Olimpiada Hondureña de Matemáticas (2018-2021)

Problemas y Soluciones

Autor: José Roberto Arrazola Raudales
Contacto: arrazola87@gmail.com
Colaboradores: Mariano Solórzano, Devis Alvarado y Darwin Gutierrez

Índice general

Introducción

La Olimpiada Hondureña de Matemática (OHM) es una competencia que se desarrolla anualmente desde el año 2003, en la que participan estudiantes de educación básica y media de los 18 departamentos de Honduras. El objetivo de esta competencia es promover y desarrollar el entusiasmo por la matemática en los jóvenes hondureños, enfrentándolos a ejercicios y problemas de un alto nivel de dificultad en la que se necesita de ideas específicas, una gran creatividad, imaginación e ingenio para poder resolverlos.

Este documento contiene todos los problemas de las ediciones XVI, XVII, XVIII y XIX de la OHM, así como sus respectivas soluciones. El lector encontrará que varios de los problemas planteados son de un nivel de dificultad avanzado, por lo que puede ser necesaria una preparación previa en los temarios de olimpiadas matemáticas antes de intentar resolverlos. De igual forma, se recomienda al lector dedicar un tiempo prudencial en intentar resolver los problemas y hasta después leer las soluciones propuestas. El autor espera que este documento resulte de utilidad en el entrenamiento de los estudiantes y tutores de los 18 departamentos de Honduras que quieran participar en futuras ediciones de esta competencia.

José Arrazola.

Tegucigalpa, Honduras.
Enero de 2022.

Parte I

Problemas Propuestos

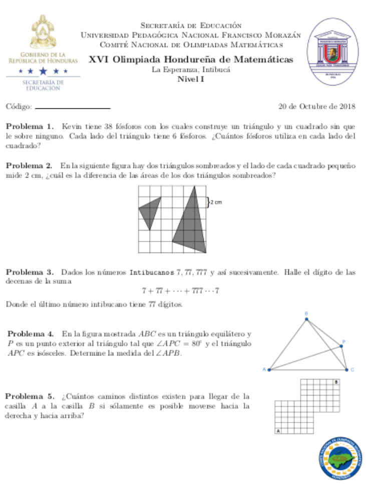
Capítulo 1

XVI Olimpiada Hondureña de Matemática

La Esperanza, Intibucá

20 de Octubre de 2018

Nivel I



Secretaría de Educación
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Comité Nacional de Olimpiadas Matemáticas
XVI Olimpiada Hondureña de Matemáticas
La Esperanza, Intibucá
Nivel I

Código: ____________ 20 de Octubre de 2018

Problema 1. Kevin tiene 38 fósforos con los cuales construye un triángulo y un cuadrado sin que le sobre ninguno. Cada lado del triángulo tiene 6 fósforos. ¿Cuántos fósforos utiliza en cada lado del cuadrado?

Problema 2. En la siguiente figura hay dos triángulos sombreados y el lado de cada cuadrado pequeño mide 2 cm, ¿cuál es la diferencia de las áreas de los dos triángulos sombreados?

Problema 3. Dados los números `Intibucanos` 7, 77, 777 y así sucesivamente. Halle el dígito de las decenas de la suma

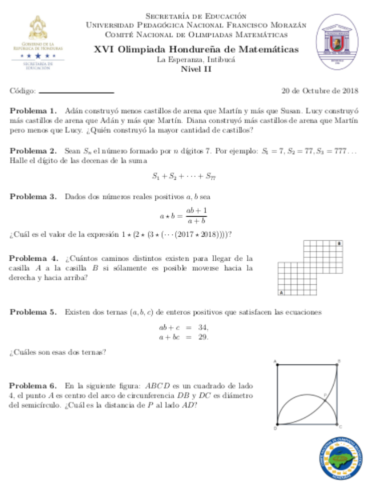
$$7 + 77 + \cdots + 777\cdots7$$

Donde el último número intibucano tiene 77 dígitos.

Problema 4. En la figura mostrada ABC es un triángulo equilátero y P es un punto exterior al triángulo tal que $\angle APC = 80^\circ$ y el triángulo APC es isósceles. Determine la medida del $\angle APB$.

Problema 5. ¿Cuántos caminos distintos existen para llegar de la casilla A a la casilla B si sólamente es posible moverse hacia la derecha y hacia arriba?

Nivel II



Secretaría de Educación
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Comité Nacional de Olimpiadas Matemáticas
XVI Olimpiada Hondureña de Matemáticas
La Esperanza, Intibucá
Nivel II

Código: ____________ 20 de Octubre de 2018

Problema 1. Adán construyó menos castillos de arena que Martín y más que Susan. Lucy construyó más castillos de arena que Adán y más que Martín. Diana construyó más castillos de arena que Martín pero menos que Lucy. ¿Quién construyó la mayor cantidad de castillos?

Problema 2. Sean S_n el número formado por n dígitos 7. Por ejemplo: $S_1 = 7, S_2 = 77, S_3 = 777\ldots$ Halle el dígito de las decenas de la suma

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{77}$$

Problema 3. Dados dos números reales positivos a, b sea

$$a \star b = \frac{ab+1}{a+b}$$

¿Cuál es el valor de la expresión $1 \star (2 \star (3 \star (\cdots (2017 \star 2018))))$?

Problema 4. ¿Cuántos caminos distintos existen para llegar de la casilla A a la casilla B si sólamente es posible moverse hacia la derecha y hacia arriba?

