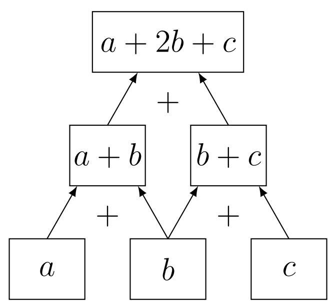
XVIII OLIMPIADA HONDUREÑA DE MATEMÁTICAS

Viernes, 22 de Enero de 2020

1. Soluciones Nivel Básico

Problema 1. Sean a, b, c los números escritos en la última fila (en ese orden). Entonces los números de la segunda fila serán $a + b$ y $b + c$ y el número escrito en la casilla de la primera fila será $(a + b) + (b + c) = a + 2b + c$.



Observa que el número b es el que más "aporta" a la expresión $a + 2b + c$, luego $a + 2b + c$ será máximo cuando b sea máximo y $a + 2b + c$ será mínimo cuando b sea mínimo.

Luego el mayor valor que se puede obtener en la casilla superior es 33, que ocurre cuando $a = 8$, $b = 9$ y $c = 7$. Y el menor valor que se puede obtener en la casilla superior es 7, que ocurre cuando $a = 2$, $b = 1$ y $c = 3$.

Problema 2. Como $BD = DE$ el triángulo BDE es isósceles y

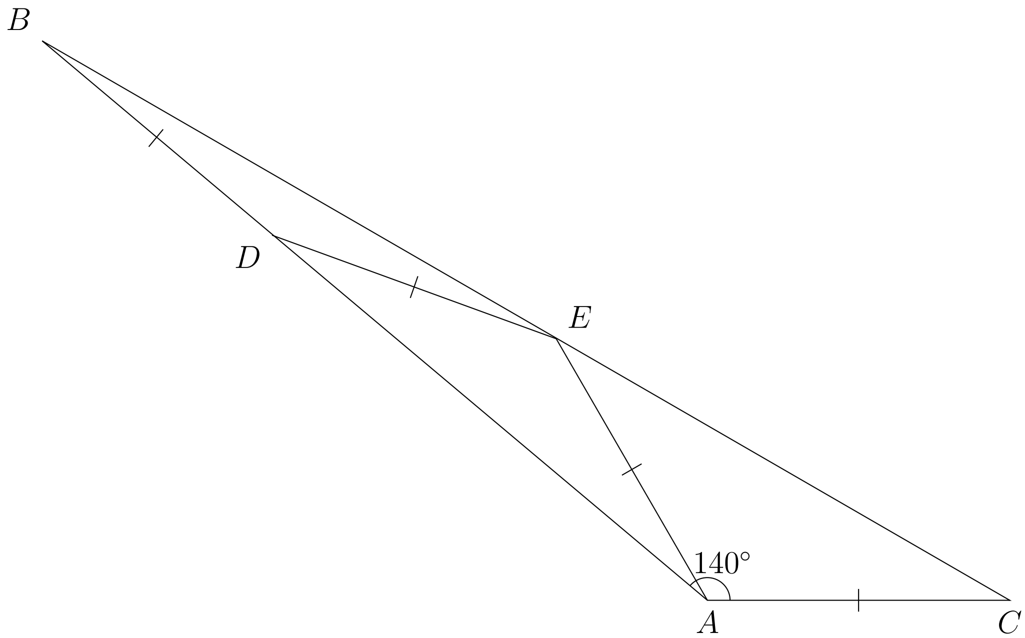
$$\measuredangle DBE = \measuredangle DEB = \alpha \tag{1}$$

