidente que se debe cumplir que $Z = X + Y$.



Desarrollando este procedimiento para todas las celdas de la cuadrícula del problema original llegamos a la solución.

				126	756	2646	7056	15876	B 31752
				126	630	1890	4410	8820	15876
				126	504	1260	2520	4410	7056
				126	378	756	1260	1890	2646
1	6	21	56	126	252	378	504	630	756
1	5	15	35	70	126	126	126	126	126
1	4	10	20	35	56				
1	3	6	10	15	21				
1	2	3	4	5	6				
A	1	1	1	1	1				

XVI OLIMPIADA HONDUREÑA DE MATEMÁTICAS

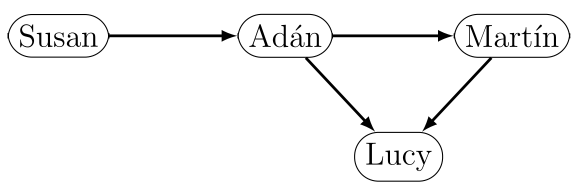
La Esperanza, Intibucá, 20 de Octubre de 2018

2. Soluciones Nivel II

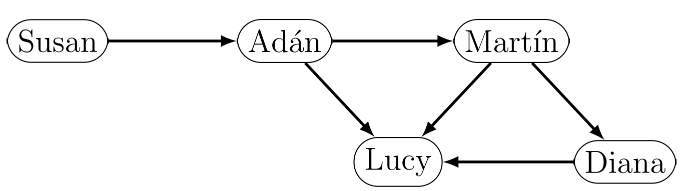
Problema 1. Para resolver este problema utilizaremos un diagrama y una relación de orden entre personas, la que definimos como sigue: $X \longrightarrow Y$ significa que la persona X construyó menos castillos de arena que la persona Y. Aplicaremos esta relación a todas las afirmaciones que aparecen en el enunciado del problema.

- Adán construyó menos castillos de arena que Martín y más que Susan.

- Lucy construyó más castillos de arena que Adán y más que Martín.



- Diana construyó más castillos de arena que Martín pero menos que Lucy.



Analizando el gráfico nos damos cuenta que Lucy construyó más castillos de arena que Diana, que Martín, que Adán y que Susan (por transitividad). Por lo tanto, Lucy fue quien construyó más castillos de arena.

Problema 2. Es el mismo problema que el problema 3 de Nivel I, solo que con una redacción diferente. Ve la solución aquí.

Problema 3. Si $a, b > 0$ entonces $a + b > 0$, luego la función $a \star b = \dfrac{ab+1}{a+b}$ está bien definida para valores positivos (el denominador nunca será 0). Observa también que si $a, b > 0$ entonces $a \star b > 0$.

Por lo anterior, el número $t = 2 \star (3 \star (\cdots 2016 \star (2017 \star 2018)))$ existe y es positivo. Entonces:

$$1 \star (2 \star (3 \star (\cdots (2017 \star 2018)))) = 1 \star t = \frac{1 \cdot t + 1}{1+t} = \frac{t+1}{1+t} = 1$$

Problema 4. Es el mismo problema que el problema 5 de Nivel I. Ve la solución aquí.

Problema 5. Sean a, b, c enteros positivos que satisfacen

$$\begin{cases} ab + c = 34 \\ a + bc = 29 \end{cases} \tag{1}$$

Si restamos la segunda igualdad de la primera, obtenemos que a, b, c también deben satisfacer:

$$\begin{aligned} (ab + c) - (a + bc) &= 34 - 29 \\ ab + c - a - bc &= 5 \\ a(b-1) - c(b-1) &= 5 \\ (a-c)(b-1) &= 5 \end{aligned}$$

Como a, b, c son enteros positivos, los números $a - c$ y $b - 1$ también son enteros y dividen a 5, por lo que solo hay dos posibilidades:

Caso 1:

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ b - 1 = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = c + 1 \\ b = 6 \end{cases} \tag{2}$$

Sustituyendo estos resultados de (2) en la primera ecuación de (1) tenemos que $6(c + 1) + c = 34 \Rightarrow c = 4$, de donde $a = 4 + 1 = 5$, por lo que la terna (a, b, c) que satisface estas condiciones es $(5, 6, 4)$.