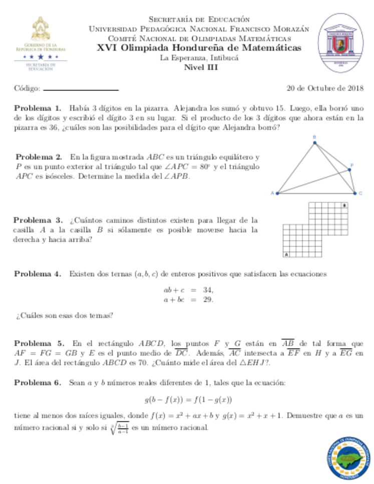
Problema 5. Existen dos ternas (a, b, c) de enteros positivos que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} ab + c &= 34, \\ a + bc &= 29. \end{aligned}$$

¿Cuáles son esas dos ternas?

Problema 6. En la siguiente figura: $ABCD$ es un cuadrado de lado 4, el punto A es centro del arco de circunferencia DB y DC es diámetro del semicírculo. ¿Cuál es la distancia de P al lado AD?

Nivel III



Secretaría de Educación
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Comité Nacional de Olimpiadas Matemáticas
XVI Olimpiada Hondureña de Matemáticas
La Esperanza, Intibucá
Nivel III

Código: ____________ 20 de Octubre de 2018

Problema 1. Había 3 dígitos en la pizarra. Alejandra los sumó y obtuvo 15. Luego, ella borró uno de los dígitos y escribió el dígito 3 en su lugar. Si el producto de los 3 dígitos que ahora están en la pizarra es 36, ¿cuáles son las posibilidades para el dígito que Alejandra borró?

Problema 2. En la figura mostrada ABC es un triángulo equilátero y P es un punto exterior al triángulo tal que $\angle APC = 80^\circ$ y el triángulo APC es isósceles. Determine la medida del $\angle APB$.

Problema 3. ¿Cuántos caminos distintos existen para llegar de la casilla A a la casilla B si sólamente es posible moverse hacia la derecha y hacia arriba?

Problema 4. Existen dos ternas (a, b, c) de enteros positivos que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} ab + c &= 34, \\ a + bc &= 29. \end{aligned}$$

¿Cuáles son esas dos ternas?

Problema 5. En el rectángulo $ABCD$, los puntos F y G están en $\overline{AB}$ de tal forma que $AF = FG = GB$ y E es el punto medio de $\overline{DC}$. Además, $\overline{AC}$ intersecta a $\overline{EF}$ en H y a $\overline{EG}$ en J. El área del rectángulo $ABCD$ es 70. ¿Cuánto mide el área del $\triangle EHJ$?.

Problema 6. Sean a y b números reales diferentes de 1, tales que la ecuación:

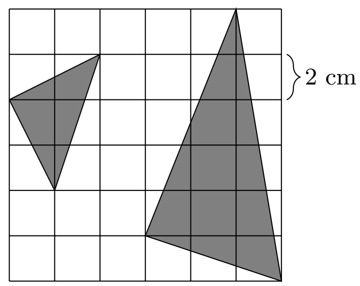
$$g(b - f(x)) = f(1 - g(x))$$

tiene al menos dos raíces iguales, donde $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^2 + x + 1$. Demuestre que a es un número racional si y solo si $\sqrt[3]{\frac{b-1}{a-1}}$ es un número racional.

1.1. Nivel I

Problema 1. Kevin tiene 38 fósforos con los cuales construye un triángulo y un cuadrado sin que le sobre ninguno. Cada lado del triángulo tiene 6 fósforos. ¿Cuántos fósforos utiliza en cada lado del cuadrado?

Problema 2. En la siguiente figura hay dos triángulos sombreados y el lado de cada cuadrado pequeño mide 2 cm, ¿cuál es la diferencia de las áreas de los dos triángulos sombreados?

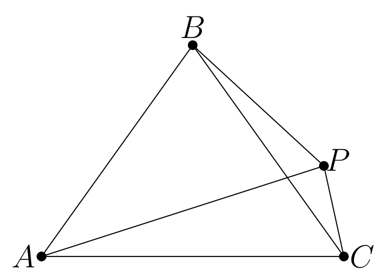


Problema 3. Dados los números `Intibucanos` $7, 77, 777$ y así sucesivamente. Halle el dígito de las decenas de la suma

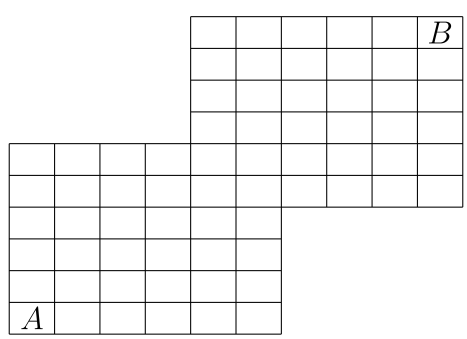
$$7 + 77 + \cdots + 777\cdots7$$

Donde el último número intibucano tiene 77 dígitos.

Problema 4. En la figura mostrada ABC es un triángulo equilátero y P es un punto exterior al triángulo tal que $\angle APC = 80^\circ$ y el triángulo APC es isósceles. Determine la medida del $\angle APB$.



Problema 5. ¿Cuántos caminos distintos existen para llegar de la casilla A a la casilla B si sólamente es posible moverse hacia la derecha y hacia arriba?



1.2. Nivel II

Problema 1. Adán construyó menos castillos de arena que Martín y más que Susan. Lucy construyó más castillos de arena que Adán y más que Martín. Diana construyó más castillos de arena que Martín pero menos que Lucy. ¿Quién construyó la mayor cantidad de castillos?

