Olimpiada Hondureña de Matemáticas

Nivel Básico (Con soluciones)

Viernes 17 de noviembre de 2023

Problema 1. Sea $S(n)$ la suma de los dígitos del número n, por ejemplo, $S(25) = 2 + 5 = 7$. ¿Para cuántos enteros positivos de dos dígitos se tiene que $S(n)$ es par?

Solución: Sea $n = \overline{ab}$ un entero positivo de dos dígitos, entonces $S(n) = a + b$.
Para que $S(n)$ sea par se tienen dos casos.

1. a y b son pares, en este caso los posibles valores de a y b son: $a = 2, 4, 6, 8$ y $b = 0, 2, 4, 6, 8$ que pueden formar $4 \times 5 = 20$ números que cumplen la condición.

2. Si a y b son impares, en este caso los posibles valores son $a = 1, 3, 5, 7, 9$ y $b = 1, 3, 5, 7, 9$ que pueden formar $5 \times 5 = 25$ números que cumplen la condición.

En total se tinen $20 + 25 = 45$ enteros positivos de dos dígitos tales que $S(n)$ es par. ■

Problema 2. Una lista de números se construye de la siguiente manera: el primer número es 8 y para obtener cada uno de los siguientes números se suma 2 o se multiplica por 2 alternadamente. De esta forma, los primeros números de la lista son: $8, 10, 20, 22, 44, \ldots$
¿Cuál es el dígito de las unidades del número que está en la posición 2023 de la lista?

Solución: Comencemos calculando los primeros números de la lista y obteniendo el dígito de las unidades.

Posición en la lista	Números de la lista	dígito de las unidades
1	8	8
2	$8 + 2 = 10$	0
3	$10 \times 2 = 20$	0
4	$20 + 2 = 22$	2
5	$22 \times 2 = 44$	4
6	$44 + 2 = 46$	6
7	$46 \times 2 = 92$	2
8	$92 + 2 = 94$	4
9	$94 \times 2 = 188$	8
10	$188 + 2 = 190$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Se observa que el dígito de las unidades se repite cada 8 números. Y como $2023 = 252(8) + 7$, el dígito de las unidades del número de la lista que está en la posición 2023 es el mismo que el que está en la posición 7, es decir dicho dígito es: 2. ■

Problema 3. Sean a, b, c, d números reales tales que $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = 2$, hallar el valor de

$$(b+d)\left(\frac{2}{a+c} + \frac{1}{c+e}\right)$$

<u>*Solución:*</u> De la última ecuación se tiene

$$\frac{d}{e} = 2 \Rightarrow d = 2e$$

luego usamos las otras ecuaciones

$$\frac{c}{d} = 2 \Rightarrow c = 2d \Rightarrow c = 4e$$
$$\frac{b}{c} = 2 \Rightarrow b = 2c \Rightarrow b = 8e$$
$$\frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b \Rightarrow a = 16e$$

Así $b + d = 8e + 2e = 10e$, $a + c = 16e + 4e = 20e$, $c + e = 4e + e = 5e$ y

$$(b+d)\left(\frac{2}{a+c} + \frac{1}{c+e}\right) = (10e)\left(\frac{2}{20e} + \frac{1}{5e}\right) = (10e)\left(\frac{3}{10e}\right) = 3.$$

■

Problema 4. Decimos que un entero positivo N es *Paceño* si todos sus dígitos son distintos y además, la suma de los dígitos de N es divisible por cada uno de los dígitos de N. Determine todos los números Paceños de tres dígitos.

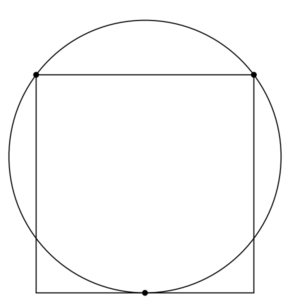
<u>*Solución:*</u> Sea $N = \overline{abc}$ un número Paceño con $a > b > c$, de las condiciones que cumple se tiene que

$$\begin{array}{lcl} a\big|(a+b+c) & & a\big|(b+c) \\ b\big|(a+b+c) & \Leftrightarrow & b\big|(a+c) \\ c\big|(a+b+c) & & c\big|(a+b) \end{array}$$