Observa que $\measuredangle EDA$ es un ángulo exterior al triángulo BDE, luego $\measuredangle EDA = \measuredangle DBE + \measuredangle DEB = 2\alpha$. Y como $DE = EA$ se sigue que el triángulo EDA es isósceles y

$$\measuredangle EDA = \measuredangle EAD = 2\alpha \tag{2}$$

Por otro lado, como $EA = AC$ se tiene que el triángulo ACE es isósceles y

$$\measuredangle ACE = \measuredangle AEC = \beta \tag{3}$$



Por suma de ángulos internos en el triángulo ABC y por (1) y (3) se tiene que:

$$\begin{aligned} \measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC &= 180^\circ \\ \measuredangle DBE + \measuredangle ACE + 140^\circ &= 180^\circ \\ \alpha + \beta &= 40^\circ \qquad (4) \end{aligned}$$

Por (2) y (3) tenemos que:

$$\begin{aligned} \measuredangle BAC &= \measuredangle BAE + \measuredangle EAC \\ 140^\circ &= \measuredangle EAD + (180^\circ - \measuredangle AEC - \measuredangle ACE) \\ 140^\circ &= 2\alpha + (180^\circ - 2\beta) \\ \beta - \alpha &= 20^\circ \qquad (5) \end{aligned}$$

Combinando (4) y (5) tenemos que $\alpha = 10^\circ$ y $\beta = 30^\circ$. Por lo tanto,

$$\measuredangle ABC = \measuredangle DBE = \alpha = 10^\circ$$

Problema 3. Como los números tienen que ser de 7 dígitos distintos y solo pueden aparecer los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7, entonces los números de la lista de Devis y María consisten en todas las permutaciones de los números $1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7, siendo 1234567 y 7654321 el primer y último número de la lista respectivamente. Observa que en total hay $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ números en la lista de Devis y María.

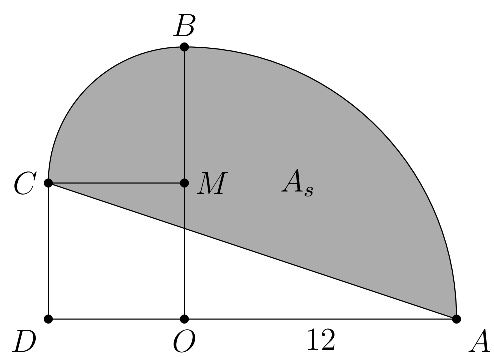
La cantidad de números que comienzan con 1, es decir, los números de la forma $\overline{1abcdef}$ corresponde a todas las formas de permutar los dígitos $2, 3, 4, 5, 6$ y 7, que en total son $6! = 720$. Observa que la cantidad de números que comienzan con 2 es exactamente la misma, todas las formas de permutar los dígitos $1, 3, 4, 5, 6$ y 7, que son 720, así que en total hay $2 \cdot 720 = 1440$ números de 7 dígitos en la lista que comienzan con 1 o 2. Ahora, la cantidad de números de la lista que comienzan con $1, 2$ o 3

sería $3 \cdot 720 = 2160$, que se pasa de 2020, por lo que el número que se encuentra en la posición 2020 comienza con 3.

De la misma forma, la cantidad de números de la lista que comienzan con 31, es decir, los números de la forma $\overline{31abcde}$ es $5! = 120$ (todas las permutaciones de los dígitos $2, 4, 5, 6$ y 7). Y hay $4 \cdot 120 = 480$ números que comienzan con $31, 32, 34$ o 35. Entonces el número 3612457 ocupa la posición $1440 + 480 + 1 = 1921$. Siguiendo con este rezonamiento, hay $4! = 24$ números de la forma $\overline{361abcd}$ y $4 \cdot 24 = 96$ números que comienzan con $361, 362, 364$ y 365.

Por todo lo anterior, el número 3671245 ocupa la posición $1440 + 480 + 96 + 1 = 2017$. Y a partir de aquí procedemos de forma secuencial: 3671254 ocupa la posición 2018, 3671425 ocupa la posición 2019 y finalmente, 3671452 ocupa la posición 2020 de la lista de Devis y María.