Problema 2. Sean S_n el número formado por n dígitos 7. Por ejemplo: $S_1 = 7, S_2 = 77, S_3 = 777\ldots$ Halle el dígito de las decenas de la suma

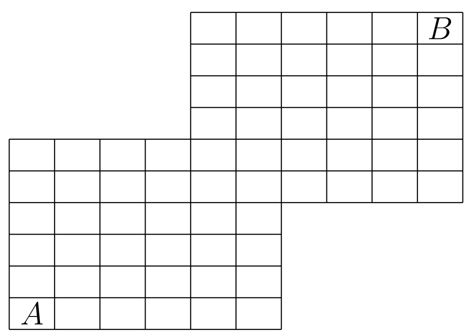
$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{77}$$

Problema 3. Dados dos números reales positivos a, b sea

$$a \star b = \frac{ab+1}{a+b}$$

¿Cuál es el valor de la expresión $1 \star (2 \star (3 \star (\cdots (2017 \star 2018))))$?

Problema 4. ¿Cuántos caminos distintos existen para llegar de la casilla A a la casilla B si sólamente es posible moverse hacia la derecha y hacia arriba?

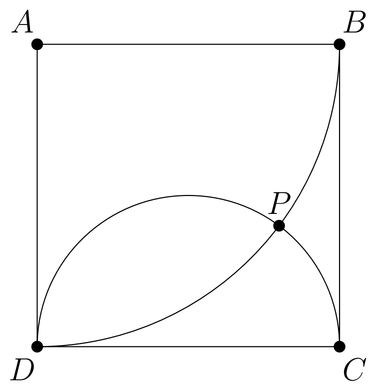


Problema 5. Existen dos ternas (a, b, c) de enteros positivos que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} ab + c &= 34, \\ a + bc &= 29. \end{aligned}$$

¿Cuáles son esas dos ternas?

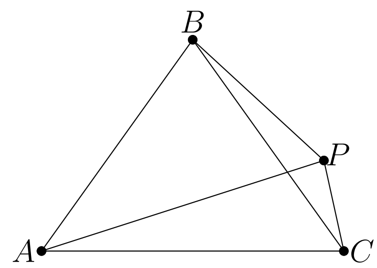
Problema 6. En la siguiente figura: $ABCD$ es un cuadrado de lado 4, el punto A es centro del arco de circunferencia DB y DC es diámetro del semicírculo. ¿Cuál es la distancia de P al lado AD?



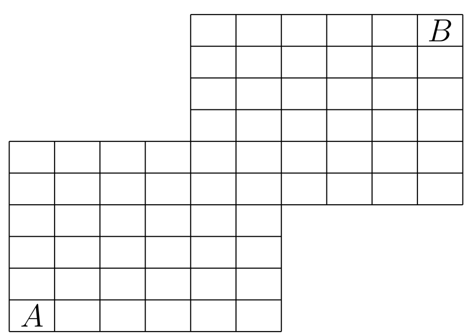
1.3. Nivel III

Problema 1. Había 3 dígitos en la pizarra. Alejandra los sumó y obtuvo 15. Luego, ella borró uno de los dígitos y escribió el dígito 3 en su lugar. Si el producto de los 3 dígitos que ahora están en la pizarra es 36, ¿cuáles son las posibilidades para el dígito que Alejandra borró?

Problema 2. En la figura mostrada ABC es un triángulo equilátero y P es un punto exterior al triángulo tal que $\angle APC = 80°$ y el triángulo APC es isósceles. Determine la medida del $\angle APB$.



Problema 3. ¿Cuántos caminos distintos existen para llegar de la casilla A a la casilla B si sólamente es posible moverse hacia la derecha y hacia arriba?



Problema 4. Existen dos ternas (a, b, c) de enteros positivos que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} ab + c &= 34, \\ a + bc &= 29. \end{aligned}$$

¿Cuáles son esas dos ternas?

Problema 5. En el rectángulo $ABCD$, los puntos F y G están en $\overline{AB}$ de tal forma que $AF = FG = GB$ y E es el punto medio de $\overline{DC}$. Además, $\overline{AC}$ intersecta a $\overline{EF}$ en H y a $\overline{EG}$ en J. El área del rectángulo $ABCD$ es 70. ¿Cuánto mide el área del $\triangle EHJ$?.

Problema 6. Sean a y b números reales diferentes de 1, tales que la ecuación:

$$g(b - f(x)) = f(1 - g(x))$$

tiene al menos dos raíces iguales, donde $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^2 + x + 1$. Demuestre que a es un número racional si y solo si $\sqrt[3]{\frac{b-1}{a-1}}$ es un número racional.

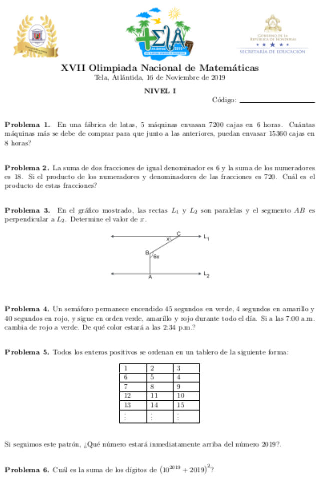
Capítulo 2

XVII Olimpiada Hondureña de Matemática

Tela, Atlántida

16 de Noviembre de 2019

Nivel I



XVII Olimpiada Nacional de Matemáticas

Tela, Atlántida, 16 de Noviembre de 2019

NIVEL I

Código: ____________

Problema 1. En una fábrica de latas, 5 máquinas envasan 7200 cajas en 6 horas. Cuántas máquinas más se debe de comprar para que junto a las anteriores, puedan envasar 15360 cajas en 8 horas?

Problema 2. La suma de dos fracciones de igual denominador es 6 y la suma de los numeradores es 18. Si el producto de los numeradores y denominadores de las fracciones es 720. Cuál es el producto de estas fracciones?

Problema 3. En el gráfico mostrado, las rectas L_1 y L_2 son paralelas y el segmento AB es perpendicular a L_2. Determine el valor de x.

Problema 4. Un semáforo permanece encendido 45 segundos en verde, 4 segundos en amarillo y 40 segundos en rojo, y sigue en orden verde, amarillo y rojo durante todo el día. Si a las 7:00 a.m. cambia de rojo a verde. De qué color estará a las 2:34 p.m.?