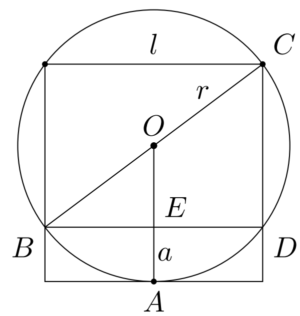
De la condición $a\big|(b+c)$ se tiene que $b + c = al$ para algún entero positivo l, como $a > b > c$ obtenemos lo sigueinte $al = b + c < a + a = 2a \Rightarrow l < 2$ por lo que $l = 1$ y se cumple que $b + c = a$. Luego de la condición $b\big|(a+c) \Rightarrow b\big|(b+2c) \Rightarrow b|2c$, es decir, para algún entero positivo k, $2c = bk$. Como $c > 0$ (ya que si $c = 0$, $a = b$ y no es posible), obtenemos que $2c = bk \Rightarrow 2c > ck \Rightarrow k < 2$ por lo que $k = 1$, así $b = 2c$ y $a = 3c$. Con estas condiciones los posibles valores que toma c son: $1, 2, 3$. Y los números posibles con $a > b > c$ son: $321, 642, 963$.
Por lo que el total de números Paceños son todas las permutaciones de estos 3 números. Es decir el total de números Paceños es: 18.

■

Problema 5. Una circunferencia de radio 21 contiene dos vértices de un cuadrado y es tangente a uno de sus lados, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?



Solución:



Sean l el lado del cuadrado, $r = 21$ el radio de la circunferencia y $a = EA$. Observemos que E y O son puntos medios de BD y BC respectivamente, por lo que son paralelas y se cumple $CD = 2OE \Rightarrow l - a = 2(r - a) \Rightarrow a = 2r - l$.
Ahora, en el triángulo BEO se tiene $BE = \frac{l}{2}$, $EO = r - a$ y $BO = r$ y utilizando el Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}
& BE^2 + EO^2 = BO^2 \\
\Rightarrow \quad & \frac{l^2}{4} + (r-a)^2 = r^2 \\
\Rightarrow \quad & l^2 + 4(r - 2r + l)^2 = 4r^2 \\
\Rightarrow \quad & l^2 + 4(l-r)^2 = 4r^2 \\
\Rightarrow \quad & l^2 + 4l^2 - 8lr + 4r^2 = 4r^2 \\
\Rightarrow \quad & 5l^2 - 8lr = 0 \\
\Rightarrow \quad & l = \frac{8r}{5}, l > 0
\end{aligned}$$

Si $r = 21$ la longitud del lado del cuadrado es: $\dfrac{168}{5}$. ■

Olimpiada Hondureña de Matemáticas

Nivel Medio (Con soluciones)

Viernes 17 de noviembre de 2023

Problema 1. Se escriben en sucesión todos los números impares del 1 al 2023, en orden, uno después del otro, para formar un número muy grande.

$$135791113\cdots20212023$$

¿Cuál es el dígito que ocupa la posición central de este número?

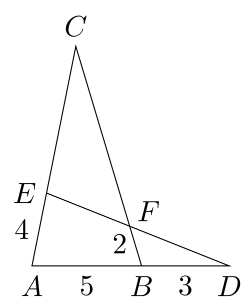
Solución: Sea G el número $135791113\cdots20212023$. Para encontrar el dígito central de G es necesario determinar la cantidad de dígitos que tiene, lo que se hace en la siguiente tabla:

Números	Total de dígitos
$1, 3, 5, 7, 9$	$5 \times 1 = 5$
$11, 13, 15, \ldots, 95, 97, 99$	$45 \times 2 = 90$
$101, 103, 105, \ldots, 997, 999$	$450 \times 3 = 1350$
$1001, 1003, \ldots, 1997, 1999$	$500 \times 4 = 2000$
$2001, 2003, \ldots, 2021, 2023$	$12 \times 4 = 48$
Total de dígitos de G	3493

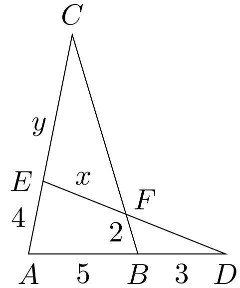
El dígito que ocupa la posición central es el que está en la posición 1747. Como en los números desde el 1 al 999 se han escrito 1445 dígitos, se necesita encontrar el dígito número 302 de la secuencia $1001, 1003, 1005, \ldots,$ como todos estos números tiene 4 dígitos y $302 = 4 \times 75 + 2$ el dígito buscado es el dígito de las centenas del número que ocupa la posición número 76 de la lista anterior, que es $999 + 2(76) = 1151$. Por lo tanto, el dígito que ocupa la posición central de G es el 1. ■

