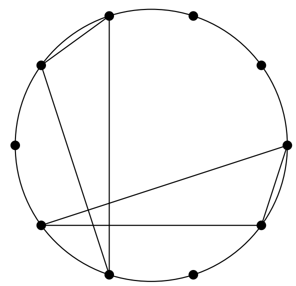
XIX Olimpiada Nacional de Matemáticas

Viernes 19 de Noviembre de 2021

Nivel Básico (Con soluciones)

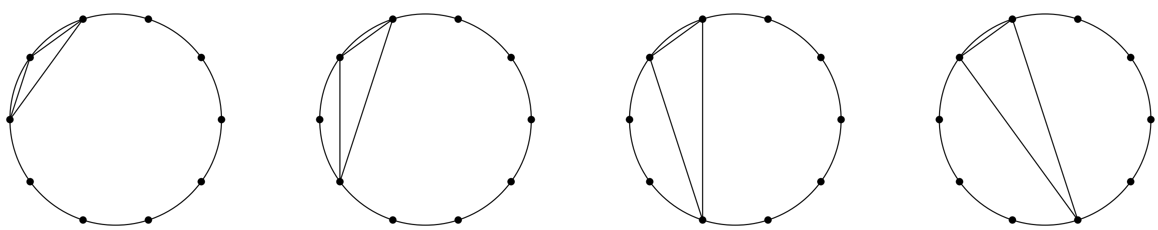
Problema 1. En un círculo se dibujan 10 puntos igualmente espaciados y se forman triángulos uniendo cualesquiera tres de esos puntos. Decimos que dos triángulos son iguales, si son congruentes (tienen la misma forma y tamaño). Por ejemplo, los triángulos de la figura se consideran iguales.

¿Cuántos triángulos diferentes se pueden dibujar?

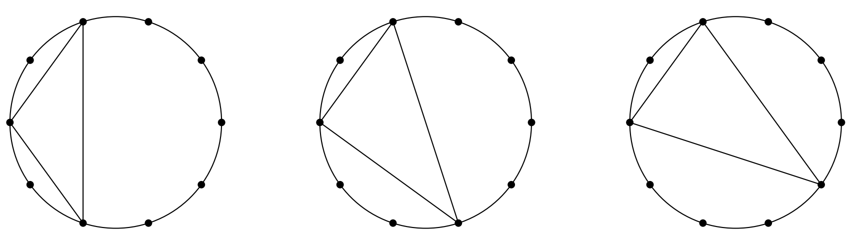


Solución:

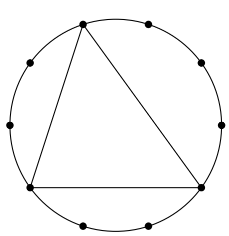
Note que el círculo queda dividido en 10 arcos, cada uno con medida de 36°. Realicemos un conteo ordenado de los triángulos, fijando el lado menor del triángulo. Si el lado menor abarca un solo arco, se obtienen 4 triángulos diferentes.



Si el lado menor abarca dos arcos, se obtienen 3 triángulos diferentes:



Finalmente, si el lado menor abarca 3 arcos se obtiene un solo triángulo:



Por lo tanto, se pueden dibujar 8 triángulos diferentes.

Observación: Si cada lado del triángulo se asocia con el *número de arcos que abarca* (hacia el exterior del triángulo), el problema es equivalente a encontrar todos los conjuntos diferentes de tres números enteros positivos $\{a, b, c\}$ tales que $a+b+c = 10$. Y los triángulos anteriores equivalen a los conjuntos:

$$\{1, 1, 8\}, \quad \{1, 2, 7\}, \quad \{1, 3, 6\}, \quad \{1, 4, 5\}$$

$$\{2, 2, 6\}, \quad \{2, 3, 5\}, \quad \{2, 4, 4\}$$

$$\{3, 3, 4\}$$

Criterio 1	**Descripción**	**Puntos**
A	Mostrar evidencia de que está realizando un conteo ordenado de triángulos (no necesariamente el que se plantea en esta solución)	4 pts
B	Contar correctamente los 8 triángulos.	3 pts

Criterio 2	**Descripción**	**Puntos**
C	Notar que el problema es equivalente a contar todos los conjuntos diferentes de tres enteros positivos $\{a, b, c\}$ tales que $a+b+c = 10$.	5 pts
D	Contar correctamente los 8 conjuntos.	2 pts

Problema 2. Encuentra el menor entero positivo n tal que cada dígito de $15n$ sea 0 ó 2.