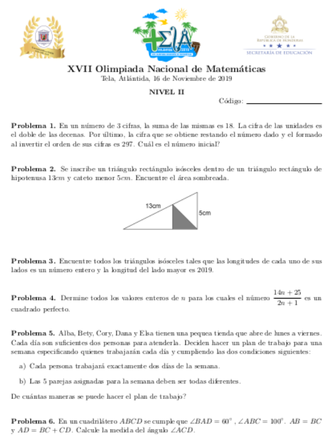
Problema 5. Todos los enteros positivos se ordenan en un tablero de la siguiente forma:

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10
13	14	15
⋮	⋮	⋮

Si seguimos este patrón, ¿Qué número estará inmediatamente arriba del número 2019?.

Problema 6. Cuál es la suma de los dígitos de $\left(10^{2019}+2019\right)^2$?

Nivel II



XVII Olimpiada Nacional de Matemáticas

Tela, Atlántida, 16 de Noviembre de 2019

NIVEL II

Código: ____________

Problema 1. En un número de 3 cifras, la suma de las mismas es 18. La cifra de las unidades es el doble de las decenas. Por último, la cifra que se obtiene restando el número dado y el formado al invertir el orden de sus cifras es 297. Cuál es el número inicial?

Problema 2. Se inscribe un triángulo rectángulo isósceles dentro de un triángulo rectángulo de hipotenusa 13cm y cateto menor 5cm. Encuentre el área sombreada.

Problema 3. Encuentre todos los triángulos isósceles tales que las longitudes de cada uno de sus lados es un número entero y la longitud del lado mayor es 2019.

Problema 4. Dermine todos los valores enteros de n para los cuales el número $\dfrac{14n+25}{2n+1}$ es un cuadrado perfecto.

Problema 5. Alba, Bety, Cory, Dana y Elsa tienen una pequea tienda que abre de lunes a viernes. Cada día son suficientes dos personas para atenderla. Deciden hacer un plan de trabajo para una semana especificando quienes trabajarán cada día y cumpliendo las dos condiciones siguientes:

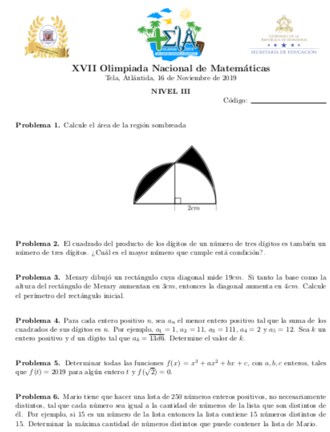
a) Cada persona trabajará exactamente dos días de la semana.

b) Las 5 parejas asignadas para la semana deben ser todas diferentes.

De cuántas maneras se puede hacer el plan de trabajo?

Problema 6. En un cuadrilátero $ABCD$ se cumple que $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$. $AB = BC$ y $AD = BC + CD$. Calcule la medida del ángulo $\angle ACD$.

Nivel III



XVII Olimpiada Nacional de Matemáticas

Tela, Atlántida, 16 de Noviembre de 2019

NIVEL III

Código: ____________

Problema 1. Calcule el área de la región sombreada

Problema 2. El cuadrado del producto de los dígitos de un número de tres dígitos es también un número de tres dígitos. ¿Cuál es el mayor número que cumple está condición?.

Problema 3. Merary dibujó un rectángulo cuya diagonal mide 19cm. Si tanto la base como la altura del rectángulo de Merary aumentan en 3cm, entonces la diagonal aumenta en 4cm. Calcule el perímetro del rectángulo inicial.

Problema 4. Para cada entero positivo n, sea a_n el menor entero positivo tal que la suma de los cuadrados de sus dígitos es n. Por ejemplo, $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, $a_4 = 2$ y $a_5 = 12$. Sea k un entero positivo y d un dígito tal que $a_k = \overline{13d6}$. Determine el valor de k.

Problema 5. Determinar todas las funciones $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con a, b, c enteros, tales que $f(t) = 2019$ para algún entero t y $f(\sqrt{2}) = 0$.

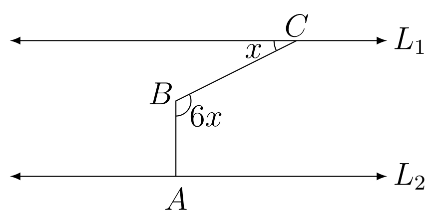
Problema 6. Mario tiene que hacer una lista de 250 números enteros positivos, no necesariamente distintos, tal que cada número sea igual a la cantidad de números de la lista que son distintos de él. Por ejemplo, si 15 es un número de la lista entonces la lista contiene 15 números distintos de 15. Determinar la máxima cantidad de números distintos que puede contener la lista de Mario.

2.1. Nivel I

Problema 1. En una fábrica de latas, 5 máquinas envasan 7200 cajas en 6 horas. ¿Cuántas máquinas más se debe de comprar para que junto a las anteriores, puedan envasar 15360 cajas en 8 horas?

Problema 2. La suma de dos fracciones de igual denominador es 6 y la suma de los numeradores es 18. Si el producto de los numeradores y denominadores de las fracciones es 720. ¿Cuál es el producto de estas fracciones?

Problema 3. En el gráfico mostrado, las rectas L_1 y L_2 son paralelas y el segmento AB es perpendicular a L_2. Determine el valor de x.



Problema 4. Un semáforo permanece encendido 45 segundos en verde, 4 segundos en amarillo y 40 segundos en rojo, y sigue en orden verde, amarillo y rojo durante todo el día. Si a las 7:00 a.m. cambia de rojo a verde. ¿De qué color estará a las 2:34 p.m.?