Problema 2. Sea D un punto en la prolongación del lado AB de un triángulo ABC. El punto E en AC es tal que los ángulos $\angle DBC$ y $\angle DEC$ son congruentes y sea F la intersección de los segmentos DE con BC. Si $|BF| = 2, |BD| = 3, |AE| = 4$ y $|AB| = 5$.

Determine el valor de $|EF|$.



Solución: Hagamos $x = EF$ y $y = EC$.



Los triángulos ECF y BDF son semejantes, ya que $\measuredangle DBF = \measuredangle FEC$ y $\measuredangle EFC = \measuredangle BFD$, así se tendría que $\measuredangle ECF = \measuredangle BDF$. Además el ángulo A lo comparten los triángulos ACB y ADE por los que serián semejantes. Ahora utilizamos las semejanzas. De la segunda semejanza se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \\ \Rightarrow \quad & \frac{4+y}{5+3} = \frac{5}{4} \\ \Rightarrow \quad & \frac{4+y}{8} = \frac{5}{4} \\ \Rightarrow \quad & 4+y = 10 \Rightarrow y = 6 \end{aligned}$$

De la primera semejanza se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{EF}{BF} = \frac{EC}{BD} \\ \Rightarrow \quad & \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \Rightarrow \quad & \frac{x}{2} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto $EF = 4$. ∎

Problema 3. Sean x, y, z números reales tales que

$$\frac{7+xy}{x+y} = \frac{7+yz}{y+z} = \frac{7+zx}{z+x} = 4$$

Calcular $x+y+z$

Solución:
Consideremos la primera igualdad y simplifiquemos

$$\begin{aligned} & \frac{7+xy}{x+y} = \frac{7+yz}{y+z} \\ \Rightarrow \quad & 7y + 7z + xy^2 + xyz = 7x + 7y + xyz + y^2 z \\ \Rightarrow \quad & 7z + xy^2 = 7x + y^2 z \\ \Rightarrow \quad & 7z + xy^2 - 7x - y^2 z = 0 \\ \Rightarrow \quad & 7(z-x) - y^2(z-x) = 0 \\ \Rightarrow \quad & (z-x)(7-y^2) = 0 \\ \Rightarrow \quad & z = x \text{ o } y^2 = 7 \end{aligned}$$

Si $y^2 = 7$ se tiene que $\dfrac{7+xy}{x+y} = 4 \Rightarrow \dfrac{y^2+xy}{x+y} = y = 4$, que no es posible. Por lo que $z = x$.
Ahora si consideramos la última igualdad

$$\begin{aligned} & \frac{7+zx}{z+x} = 4 \\ \Rightarrow \quad & \frac{7+x^2}{2x} = 4 \\ \Rightarrow \quad & 7 + x^2 = 8x \\ \Rightarrow \quad & (x-1)(x-7) = 0 \\ \Rightarrow \quad & x = 1 \text{ o } x = 7 \end{aligned}$$

Anicemos los casos
Si $z = x = 1$ se tiene $\dfrac{7+xy}{x+y} = 4 \Rightarrow \dfrac{7+y}{1+y} = 4 \Rightarrow 7 + y = 4 + 4y \Rightarrow y = 1.$
Si $z = x = 7$ se tiene $\dfrac{7+xy}{x+y} = 4 \Rightarrow \dfrac{7+7y}{7+y} = 4 \Rightarrow 7 + 7y = 28 + 4y \Rightarrow y = 7$
Por lo tanto los prosibles valores de $x + y + z$ son 3 y 21. ■

Solución 2:
Reescribiendo las ecuaciones se obtiene el sistema

$$\begin{cases} xy = 4(x+y) - 7 \\ yz = 4(y+z) - 7 \\ zx = 4(z+x) - 7 \end{cases}$$

Si restamos la primera y segunda ecuación se tiene

$$y(x - z) = 4(x - z) \Rightarrow z = x \text{ o } y = 4$$

Si $y = 4$ al sustituir en la primera ecuación se tiene que $4x = 4(x+4) - 7$, el cuál no tiene solución. Por lo que se tiene $z = x$. Similarmente de la primera y tercera ecuación