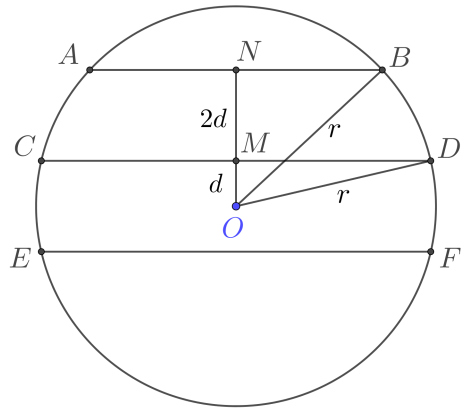
Solución:
Como $15n$ es múltiplo de 5 y solo debe tener como dígitos el 0 y el 2, el dígito de las unidades de $15n$ debe ser 0.
Como $15n$ es múltiplo de 3, la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 3, por lo tanto, la cantidad de veces que aparece el 2 en su notación decimal debe ser múltiplo de 3.
Por lo anterior, se deduce que el menor valor posible para $15n$ es 2220 y por lo tanto

$$n = \frac{2220}{15} = 148$$

Criterio	**Descripción**	**Puntos**
A1	Escribir de forma explícita que el dígito de las unidades de $15n$ debe ser 0	1 pts
A2	Escribir de forma explícita que la cantidad de veces que debe aparecer el dígito 2 es múltiplo de 3	1 pts
A3	Escribir que el menor valor de $15n$ es 2220	4 pts
A4	Encontrar que $n = 148$	1 pts

Problema 3. Sean AB, CD y EF tres cuerdas diferentes de un círculo, paralelas entre sí y tales que $AB = 34$, $CD = 38$ y $EF = 38$. Se sabe que la distancia entre las cuerdas AB y CD es igual que la distancia entre las cuerdas CD y EF. Calcule la distancia entre las cuerdas AB y EF.

Solución:



Las cuerdas CD y EF ambas miden 38, entonces deben ser equidistantes del centro O del círculo (es decir, simétricas con respecto a este). Se sabe que si trazamos una recta perpendicular desde el centro a cualquier cuerda, esta pasa por su punto medio. Sean M y N los puntos medios de CD y AB, como se muestra en la figura, donde también se han marcado los radios del círculo $OB = OD = r$. Sea $2d$ la distancia entre las cuerdas AB y CD, entonces $MO = \frac{1}{2}(2d) = d$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo MOD (recordando que $MD = \frac{1}{2}(38) = 19$) se obtiene:

$$19^2 + d^2 = r^2. \tag{1}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ONB (recordando que $NB = \frac{1}{2}(34) = 17$) se obtiene:

$$17^2 + (3d)^2 = r^2. \tag{2}$$

Resolviendo para d el sistema de dos ecuaciones se concluye que $d = 3$ y por lo tanto la distancia entre las cuerdas AB y EF es $4d$, es decir 12.

Criterio	**Descripción**	**Puntos**
A	Darse cuenta que las cuerdas CD y EF deben ser equidistantes del centro.	1 pt
B	Trazar una recta perpendicular a las cuerdas, que pase por O y decir o marcar explícitamente que los puntos M y N son puntos medios de dichas cuerdas.	1 pt
C	Obtener las ecuaciones (1) y (2).	3 pts
C.1	Si solo obtiene una de las dos ecuaciones.	2 pts
D	Resolver el sistema de ecuaciones para d y concluir que la distancia entre AB y EF es 12.	2 pts
D.1	Encontrar el valor $d = 3$, sin concluir que la distancia entre AB y EF es 12.	1 pt

Observación 1: C.1 es un criterio parcial de C. Es decir, el criterio C.1 no es acumulable con el criterio C.