Caso 2:

$$\begin{cases} a - c = 5 \\ b - 1 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = c + 5 \\ b = 2 \end{cases} \tag{3}$$

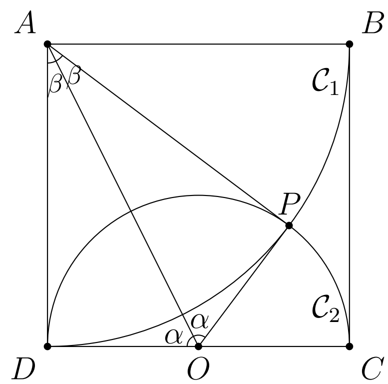
Sustituyendo estos resultados de (3) en la primera ecuación de (1) tenemos que $2(c + 5) + c = 34 \Rightarrow c = 8$, de donde $a = 8+5 = 13$, por lo que la terna (a, b, c) que satisface estas condiciones es $(13, 2, 8)$.

Por lo tanto, las dos ternas (a, b, c) que satisfacen las condiciones del problema son $(5, 6, 4)$ y $(13, 2, 8)$.

Problema 6. Sean O el punto medio de CD, $\mathcal{C}_1$ la circunferencia con centro en A y radio 4 y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia con centro en O y radio 2. Trace los segmentos AO, AP y OP.

Nota que $AD = AP = 4$ por ser radios de $\mathcal{C}_1$, similarmente $OD = OP = 2$ por ser radios de $\mathcal{C}_2$. Entonces, por el criterio (LLL) se tiene que $\triangle AOD \cong \triangle AOP$ y

$$\begin{aligned} \measuredangle AOD &= \measuredangle AOP = \alpha \\ \measuredangle DAO &= \measuredangle PAO = \beta \end{aligned} \tag{4}$$

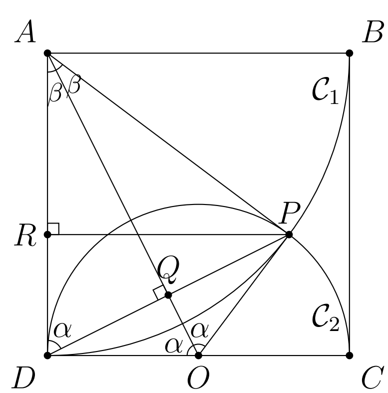


Sumando los ángulos internos del $\triangle AOD$ y utilizando (4) se tiene que:

$$\begin{aligned} \measuredangle ADO + \measuredangle AOD + \measuredangle DAO &= 180^\circ \\ 90^\circ + \alpha + \beta &= 180^\circ \\ \alpha + \beta &= 90^\circ \end{aligned} \tag{5}$$

Sea Q la intersección de AO con DP y R el punto en AD tal que $AD \perp RP$. Trace los segmentos PR y DP.

Como D es punto de tangencia de AD con $\mathcal{C}_2$, $\measuredangle ADP$ es un ángulo semi-inscrito y utilizando (4) tenemos que $\measuredangle ADP = \frac{1}{2}\measuredangle DOP = \frac{1}{2}(2\alpha) = \alpha$. Luego, por suma de ángulos internos del $\triangle ADQ$ y (5) se sigue que $\measuredangle AQD = 90^\circ$.



Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo AOD tenemos que

$$AO = \sqrt{AD^2 + DO^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

Y por el criterio AA se tiene que que:

$$\triangle DOQ \sim \triangle AOD \tag{6}$$
$$\triangle ADQ \cong \triangle APQ \tag{7}$$
$$\triangle PDR \sim \triangle AOD \tag{8}$$

De (6) se tiene que

$$\frac{DQ}{DO} = \frac{AD}{AO} \Rightarrow DQ = \frac{4}{2\sqrt{5}} \cdot 2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Por (7) tenemos que $DQ = PQ \Rightarrow PD = 2 \cdot DQ = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

Finalmente por (8) implica que

$$\frac{PR}{PD} = \frac{AD}{AO} \Rightarrow PR = \frac{4}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{8\sqrt{5}}{5} \Rightarrow PR = \frac{16}{5}$$

Por tanto, la distancia del punto P al lado AD es $PR = \dfrac{16}{5}$.