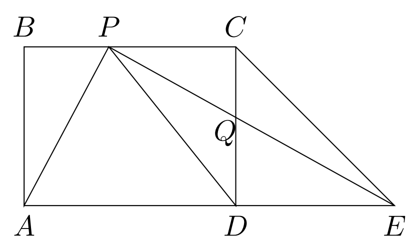
$$x(y - z) = 4(y - z) \Rightarrow y = z \text{ o } x = 4$$

$x = 4$ no es posible, por lo que las soluciones del sistema cumplen $x = y = z$. Así

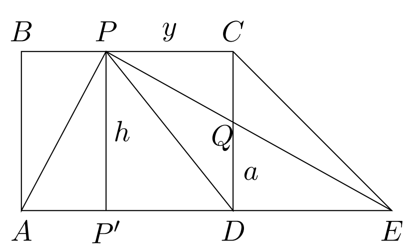
$$\frac{7 + x^2}{2x} = 4 \Rightarrow x = 1 \text{ o } x = 7.$$

Lo demás es quivalente a la solución 1. ■

Problema 4. En la figura dada, $ABCD$ es un rectángulo, E es un punto de prolongación del segmento AD, P es un punto del segmento BC y los segmentos PE y CD se cortan en el punto Q. Se sabe que el área del triángulo PQD es 12 cm^2 y que el área del triángulo QDE es 18 cm^2, determine la diferencia de las áreas de los triángulos APD y ABP en cm^2.



Solución:
Consideremos P' el el pie del segmento perpendicualar a $\overline{AD}$ desde P y sean $h = PP'$, $a = DQ$ y $y = PC$. Utilizando áreas se obienen las siguientes relaciones



$$\frac{(PDE)}{(QDE)} = \frac{h}{a} = \frac{12+18}{18} = \frac{5}{3}$$

$$(PDQ) = \frac{1}{2}(DQ)(PC) = \frac{1}{2}ay = 12 \Rightarrow ay = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{a}$$

Ahora calculemos la diferencia de áreas

$$\begin{aligned}(APD)-(ABP) &= \frac{1}{2}(AD)(AB)-\frac{1}{2}(PB)(PP')\\ &= \frac{1}{2}(AD)h-\frac{1}{2}(PB)h\\ &= \frac{1}{2}h\,(AD-PB)\\ &= \frac{1}{2}hy\\ &= \frac{1}{2}h\left(\frac{24}{a}\right)=12\left(\frac{y}{a}\right)=12\left(\frac{5}{3}\right)=20.\end{aligned}$$

■

Problema 5. Decimos que un número de 4 dígitos $\overline{abcd}$ es *Paceño* si $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ son números de 2 dígitos tales que $\overline{ab}+\overline{cd}$ es un divisor de $\overline{abcd}$. Por ejemplo, el número 2013 es Paceño, pues $20+13$ es un divisor de 2013. Si $\overline{abcd}$ es un número Paceño, determine el mayor valor que puede tomar la expresión:

$$\frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}+\overline{cd}}$$

<u>*Solución:*</u>
Observemos que

$$\overline{abcd}=\overline{ab00}+\overline{cd}=100\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{ab}+\overline{cd}+99\overline{ab}$$

sustituyendo en la expresión dada se tiene

$$\frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}+\overline{cd}}=1+\frac{99\overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}}$$

Sea $x=\overline{ab}$, $y=\overline{cd}$ y $d=\dfrac{99\overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}}$ Para encontrar el máximo valor que toma la expresión se necesita encontrar el máximo d que cumple la condición

$$d=\frac{99x}{x+y}\Rightarrow d(x+y)=99x\Rightarrow(99-d)x=dy$$

De la última igualdad y utilizando que $y>0$, ya que es de los dígitos, se tiene que $99-d>0\Rightarrow d\leq 98$. Descartando los valores $90\leq d\leq 98$, se obtiene que el mayor valor de d posible es $d=89$. Por lo que el mayor valor posible de la expresión $\dfrac{\overline{abcd}}{\overline{ab}+\overline{cd}}$ es 90, y se obtiene con $x=89$, $y=10$, es decir con el número Paceño $\overline{8910}$. ■