Observación 2: D.1 es un criterio parcial de D. Es decir, el criterio D.1 no es acumulable con el criterio D.

Problema 4. Sean a y b enteros positivos tales que

$$\frac{a}{a-2}=\frac{b+2021}{b+2016}$$

Determina el mayor valor que puede tomar $\frac{a}{b}$.

Solución:
Sean a, b enteros positivos con $a \neq 2$, entonces:

$$\frac{a}{a-2}=\frac{b+2021}{b+2016} \quad \Leftrightarrow \quad a(b+2016)=(a-2)(b+2021) \quad \Leftrightarrow \quad 2b+4042=5a$$

Como $b \neq 0$, entonces $2b+4042=5a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{2}{5}+\frac{4042}{5b}$.
Sean $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ dos soluciones diferentes de la ecuación diofántica $2b+4042=5a$, tales que $b_1 < b_2$. Note que:

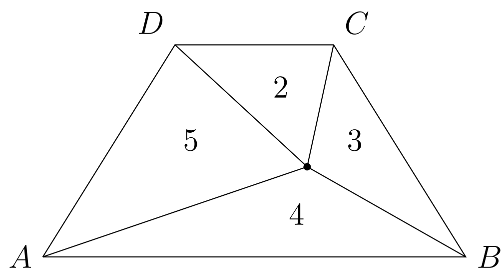
$$b_1 < b_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4042}{b_2} < \frac{4042}{b_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{5}+\frac{4042}{b_2} < \frac{2}{5}+\frac{4042}{b_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{b_1}$$

Por lo tanto, encontrar el mayor valor que puede tomar $\frac{a}{b}$ es equivalente a encontrar el menor valor de b, tal que existe una solución (a, b) de la ecuación diofántica $2b+4042=5a$.
Resolviendo la ecuación diofántica se obtiene que el menor valor de b (entero positivo) que satisface la ecuación es cuando $a=810$ y $b=4$. Por lo tanto, el mayor valor que puede tomar $\frac{a}{b}$ es $\frac{810}{4}=\frac{405}{2}=202.5$.

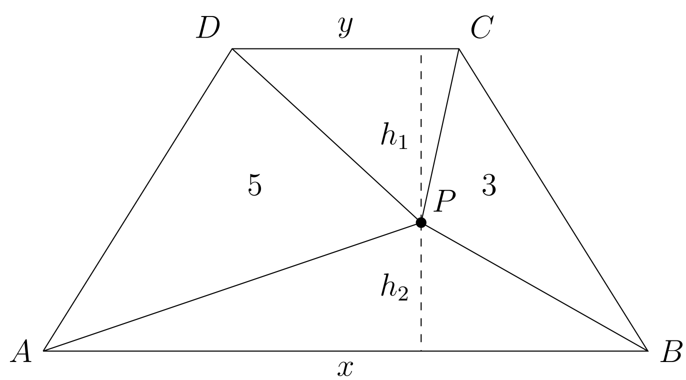
Criterio	**Descripción**	**Puntos**
A	Escribir una igualdad en la que se despeje para a/b	2 pts
A.1	Llegar a la igualdad $2b+4042=5a$	1 pt
B	Darse cuenta que a/b alcanza un valor máximo cuando el valor de b es mínimo, basado en una expresión equivalente a: $$\frac{a}{b}=\frac{2}{5}+\frac{4042}{5b}$$ (no se exige una demostración formal)	2 pts
C	Justificar que $(810, 4)$ es el par ordenado (a, b) que maximiza el valor de a/b	2 pts
C.1	Encontrar cualquier solución (a, b) de la igualdad $\frac{a}{a-2}=\frac{b+2021}{b+2016}$	1 pt
D	Calcular el valor máximo de $a/b=202.5$	1 pt

Observación 1: A.1 es un criterio parcial de A. Es decir, el criterio A.1 no es acumulable con el criterio A.
Observación 2: C.1 es un criterio parcial de C. Es decir, el criterio C.1 no es acumulable con el criterio C.