Problema 4. Como OA y OB son radios de la misma circunferencia, $OA = OB = 12$ y por ser M punto medio de OB, $OM = MB = 6$. Observa también que MB y MC son radios de la misma circunferencia, luego $MB = MC = 6$. Sea D el punto en la prolongación de OA tal que $DOMC$ sea un cuadrado.



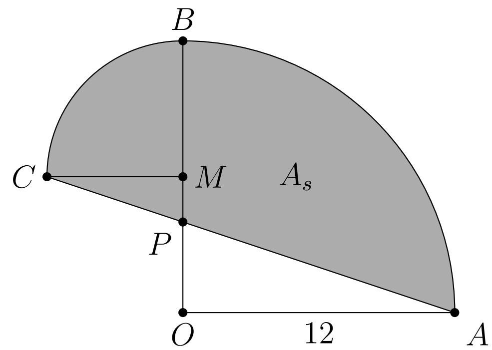
Observa que el área de la región sombreada A_s es la suma de las áreas de los dos cuartos de círculo, más el área del cuadrado $DOMC$, menos el área del triángulo ACD y por lo tanto, la podemos calcular como:

$$\begin{aligned} A_s &= (MBC) + (OAB) + (DOMC) - (DAC) \\ &= \frac{1}{4}\pi(6)^2 + \frac{1}{4}\pi(12)^2 + (6)^2 - \frac{1}{2}(18)(6) \\ &= 9\pi + 36\pi + 36 - 54 \\ &= 45\pi - 18 \end{aligned}$$

<u>*Solución alternativa:*</u> Sea P el punto de intersección de AC con OM y sea $PM = x$. Como $OM = 6$, entonces $PO = 6 - x$ y como $\measuredangle CMP = \measuredangle AOP = 90°$ y $\measuredangle CPM = \measuredangle APO$ por ser opuestos por el vértice, entonces los triángulos $\triangle CMP \sim \triangle AOP$ por criterio AA. De donde,

$$\frac{PM}{MC} = \frac{PO}{OA} \;\Rightarrow\; \frac{x}{6} = \frac{6-x}{12} \;\Rightarrow\; 12x = 36 - 6x \;\Rightarrow\; x = 2$$

Por lo tanto, $PM = 2$ y $OM = 4$.



Observa que el área de la región A_s la podemos calcular como la suma de las áreas de los dos cuartos de círculo más el área del triángulo CMP menos el área del triángulo AOP, entonces:

$$\begin{aligned}A_s &= (MBC) + (OAB) + (CMP) - (AOP)\\ &= \frac{1}{4}\pi(6)^2 + \frac{1}{4}\pi(12)^2 + \frac{1}{2}(6)(2) - \frac{1}{2}(12)(4)\\ &= 9\pi + 36\pi + 6 - 24\\ &= 45\pi - 18\end{aligned}$$

Problema 5. El problema se traduce a encontrar cuantos números de cuatro dígitos $\overline{abcd}$ satisfacen que $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$. Expresando esta igualdad en notación decimal tenemos:

$$\begin{aligned}\overline{ab} + \overline{cd} &= \overline{bc}\\ (10a + b) + (10c + d) &= 10b + c\\ 10a + d &= 9(b - c)\\ \overline{ad} &= 9(b - c) \qquad (6)\end{aligned}$$

Entonces, el número $\overline{ad}$ debe ser un múltiplo de 9 de 2 dígitos, ya que $a \neq 0$ (dado que $\overline{abcd}$ es un número de 4 dígitos). De (6) se tiene que $b - c \geq 2$ y para cada elección de b y c, es claro que a y d quedan determinados de forma única. Luego, el problema se reduce a encontrar cuantos dígitos b y c satisfacen que $b - c \geq 2$, lo que desarrollamos en la siguiente tabla:

c	opciones para b	Número de casos
0	$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	8
1	$3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	7
2	$4, 5, 6, 7, 8, 9$	6
3	$5, 6, 7, 8, 9$	5
4	$6, 7, 8, 9$	4
5	$7, 8, 9$	3
6	$8, 9$	2
7	9	1

Por lo tanto, Berta pudo haber pensado $8 + 7 + \cdots + 2 + 1 = 36$ números diferentes.