XVI OLIMPIADA HONDUREÑA DE MATEMÁTICAS

La Esperanza, Intibucá, 20 de Octubre de 2018

3. Soluciones Nivel III

Problema 1. Sean a, b, c los dígitos que estaban escritos en la pizarra inicialmente. La suma que obtuvo Alejandra fue $a + b + c = 15$. Supongamos sin perder generalidad que Alejandra borró el dígito a y en su lugar escribió el dígito 3. El producto de los nuevos 3 dígitos es $3bc = 36$.
Entonces, resolver este problema consiste en encontrar todas las soluciones enteras a, b, c tales que $0 \leq a, b, c \leq 9$ y

$$\begin{cases} a + b + c = 15 \\ 3bc = 36 \end{cases} \tag{1}$$

De la segunda igualdad de (1) tenemos que $bc = 12$. Analizando la factorización de 12 nos damos cuenta que los únicos casos posibles son: $(b, c) = (2, 6), (b, c) = (6, 2), (b, c) = (3, 4), (b, c) = (4, 3)$. De donde los posibles valores para $b + c$ son: $b + c = 7$ y $b + c = 8$. Combinando esto con la primera igualdad de (1) se sigue que los posibles valores de a son $a = 7$ y $a = 8$. Por lo tanto, el dígito que borró Alejandra fue un 7 o un 8.

Problema 2. Es el mismo problema que el problema 4 de Nivel I. Ve la solución aquí.

Problema 3. Es el mismo problema que el problema 5 de Nivel I. Ve la solución aquí.

Problema 4. Es el mismo problema que el problema 5 de Nivel II. Ve la solución aquí.

Problema 5. Sea $AB = 6l$ y $AD = h$, por las condiciones del problema $AF = FG = GB = 2l$, $DE = EC = 3l$ y $(ABCD) = 6hl = 70$, por lo que

$$hl = \frac{35}{3} \tag{2}$$

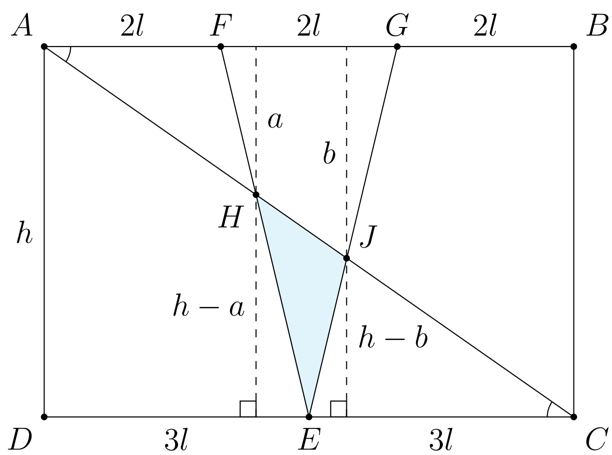
Observa que EFG es un triángulo con base $2l$ y altura h, entonces

$$(EFG) = \frac{1}{2}(2l)h = hl = \frac{35}{3}$$

Si encontramos el área de los triángulos AFH y AGJ podemos resolver fácilmente el problema ya que:

$$\begin{aligned}(EHJ) &= (EFG) - (FGJH)\\ &= \frac{35}{3} - [(AGJ) - (AFH)]\\ &= \frac{35}{3} + (AFH) - (AGJ)\end{aligned} \tag{3}$$

Tracemos una recta perpendicular a AB que pase por H y denotemos por a la distancia desde H hasta AB, luego se tiene que la distancia de H a CD es $h-a$. Observa que $\measuredangle FAH = \measuredangle ECJ$ ya que son ángulos alternos internos entre paralelas y $\measuredangle AHF = \measuredangle CHE$ por ser opuestos por el vértice. Luego $\triangle AFH \sim \triangle CEH$ por criterio AA.