Problema 5. Sea $ABCD$ un trapecio isósceles con bases paralelas AB y CD, con $AB > CD$. Desde un punto en el interior del trapecio se construyen segmentos hacia los vértices, de tal forma que el trapecio queda dividido en cuatro triángulos con áreas 2, 3, 4 y 5, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de $\dfrac{AB}{CD}$?



<u>*Solución:*</u>



Sean $x = AB$, $y = CD$ y h_1, h_2 las longitudes de las alturas desde P de los triángulos DPC y APB, como se indica en la figura. Se tienen las siguiente relaciones:

$$yh_1 = 4 \qquad \text{y} \qquad xh_2 = 8, \tag{3}$$

Entonces $h_1 = \dfrac{4}{y}$ y $h_2 = \dfrac{8}{x}$. Además, por la fórmula del área de un trapecio:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x+y)(h_1+h_2) = 14 \quad &\Longrightarrow \frac{1}{2}(x+y)\left(\frac{4}{y}+\frac{8}{x}\right) = 14 \\
&\Longrightarrow \frac{4x}{y} + 4 + 8 + \frac{8y}{x} = 28 \\
&\Longrightarrow \frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} = 4
\end{aligned} \tag{4}$$

Si definimos $r := \dfrac{x}{y}$, la última relación es:

$$r + \frac{2}{r} = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 - 4r + 2 = 0,$$

cuyas soluciones son $r = 2 \pm \sqrt{2}$. Por hipótesis $x > y$ y entonces $r > 1$. Por lo tanto,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{x}{y} = r = 2 + \sqrt{2}.$$

Criterio	**Descripción**	**Puntos**
A	Obtener las dos relaciones dadas en (3) o relaciones equivalentes	2 pts
B	Obtener la ecuación (4) o alguna ecuación equivalente, solo en términos de x y y, que permita encontrar el valor de $\frac{x}{y}$.	3 pts
C	Concluir, a partir de la ecuación de B que el único valor posible para $\frac{x}{y}$ es $2+\sqrt{2}$	2 pts
C.1	Si no descarta $2-\sqrt{2}$ como posible valor de $\frac{x}{y}$	1 pt

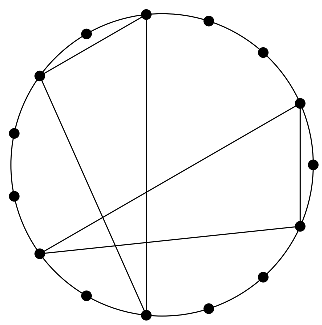
Observación: C.1 es un criterio parcial de C. Es decir, el criterio C.1 no es acumulable con el criterio C.

XIX Olimpiada Nacional de Matemáticas

Viernes 19 de Noviembre de 2021

Nivel Medio (Con soluciones)

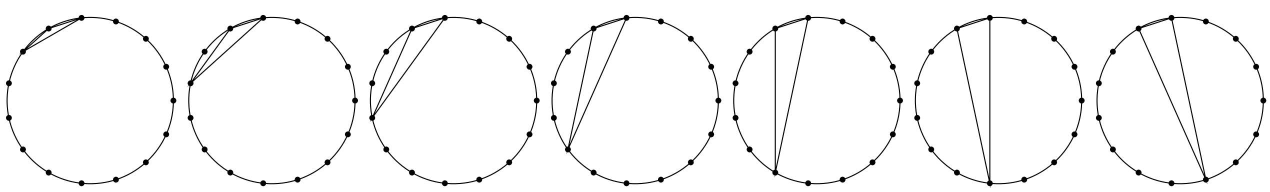
Problema 1. En un círculo se dibujan 15 puntos igualmente espaciados y se forman triángulos uniendo cualesquiera tres de esos puntos. Decimos que dos triángulos son iguales, si son congruentes (tienen la misma forma y tamaño). Por ejemplo, los triángulos de la siguiente figura se consideran iguales



¿Cuántos triángulos diferentes se pueden dibujar?