XVIII OLIMPIADA HONDUREÑA DE MATEMÁTICAS

Viernes, 22 de Enero de 2020

2. Soluciones Nivel Medio

Problema 1. Para resolver este problema utilizaremos el par ordenado (i, j) para referirnos a la celda de la tabla que se encuentra en la fila i y columna j. Observa que en la primera fila de la tabla siempre van a aparecer números triangulares, es decir, números de la forma: $\frac{n(n+1)}{2}$. Para ser más precisos, en la celda $(1, n)$ estará el número $\frac{n(n+1)}{2}$.

Esto se puede probar por inducción: Supongamos que en la celda $(1, n)$ se encuentra el número $\frac{n(n+1)}{2}$. Entonces, los siguientes números aparecerán escritos en la diagonal inmediatamente abajo.
En la celda $(n+1, 1)$ aparecerá el número $\frac{n(n+1)}{2} + 1$
En la celda $(n, 2)$ aparecerá el número $\frac{n(n+1)}{2} + 2$
En la celda $(n-1, 3)$ aparecerá el número $\frac{n(n+1)}{2} + 3$
En general, en la celda $(n+2-k, k)$ aparecerá el número $\frac{n(n+1)}{2} + k$ (Observa que desplazarse en la diagonal implica disminuir en 1 el valor de la fila y aumentar en 1 el valor de la columna). Por lo tanto, cuando tomamos $k = n+1$, tenemos que en la celda $(1, n+1)$ aparecerá el número

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

Que es el siguiente número triangular.

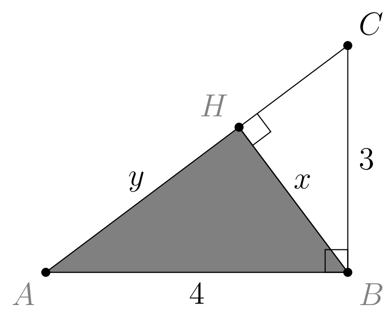
		Columnas					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	$\cdots$	**n**
1	1	3	6	10	15 ...		$\frac{n(n+1)}{2}$
2	2	5	9	14 ...			
Filas **3**	4	8	13 ...				
4	7	12 ...					
5	11 ...						
$\vdots$							

Entonces, en la celda $(1, 63)$ aparecerá el número $\dfrac{63(63+1)}{2} = \dfrac{63 \cdot 64}{2} = 2016$. A partir de aquí nos desplazamos en la diagonal inmediatamente abajo y tenemos que: 2017 aparecerá en la celda $(64, 1)$, 2018 aparecerá en la celda $(63, 2)$, 2019 aparecerá en la celda $(62, 3)$ y 2020 aparecerá en la celda $(61, 4)$.
Por lo tanto, el número 2020 estará en la fila 61 y columna 4.

Problema 2. Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo ABC tenemos que:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \;\Rightarrow\; AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Observa que $\triangle ABC \sim \triangle AHB$ por criterio AA y sean $BH = x$ y $AH = y$, entonces:



$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{HB} \;\Rightarrow\; \frac{5}{3} = \frac{4}{x} \;\Rightarrow\; x = \frac{12}{5}$$

y

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AH} \;\Rightarrow\; \frac{5}{4} = \frac{4}{y} \;\Rightarrow\; y = \frac{16}{5}$$

Luego, el área de la región sombreada es:

$$(\triangle ABH) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{16}{5} = \frac{96}{25}$$

Por lo tanto, $m + n = 96 + 25 = 121$.