Como en triángulos semejantes las alturas están a la misma razón que sus lados correspondiente (nota que a es la longitud de la altura del $\triangle AFH$ por H y $h-a$ es la longitud de la altura del $\triangle CEJ$ por H), entonces:

$$\frac{a}{h-a} = \frac{2l}{3l} \Rightarrow 3la = 2l(h-a) \Rightarrow 5la = 2hl = 2\cdot\frac{35}{3} \Rightarrow la = \frac{14}{3}\text{ , por (2)}$$

y

$$(AFH) = \frac{1}{2}\cdot 2l\cdot a = la = \frac{14}{3} \tag{4}$$

Ahora tracemos una recta perpendicular a AB que pase por J y denotemos por b la distancia desde J hasta AB y por $h-b$ la distancia de J a CD. Observa que $\measuredangle AJG = \measuredangle CJE$ por ser opuestos por el vértice. Luego $\triangle AGJ \sim \triangle CEJ$ por criterio AA y:

$$\frac{b}{h-b} = \frac{4l}{3l} \Rightarrow 3lb = 4l(h-b) \Rightarrow 7lb = 4hl = 4\cdot\frac{35}{3} \Rightarrow lb = \frac{20}{3}\text{ , por (2)}$$

y

$$(AGJ) = \frac{1}{2}\cdot 4l\cdot b = 2lb = \frac{40}{3} \tag{5}$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3) concluimos que:

$$(EHJ) = \frac{35}{3} + \frac{14}{3} - \frac{40}{3} = 3$$

Por tanto el área del triángulo EHJ es de 3 unidades cuadradas.

Problema 6. Sea $h(x) = g(b - f(x)) - f(1 - g(x))$. Comencemos calculando los valores de $g(b - f(x))$ y $f(1 - g(x))$.

$$\begin{aligned} g(b - f(x)) &= g(b - (x^2 + ax + b)) \\ &= g(-(x^2 + ax)) \\ &= (x^2 + ax)^2 - (x^2 + ax) + 1 \\ &= x^4 + 2ax^3 + (a^2 - 1)x^2 - ax + 1 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} f(1 - g(x)) &= f(1 - (x^2 + x + 1)) \\ &= f(-(x^2 + x)) \\ &= (x^2 + x)^2 - a(x^2 + x) + b \\ &= x^4 + 2x^3 + (1 - a)x^2 - ax + b \end{aligned} \tag{7}$$

Por (6) y (7) tenemos que:

$$\begin{aligned} h(x) &= g(b - f(x)) - f(1 - g(x)) \\ &= (x^4 + 2ax^3 + (a^2 - 1)x^2 - ax + 1) - (x^4 + 2x^3 + (1 - a)x^2 - ax + b) \\ &= 2(a - 1)x^3 + (a^2 + a - 2)x^2 - (b - 1) \\ &= 2(a - 1)x^3 + (a + 2)(a - 1)x^2 - (b - 1) \\ &= 2(a - 1)\left[x^3 + \frac{1}{2}(a + 2)x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{b - 1}{a - 1}\right] \text{ ya que } a \neq 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Por hipótesis $h(x)$ tiene al menos dos raíces iguales, entonces existen dos números (reales o complejos) r, l tales que: $h(x) = 2(a - 1)(x - r)^2(x - l)$. Desarrollando esta expresión tenemos:

$$\begin{aligned} h(x) &= 2(a - 1)(x - r)^2(x - l) \\ &= 2(a - 1)(x^2 - 2rx + r^2)(x - l) \\ &= 2(a - 1)\left[x^3 - (l + 2r)x^2 + (r^2 + 2rl)x - r^2 l\right] \end{aligned} \tag{9}$$

Combinando (8) y (9) tenemos que:

$$\begin{cases} -(l + 2r) = \dfrac{1}{2}(a + 2) \\ r^2 + 2rl = 0 \\ r^2 l = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b - 1}{a - 1} \end{cases} \tag{10}$$

Observa que $r = 0$ no puede ser raiz de $h(x)$ ya que al sustituir en (8) tendríamos que $h(0) = -(b-1) = 0$ lo que implica que $b = 1$, pero por hipótesis $b \neq 1$. Luego, por la segunda ecuación de (10) tenemos:

$$r(r + 2l) = 0 \;\Rightarrow\; r = -2l$$

Sustituyendo este resultado en la primera y tercera ecuación de (10) se sigue que:

$$l = \frac{1}{6}(a+2)$$

y

$$l^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{b-1}{a-1}$$

Por lo tanto $\frac{1}{6}(a+2) = l = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b-1}{a-1}} \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{\frac{b-1}{a-1}} = \frac{1}{3}(a+2)$. De donde es evidente que a es un número racional si y solo si $\sqrt[3]{\frac{b-1}{a-1}}$ es un número racional.