Solución:

Note que el círculo queda dividido en 15 arcos iguales, cada uno con medida de 24°. Realicemos un conteo ordenado de los triángulos, fijando el lado menor del triángulo.
Si el lado menor abarca un solo arco, se obtienen 7 triángulos diferentes:



Observe que si cada lado del triángulo se asocia con el *número de arcos que abarca* (hacia el exterior del triángulo), el problema es equivalente a encontrar todos los conjuntos diferentes de tres números enteros positivos $\{a, b, c\}$ tales que $a+b+c = 15$. Y los triángulos anteriores equivalen a los conjuntos:

$$\{1,1,13\},\quad \{1,2,12\},\quad \{1,3,11\},\quad \{1,4,10\},\quad \{1,5,9\},\quad \{1,6,8\},\quad \{1,7,7\}.$$

Si el lado menor del triángulo abarca 2 arcos, se obtienen los siguientes conjuntos:

$$\{2,2,11\},\quad \{2,3,10\},\quad \{2,4,9\},\quad \{2,5,8\},\quad \{2,6,7\}.$$

Continuamos así el conteo para los casos cuando el lado menor del triángulo abarca 3, 4 y 5:

$$\{3,3,9\},\quad \{3,4,8\},\quad \{3,5,7\},\quad \{3,6,6\};\qquad \{4,4,7\},\quad \{4,5,6\};\qquad \{5,5,5\}.$$

Por lo tanto, se pueden dibujar 19 triángulos diferentes.

Criterio 1	Descripción	Puntos
A	Mostrar evidencia de que está realizando un conteo ordenado de triángulos (no necesariamente el que se plantea en esta solución)	4 pts
B	Contar correctamente los 8 triángulos.	3 pts

Criterio 2	Descripción	Puntos
C	Notar que el problema es equivalente a contar todos los conjuntos diferentes de tres enteros positivos $\{a, b, c\}$ tales que $a+b+c = 10$.	5 pts
D	Contar correctamente los 8 conjuntos.	2 pts

Problema 2. Sean a, b, c, d números reales tales que $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ y $ac + bd = 0$. Determina todos los posibles valores de $ab + cd$.

<u>*Solución:*</u> De las relaciones iniciales tenemos que $a^2 = 1 - b^2$ y $c^2 = 1 - d^2$. Multiplicando miembro a miembro ambas igualdades tenemos que: $a^2c^2 = (1-b^2)(1-d^2) = 1-b^2-d^2+b^2d^2$, de donde

$$a^2c^2 - b^2d^2 = (ac + bd)(ac - bd) = 1 - b^2 - d^2$$

Por hipótesis $ac + bd = 0$, de donde se sigue que $1 - b^2 - d^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 + d^2 = 1$.
Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \qquad (1) \\ c^2 + d^2 &= 1 \qquad (2) \\ b^2 + d^2 &= 1 \qquad (3) \end{aligned}$$

Combinando (5) y (7) tenemos que $a^2 = d^2$ y combinando (6) y (7) tenemos que $b^2 = c^2$.
Note que si $a^2 = d^2 = 0$, entonces $ab + cd = 0 \cdot b + c \cdot 0 = 0$.
Similarmente, si $b^2 = c^2 = 0$ entonces $ab + cd = a \cdot 0 + 0 \cdot d = 0$.
Ahora, si a, b, c, d son todos distintos de 0, nos quedan los siguientes casos.

<u>Caso 1:</u> Si $a = d$.
Como $ac + bd = 0$, se tiene que cumplir que $b = -c$ y por lo tanto: $ab + cd = 0$.

<u>Caso 2:</u> Si $a = -d$.
Como $ac + bd = 0$, se tiene que cumplir $b = c$ y por lo tanto: $ab + cd = 0$.

Por lo tanto $ab + cd = 0$ para todos los reales a, b, c, d que satisfagan las condiciones iniciales.

Criterio	**Descripción**	**Puntos**
A	Demostrar que $b^2 + d^2 = 1$ o que $a^2 + c^2 = 1$	3 pts
B	Demostrar que $a^2 = d^2$ y $b^2 = c^2$.	2 pts
C	Demostrar que en todos los posibles casos $ab + cd = 0$.	2 pts
C.1	Probar que $ab + cd = 0$ en alguno de los casos, pero no en todos.	1 pt

Observación: C.1 es un criterio parcial de C. Es decir, el criterio C.1 no es acumulable con el criterio C.