Problema 3. Como $m|n$ significa que $m \neq 0$ y existe un entero l tal que $n = ml$. Sustituyendo en la desigualdad del problema tenemos que:

$$\begin{aligned}
(5m+n)k &= 5n+m \\
(5m+ml)k &= 5ml+m \\
m(5+l)k &= m(5l+1) \quad \text{, dividiendo por } m \\
(5+l)k &= 5l+1 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Note que si $l = -5$ de (1) se tiene que $(5-5)k = 5(-5)+1 \;\Rightarrow\; 0 = -24$, lo que es absurdo, por lo tanto $l \neq -5$ y $5 + l \neq 0$. Luego, de (1) se sigue:

$$(5+l)k = 5l+1 \;\Rightarrow\; k = \frac{5l+1}{5+l} = \frac{5(5+l)-24}{5+l} = 5 - \frac{24}{5+l} \qquad (2)$$

Como k es un entero, entonces de (2) se tiene que $(5+l)|24$ y todos los posibles valores de k se muestran en la siguiente tabla.

$5+l$	l	$k=5-\dfrac{24}{5+l}$
-24	-29	6
-12	-17	7
-8	-13	8
-6	-11	9
-4	-9	11
-3	-8	13
-2	-7	17
-1	-6	29

$5+l$	l	$k=5-\dfrac{24}{5+l}$
1	-4	-19
2	-3	-7
3	-2	-3
4	-1	-1
6	1	1
8	3	2
12	7	3
24	19	4

Los posibles valores que puede tomar k son $-19, -7, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17$ y 29.

Problema 4. Sean O la intersección de AD con BE y F el punto en BO tal que $OF = OE$. Como BE es bisectriz de $\measuredangle ABC$, entonces $\measuredangle ABE = \measuredangle EBC = \alpha$.

Los triángulos $\triangle ABO$ y $\triangle DBO$ son congruentes ya que tienen dos ángulos congruentes y comparten el lado BO. Luego,

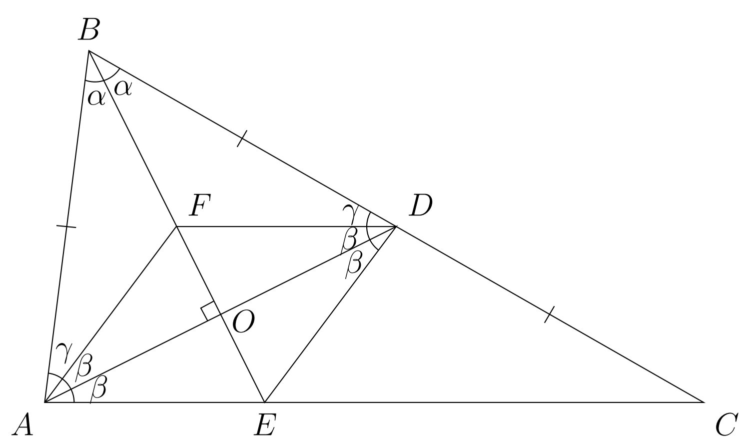
$$\begin{aligned} AB = DB = \frac{1}{2}BC \quad &\text{y} \\ AO = DO = 2 & \end{aligned} \tag{3}$$

Por el teorema de la bisectriz aplicada al triángulo ABC tenemos que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow EC = 2AE \Rightarrow AC = 3AE \tag{4}$$

Observa que por construcción $OF = OE$ y por (3) $AO = DO$, entonces los cuatro triángulos $\triangle AFO$, $\triangle DFO$, $\triangle AEO$ y DEO son congruentes por el criterio LAL. Sea $\measuredangle FAO = \measuredangle FDO = \measuredangle EAO = \measuredangle EDO = \beta$.

Similarmente, los triángulos ABF y DBF son congruentes por criterio LAL y $\measuredangle BAF = \measuredangle BDF = \gamma$.