Problema 5. Todos los enteros positivos se ordenan en un tablero de la siguiente forma:

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10
13	14	15
⋮	⋮	⋮

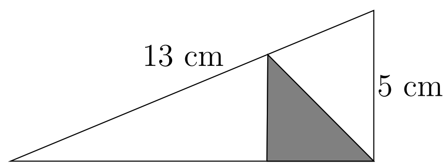
Si seguimos este patrón, ¿Qué número estará inmediatamente arriba del número 2019?.

Problema 6. ¿Cuál es la suma de los dígitos de $\left(10^{2019}+2019\right)^2$?

2.2. Nivel II

Problema 1. En un número de 3 cifras, la suma de las mismas es 18. La cifra de las unidades es el doble de las decenas. Por último, el número que se obtiene restando el número dado y el formado al invertir el orden de sus cifras es 297. ¿Cuál es el número inicial?

Problema 2. Se inscribe un triángulo rectángulo isósceles dentro de un triángulo rectángulo de hipotenusa $13cm$ y cateto menor $5cm$. Encuentre el área sombreada.



Problema 3. Encuentre todos los triángulos isósceles tales que las longitudes de cada uno de sus lados es un número entero y la longitud del lado mayor es 2019.

Problema 4. Dermine todos los valores enteros de n para los cuales el número $\dfrac{14n+25}{2n+1}$ es un cuadrado perfecto.

Problema 5. Alba, Bety, Cory, Dana y Elsa tienen una pequeña tienda que abre de lunes a viernes. Cada día son suficientes dos personas para atenderla. Deciden hacer un plan de trabajo para una semana especificando quienes trabajarán cada día y cumpliendo las dos condiciones siguientes:

a) Cada persona trabajará exactamente dos días de la semana.

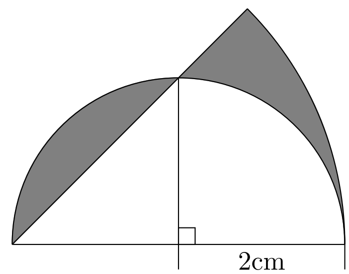
b) Las 5 parejas asignadas para la semana deben ser todas diferentes.

¿De cuántas maneras se puede hacer el plan de trabajo?

Problema 6. En un cuadrilátero $ABCD$ se cumple que $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$. $AB = BC$ y $AD = BC + CD$. Calcule la medida del ángulo $\angle ACD$.

2.3. Nivel III

Problema 1. Calcule el área de la región sombreada



Problema 2. El cuadrado del producto de los dígitos de un número de tres dígitos es también un número de tres dígitos. ¿Cuál es el mayor número que cumple está condición?.

Problema 3. Merary dibujó un rectángulo cuya diagonal mide $19cm$. Si tanto la base como la altura del rectángulo de Merary aumentan en $3cm$, entonces la diagonal aumenta en $4cm$. Calcule el perímetro del rectángulo inicial.

Problema 4. Para cada entero positivo n, sea a_n el menor entero positivo tal que la suma de los cuadrados de sus dígitos es n. Por ejemplo, $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, $a_4 = 2$ y $a_5 = 12$. Sea k un entero positivo y d un dígito tal que $a_k = \overline{13d6}$. Determine el valor de k.

Problema 5. Determinar todas las funciones $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con a, b, c enteros, tales que $f(t) = 2019$ para algún entero t y $f(\sqrt{2}) = 0$.

Problema 6. Mario tiene que hacer una lista de 250 números enteros positivos, no necesariamente distintos, tal que cada número sea igual a la cantidad de números de la lista que son distintos de él. Por ejemplo, si 15 es un número de la lista entonces la lista contiene 15 números distintos de 15. Determinar la máxima cantidad de números distintos que puede contener la lista de Mario.

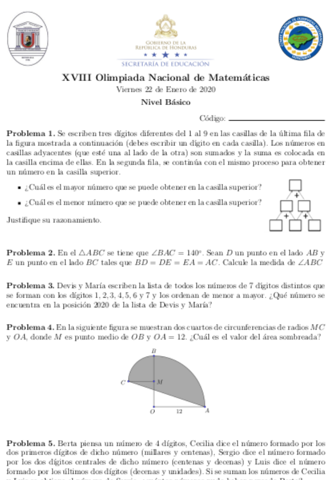
Capítulo 3

XVIII Olimpiada Hondureña de Matemática

Modalidad Virtual

22 de Enero de 2021

Nivel Básico



Gobierno de la República de Honduras
Secretaría de Educación

XVIII Olimpiada Nacional de Matemáticas

Viernes 22 de Enero de 2020

Nivel Básico

Código: ____________________

Problema 1. Se escriben tres dígitos diferentes del 1 al 9 en las casillas de la última fila de la figura mostrada a continuación (debes escribir un dígito en cada casilla). Los números en casillas adyacentes (que esté una al lado de la otra) son sumados y la suma es colocada en la casilla encima de ellas. En la segunda fila, se continúa con el mismo proceso para obtener un número en la casilla superior.

- ¿Cuál es el mayor número que se puede obtener en la casilla superior?
- ¿Cuál es el menor número que se puede obtener en la casilla superior?

Justifique su razonamiento.

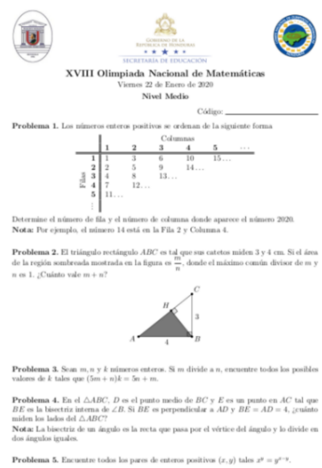
Problema 2. En el $\triangle ABC$ se tiene que $\angle BAC = 140^\circ$. Sean D un punto en el lado AB y E un punto en el lado BC tales que $BD = DE = EA = AC$. Calcule la medida de $\angle ABC$

Problema 3. Devis y María escriben la lista de todos los números de 7 dígitos distintos que se forman con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7 y los ordenan de menor a mayor. ¿Qué número se encuentra en la posición 2020 de la lista de Devis y María?