Problema 3. Sean a y b enteros positivos tales que

$$\frac{a}{a-2} = \frac{b+2021}{b+2008}$$

Determina el mayor valor que puede tomar $\dfrac{a}{b}$.

<u>*Solución:*</u> Sean a, b enteros positivos con $a \neq 2$, entonces:

$$\frac{a}{a-2} = \frac{b+2021}{b+2008} \quad \Leftrightarrow \quad a(b+2008) = (a-2)(b+2021) \quad \Leftrightarrow \quad 2b + 4042 = 13a$$

Como $b \neq 0$, entonces $2b + 4042 = 13a \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{13} + \dfrac{4042}{13b}$.
Sean $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ dos soluciones diferentes de la ecuación diofántica $2b+4042 = 13a$, tales que $b_1 < b_2$. Note que:

$$b_1 < b_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4042}{b_2} < \frac{4042}{b_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{13} + \frac{4042}{b_2} < \frac{2}{13} + \frac{4042}{b_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{b_1}$$

Por lo tanto, encontrar el mayor valor que puede tomar $\dfrac{a}{b}$ es equivalente a encontrar el menor valor de b, tal que existe una solución (a, b) de la ecuación diofántica $2b + 4042 = 13a$. Resolviendo la ecuación diofántica se obtiene que el menor valor de b (entero positivo) que satisface la ecuación es cuando $a = 312$ y $b = 7$. Por lo tanto, el mayor valor que puede tomar $\dfrac{a}{b}$ es $\dfrac{312}{7}$.

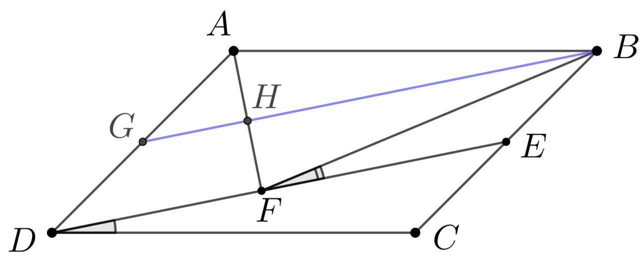
Criterio	**Descripción**	**Puntos**
A	Escribir una igualdad en la que se despeje para a/b	2 pts
A.1	Llegar a la igualdad $2b + 4042 = 13a$	1 pt
B	Darse cuenta que a/b alcanza un valor máximo cuando el valor de b es mínimo, basado en una expresión equivalente a: $$\frac{a}{b} = \frac{2}{13} + \frac{4042}{13b}$$ (no se exige una demostración formal).	2 pts
C	Justificar que $(312, 7)$ es el par ordenado (a, b) que maximiza el valor de a/b	2 pts
C.1	Encontrar cualquier solución (a, b) de la igualdad $\dfrac{a}{a-2} = \dfrac{b+2021}{b+2008}$	1 pt
D	Calcular el valor máximo de $a/b = 312/7$	1 pt

Problema 4. Considera un paralelogramo $ABCD$ en ese orden, sea E el punto medio del lado BC. En el segmento DE se elige un punto F de forma tal que AF sea perpendicular a DE. Demostrar que $\measuredangle CDE = \measuredangle EFB$.

<u>*Solución:*</u>

Solución 1. Sea G el punto medio de AD y trácese el segmento BG. Como $ABCD$ es paralelogramo, entonces $AB = DC$, $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB$ y además $AG = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = EC$. Por el criterio LAL, los triángulos DCE y BAG son congruentes. De aquí se obtiene:

$$\measuredangle CDE = \measuredangle ABG = \measuredangle ABH. \tag{4}$$



Luego, como $DG = BE$ y $DG \parallel BE$, entonces $DEBG$ es paralelogramo y por lo tanto $DE \parallel BG$. Y de aquí se obtiene, por ángulos alternos internos:

$$\measuredangle EFB = \measuredangle FBH. \tag{5}$$

Como $GH \parallel DF$ y G es punto medio de AD, entonces H es punto medio de AF (Teorema de Thales). Además, se sabe que $AF \perp DE$ y $BH \parallel DE$, entonces $BH \perp AF$. Es decir, BH es altura y mediana del triángulo ABF y por lo tanto este triángulo es isósceles. En particular BH es bisectriz, es decir:

$$\measuredangle ABH = \measuredangle FBH. \tag{6}$$

Combinando las igualdades (4), (5) y (6) se demuestra que $\measuredangle CDE = \measuredangle EFB$.