Por suma de ángulos internos en el triángulo ABO tenemos que $\alpha+\beta+\gamma=90°$ y sumando ángulos internos en el triángulo ABC se tiene que:

$$2\alpha+2\beta+\gamma+\measuredangle ACB=180° \;\Rightarrow\; \measuredangle ACB=90-\alpha-\beta=\gamma$$

Como $\measuredangle FDB$ y $\measuredangle ACB$ son ángulos correspondientes e iguales, entonces FD es paralela a AC, luego, por el teorema de Thales aplicado al triángulo BEC tenemos que F es punto medio de BE y como $BE=4$ se sigue que:

$$BO=3 \text{ y } OE=1 \tag{5}$$

Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo ABO y por (3) y (5) tenemos que:

$$AB=\sqrt{BO^2+AO^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13} \text{ y } BC=2AB=2\sqrt{13}$$

Por (3), (4), (5) y el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo AOE tenemos que:

$$AC=3AE=3\sqrt{AO^2+OE^2}=3\sqrt{2^2+1^2}=3\sqrt{5}$$

Por lo tanto, los lados del triángulo ABC miden: $AB=\sqrt{13}, AC=2\sqrt{13}$ y $BC=3\sqrt{5}$.

Problema 5. Como x y y son enteros positivos entonces $x^y=y^{x-y}$ implica que $x-y\geq 0$, es decir $x\geq y$. Si $x=y$, es claro que la única solución posible es que $x=y=1$.

Si $x>y$ se tiene que $x^y=y^{x-y}<x^{x-y} \;\Rightarrow\; y<x-y \;\Rightarrow\; x-2y>0$. Sea $d=mcd(x,y)$, entonces existen enteros positivos x_1,y_1 tales que $x=dx_1, y=dy_1$ y $mcd(x_1,y_1)=1$. Sustituyendo en la igualdad original se tiene que:

$$\begin{aligned} x^y &= y^{x-y} \\ (dx_1)^y &= (dy_1)^{x-y} \\ d^y x_1^y &= d^{x-y} y_1^{x-y} \\ x_1^y &= d^{x-2y} y_1^{x-y} \end{aligned}$$

Como $x>y$ y $x-2y>0$, ambos extremos de la igualdad anterior son enteros. Ahora, si existe un primo p que divide a y_1, entonces $p|d^{x-2y}y_1^{x-y}=x_1^y \;\Rightarrow\; p|x_1$. Luego $p|mcd(x_1,y_1)=1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $y_1=1 \;\Rightarrow\; y=d \;\Rightarrow\; y|x$. Es decir, existe un entero positivo $n\geq 2$ tal que $x=ny$.

Dado que $x=ny$, sustituyendo esto en la igualdad original se tiene:

$$\begin{aligned} x^y &= y^{x-y} \\ (ny)^y &= y^{ny-y} \\ n^y y^y &= \frac{y^{ny}}{y^y} \\ n^y y^{2y} &= y^{ny} \quad \text{, sacando raiz } y\text{-ésima} \\ ny^2 &= y^n \\ n &= y^{n-2} \end{aligned}$$

Si $n=2$ se tiene que $2=y^{2-2}=1$, por lo que no hay solución.
Si $n=3$ se tiene que $3=y^{3-2}=y$, luego $x=9, y=3$ es solución.
Si $n=4$ se tiene que $4=y^{4-2}=y^2$, entonces $x=8, y=2$ es solución.

Es claro que $y=1$ no puede ser solución para cualquier $n\geq 2$. Ahora, si $y>1$ observa que si $n=5$, entonces se tiene que $5<2^{5-2}\leq y^{5-2}$. Supongamos que $n<y^{n-2}$ para algún $n\geq 5$, entonces

$$n+1<y^{n-2}+1<y^{n-1}=y^{(n+1)-2}$$

Entonces, la igualdad $n=y^{n-2}$ es imposible para valores $n\geq 5$. Por lo tanto, los únicos pares ordenados (x,y) que son solución del problema son: $(1,1),(8,2)$ y $(9,3)$.