Problema 4. En la siguiente figura se muestran dos cuartos de circunferencias de radios MC y OA, donde M es punto medio de OB y $OA = 12$. ¿Cuál es el valor del área sombreada?

Problema 5. Berta piensa un número de 4 dígitos, Cecilia dice el número formado por los dos primeros dígitos de dicho número (millares y centenas), Sergio dice el número formado por los dos dígitos centrales de dicho número (centenas y decenas) y Luis dice el número formado por los últimos dos dígitos (decenas y unidades). Si se suman los números de Cecilia y Luis se obtiene el número de Sergio, ¿cuántos números pudo haber pensado Berta?

Nivel Medio



Gobierno de la República de Honduras
Secretaría de Educación

XVIII Olimpiada Nacional de Matemáticas

Viernes 22 de Enero de 2020

Nivel Medio

Código: ____________________

Problema 1. Los números enteros positivos se ordenan de la siguiente forma

		Columnas					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	…
Filas	**1**	1	3	6	10	15…	
	2	2	5	9	14…		
	3	4	8	13…			
	4	7	12…				
	5	11…					
	⋮						

Determine el número de fila y el número de columna donde aparece el número 2020.
Nota: Por ejemplo, el número 14 está en la Fila 2 y Columna 4.

Problema 2. El triángulo rectángulo ABC es tal que sus catetos miden 3 y 4 cm. Si el área de la región sombreada mostrada en la figura es $\frac{m}{n}$, donde el máximo común divisor de m y n es 1. ¿Cuánto vale $m+n$?

Problema 3. Sean m, n y k números enteros. Si m divide a n, encuentre todos los posibles valores de k tales que $(5m+n)k = 5n+m$.

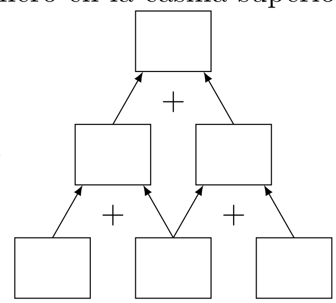
Problema 4. En el $\triangle ABC$, D es el punto medio de BC y E es un punto en AC tal que BE es la bisectriz interna de $\angle B$. Si BE es perpendicular a AD y $BE = AD = 4$, ¿cuánto miden los lados del $\triangle ABC$?
Nota: La bisectriz de un ángulo es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos iguales.

Problema 5. Encuentre todos los pares de enteros positivos (x, y) tales $x^y = y^{x-y}$.

3.1. Nivel Básico

Problema 1. Se escriben tres dígitos diferentes del 1 al 9 en las casillas de la última fila de la figura mostrada a continuación (debes escribir un dígito en cada casilla). Los números en casillas adyacentes (que esté una al lado de la otra) son sumados y la suma es colocada en la casilla encima de ellas. En la segunda fila, se continúa con el mismo proceso para obtener un número en la casilla superior.

- ¿Cuál es el mayor número que se puede obtener en la casilla superior?
- ¿Cuál es el menor número que se puede obtener en la casilla superior?

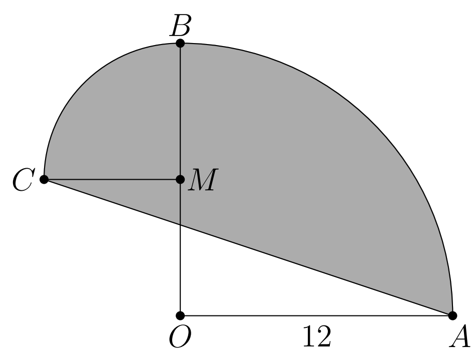


Justifique su razonamiento.

Problema 2. En el $\triangle ABC$ se tiene que $\angle BAC = 140°$. Sean D un punto en el lado AB y E un punto en el lado BC tales que $BD = DE = EA = AC$. Calcule la medida de $\angle ABC$

Problema 3. Devis y María escriben la lista de todos los números de 7 dígitos distintos que se forman con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7 y los ordenan de menor a mayor. ¿Qué número se encuentra en la posición 2020 de la lista de Devis y María?

Problema 4. En la siguiente figura se muestran dos cuartos de circunferencias de radios MC y OA, donde M es punto medio de OB y $OA = 12$. ¿Cuál es el valor del área sombreada?



Problema 5. Berta piensa un número de 4 dígitos, Cecilia dice el número formado por los dos primeros dígitos de dicho número (millares y centenas), Sergio dice el número formado por los dos dígitos centrales de dicho número (centenas y decenas) y Luis dice el número formado por los últimos dos dígitos (decenas y unidades). Si se suman los números de Cecilia y Luis se obtiene el número de Sergio, ¿cuántos números pudo haber pensado Berta?

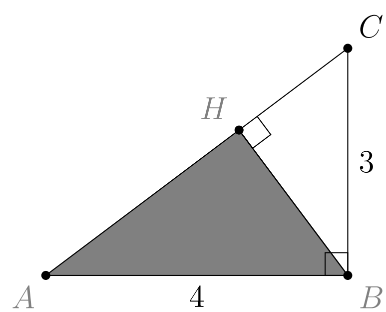
3.2. Nivel Medio

Problema 1. Los números enteros positivos se ordenan de la siguiente forma

	Columnas					
Filas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\cdots$
1	1	3	6	10	15 ...	
2	2	5	9	14 ...		
3	4	8	13 ...			
4	7	12 ...				
5	11 ...					
$\vdots$						

Determine el número de fila y el número de columna donde aparece el número 2020.
Nota: Por ejemplo, el número 14 está en la Fila 2 y Columna 4.