Criterio	**Descripción**	**Puntos**
C1	Construir el segmento BG.	2 pts
C2	Demostrar que $\measuredangle CDE = \measuredangle ABH$ (por congruencia de triángulos u otro método)	1 pt
C3	Demostrar que $\measuredangle EFB = \measuredangle FBH$.	1 pt
C4	Demostrar que BH es bisectriz del triángulo ABF.	2 pts
C4	Concluir, a partir de los pasos anteriores, que $\measuredangle CDE = \measuredangle EFB$.	1 pt

Problema 5. Un entero positivo m es llamado *creciente* si sus dígitos, leídos de izquierda a derecha, no decrecen. Por ejemplo, 22347779 es un número *creciente* de 8 dígitos. Probar que para cada natural n existe un número *creciente* m de n dígitos tal que la suma de los dígitos de m es un cuadrado perfecto.

Solución:

Para todo número entero positivo k, definamos $s(k)$ como la suma de todos los dígitos de k. Observe que $l_n = \underbrace{11\cdots 11}_{n-veces}$ es el menor número creciente de n dígitos y $L_n = \underbrace{99\cdots 99}_{n-veces}$ es el mayor. Entonces para cualquier número creciente m de n dígitos se tiene que $l_n \leq m \leq L_n$ y $n = s(l_n) \leq s(m) \leq s(L_n) = 9n$.

Lema 1: Si $n \leq k \leq 9n$ entonces existe un número creciente m_k de n dígitos tal que $s(m_k) = k$.
Demostración: Razonemos por inducción.
Caso base: Si $k = n$, defina $m_k = l_n$, entonces $s(m_k) = s(l_n) = n$.
Supongamos que para algún $n \leq k < 9n$ existe un número creciente m_k de n dígitos tal que $s(m_k) = k$. Como $k < 9n$, entonces $m_k \neq L_n$ y el primer dígito de izquierda a derecha de m_k es $a \neq 9$.
Caso 1: $m_k = \underbrace{aa\cdots a}_{n-veces}$, entonces defina $m_{k+1} = m_k + 1$. Note que m_{k+1} es creciente y $s(m_{k+1}) = k + 1$.

Caso 2: $m_k = \underbrace{aa\cdots a}_{r-veces} b_1 \cdots b_{n-r}$, con $a < b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{n-r}$.
Defina $m_{k+1} = \underbrace{aa\cdots a}_{(r-1)-veces}\ (a+1)b_1 \cdots b_{n-r}$. Note que m_{k+1} es creciente y $s(m_{k+1}) = k + 1$.
Finalmente, L_n es creciente y $s(L_n) = 9n$. Por lo tanto queda probado el Lema 1.

Lema 2: Para todo natural n, existe un entero positivo c_n tal que $n \leq c_n^2 < 9n$.
Demostración: Sea c_n el mayor entero positivo tal que $(c_n - 1)^2 < n \leq c_n^2$. Vamos a demostrar que $c_n^2 < 9n$.
Note que $c_n - 1 \leq (c_n - 1)^2 < n \;\Rightarrow\; c_n < n + 1 \leq 2n$.
Por otro lado, $c_n^2 - 2c_n + 1 = (c_n - 1)^2 < n \;\Rightarrow\; c_n^2 < n + 2c_n - 1 < n + 2c_n < n + 2(2n) = 5n < 9n$.

Por lo tanto $n \leq c_n^2 < 9n$ y queda demostrado el Lema 2.

Combinando el Lema 1 y Lema 2 se demuestra el problema.

Criterio	**Descripción**	**Puntos**
A	Demostrar el Lema 1	4 pts
A.1	Enunciar o utilizar el Lema 1 sin una demostración completa	1 pt
B	Demostrar el Lema 2.	3 pts
B.1	Enunciar o utilizar el Lema 2 sin una demostración completa	1 pt