Problema 2. El triángulo rectángulo ABC es tal que sus catetos miden 3 y 4 cm. Si el área de la región sombreada mostrada en la figura es $\frac{m}{n}$, donde el máximo común divisor de m y n es 1. ¿Cuánto vale $m+n$?



Problema 3. Sean m, n y k números enteros. Si m divide a n, encuentre todos los posibles valores de k tales que $(5m+n)k = 5n+m$.

Problema 4. En el $\triangle ABC$, D es el punto medio de BC y E es un punto en AC tal que BE es la bisectriz interna de $\angle B$. Si BE es perpendicular a AD y $BE = AD = 4$, ¿cuánto miden los lados del $\triangle ABC$?
Nota: La bisectriz de un ángulo es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos iguales.

Problema 5. Encuentre todos los pares de enteros positivos (x, y) tales $x^y = y^{x-y}$.

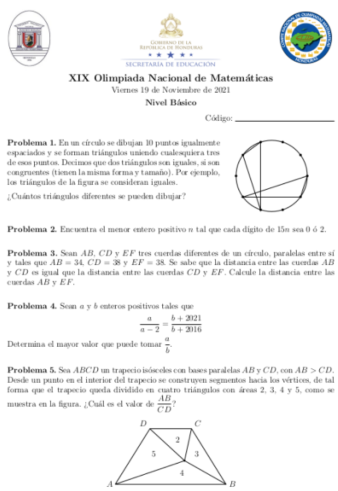
Capítulo 4

XIX Olimpiada Hondureña de Matemática

Modalidad Virtual

19 de Noviembre de 2021

Nivel Básico



XIX Olimpiada Nacional de Matemáticas

Viernes 19 de Noviembre de 2021

Nivel Básico

Código: ____________

Problema 1. En un círculo se dibujan 10 puntos igualmente espaciados y se forman triángulos uniendo cualesquiera tres de esos puntos. Decimos que dos triángulos son iguales, si son congruentes (tienen la misma forma y tamaño). Por ejemplo, los triángulos de la figura se consideran iguales.

¿Cuántos triángulos diferentes se pueden dibujar?

Problema 2. Encuentra el menor entero positivo n tal que cada dígito de $15n$ sea 0 ó 2.

Problema 3. Sean AB, CD y EF tres cuerdas diferentes de un círculo, paralelas entre sí y tales que $AB = 34$, $CD = 38$ y $EF = 38$. Se sabe que la distancia entre las cuerdas AB y CD es igual que la distancia entre las cuerdas CD y EF. Calcule la distancia entre las cuerdas AB y EF.

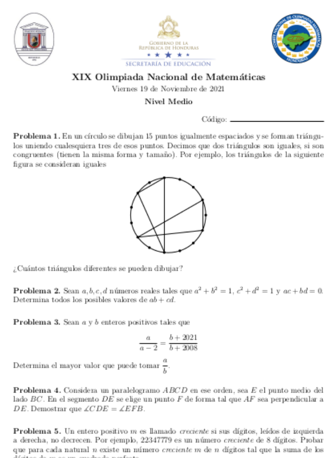
Problema 4. Sean a y b enteros positivos tales que

$$\frac{a}{a-2} = \frac{b+2021}{b+2016}$$

Determina el mayor valor que puede tomar $\frac{a}{b}$.

Problema 5. Sea $ABCD$ un trapecio isósceles con bases paralelas AB y CD, con $AB > CD$. Desde un punto en el interior del trapecio se construyen segmentos hacia los vértices, de tal forma que el trapecio queda dividido en cuatro triángulos con áreas 2, 3, 4 y 5, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de $\frac{AB}{CD}$?

Nivel Medio



XIX Olimpiada Nacional de Matemáticas

Viernes 19 de Noviembre de 2021

Nivel Medio

Código: ____________

Problema 1. En un círculo se dibujan 15 puntos igualmente espaciados y se forman triángulos uniendo cualesquiera tres de esos puntos. Decimos que dos triángulos son iguales, si son congruentes (tienen la misma forma y tamaño). Por ejemplo, los triángulos de la siguiente figura se consideran iguales

¿Cuántos triángulos diferentes se pueden dibujar?

Problema 2. Sean a, b, c, d números reales tales que $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ y $ac + bd = 0$. Determina todos los posibles valores de $ab + cd$.

Problema 3. Sean a y b enteros positivos tales que

$$\frac{a}{a-2} = \frac{b+2021}{b+2008}$$

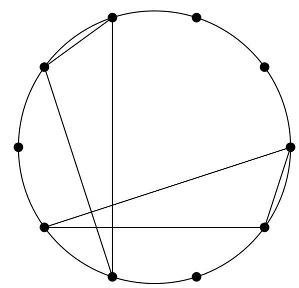
Determina el mayor valor que puede tomar $\frac{a}{b}$.

Problema 4. Considera un paralelogramo $ABCD$ en ese orden, sea E el punto medio del lado BC. En el segmento DE se elige un punto F de forma tal que AF sea perpendicular a DE. Demostrar que $\angle CDE = \angle EFB$.

Problema 5. Un entero positivo m es llamado *creciente* si sus dígitos, leídos de izquierda a derecha, no decrecen. Por ejemplo, 22347779 es un número *creciente* de 8 dígitos. Probar que para cada natural n existe un número *creciente* m de n dígitos tal que la suma de los dígitos de m es un cuadrado perfecto.

4.1. Nivel Básico

Problema 1. En un círculo se dibujan 10 puntos igualmente espaciados y se forman triángulos uniendo cualesquiera tres de esos puntos. Decimos que dos triángulos son iguales, si son congruentes (tienen la misma forma y tamaño). Por ejemplo, los triángulos de la figura se consideran iguales.



¿Cuántos triángulos diferentes se pueden dibujar?

Problema 2. Encuentra el menor entero positivo n tal que cada dígito de $15n$ sea 0 ó 2.

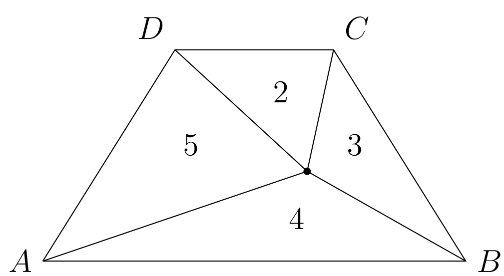
Problema 3. Sean AB, CD y EF tres cuerdas diferentes de un círculo, paralelas entre sí y tales que $AB = 34$, $CD = 38$ y $EF = 38$. Se sabe que la distancia entre las cuerdas AB y CD es igual que la distancia entre las cuerdas CD y EF. Calcule la distancia entre las cuerdas AB y EF.

Problema 4. Sean a y b enteros positivos tales que

$$\frac{a}{a-2} = \frac{b+2021}{b+2016}$$

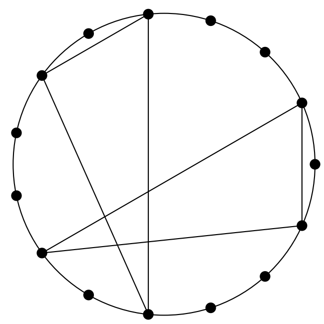
Determina el mayor valor que puede tomar $\frac{a}{b}$.

Problema 5. Sea $ABCD$ un trapecio isósceles con bases paralelas AB y CD, con $AB > CD$. Desde un punto en el interior del trapecio se construyen segmentos hacia los vértices, de tal forma que el trapecio queda dividido en cuatro triángulos con áreas 2, 3, 4 y 5, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de $\frac{AB}{CD}$?



4.2. Nivel Medio

Problema 1. En un círculo se dibujan 15 puntos igualmente espaciados y se forman triángulos uniendo cualesquiera tres de esos puntos. Decimos que dos triángulos son iguales, si son congruentes (tienen la misma forma y tamaño). Por ejemplo, los triángulos de la siguiente figura se consideran iguales



¿Cuántos triángulos diferentes se pueden dibujar?

Problema 2. Sean a, b, c, d números reales tales que $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ y $ac + bd = 0$. Determina todos los posibles valores de $ab + cd$.

Problema 3. Sean a y b enteros positivos tales que

$$\frac{a}{a-2} = \frac{b+2021}{b+2008}$$

Determina el mayor valor que puede tomar $\frac{a}{b}$.

Problema 4. Considera un paralelogramo $ABCD$ en ese orden, sea E el punto medio del lado BC. En el segmento DE se elige un punto F de forma tal que AF sea perpendicular a DE. Demostrar que $\measuredangle CDE = \measuredangle EFB$.

Problema 5. Un entero positivo m es llamado *creciente* si sus dígitos, leídos de izquierda a derecha, no decrecen. Por ejemplo, 22347779 es un número *creciente* de 8 dígitos. Probar que para cada natural n existe un número *creciente* m de n dígitos tal que la suma de los dígitos de m es un cuadrado perfecto.

Parte II

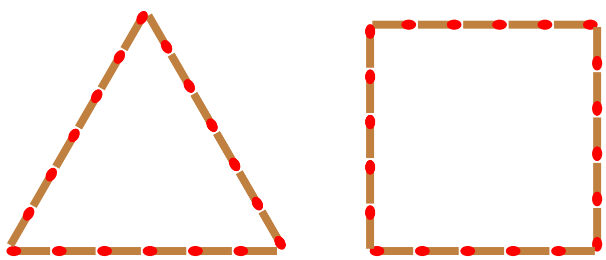
Soluciones

Capítulo 5

Soluciones de la XVI OHM

5.1. Nivel I

Problema 1. Como cada lado del triángulo está compuesto por 6 fósforos, Kevin utilizó $6 \times 3 = 18$ fósforos en su construcción. Por lo que le sobran $38 - 18 = 20$ fósforos para construir un cuadrado. Como un cuadrado tiene 4 lados, cada lado del cuadrado estará formado por $\frac{20}{4} = 5$ fósforos.
Aquí un bosquejo de la solución:

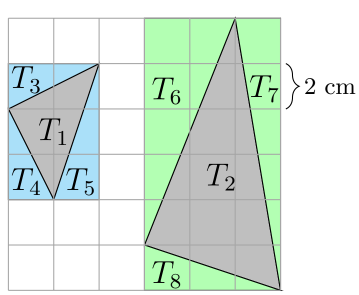


Problema 2. En la figura mostrada a continuación se han marcado los triángulos $T_1, T_2, \ldots, T_8$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, 8$ denotaremos el área del triángulo T_i por $|T_i|$. Entonces, el problema nos pide encontrar el valor de $|T_2| - |T_1|$.

Observa que la unión de los triángulos T_1, T_3, T_4 y T_5 es un rectángulo de dimensión 4cm×6cm. Similarmente, la unión de los triángulos T_2, T_6, T_7 y T_8 es un rectángulo de dimensión 6cm×12cm. Por lo que:

$$|T_1| + |T_3| + |T_4| + |T_5| = 4\text{cm} \times 6\text{cm} = 24\text{cm}^2 \tag{1}$$

$$|T_2| + |T_6| + |T_7| + |T_8| = 6\text{cm} \times 12\text{cm} = 72\text{cm}^2 \tag{2}$$



Como $T_3, T_4, \ldots, T_8$ son triángulos rectángulos con catetos paralelos a los ejes, podemos calcular fácilmente su área:

$|T_3| = \frac{1}{2}(4 \times 2)\text{cm}^2 = 4\text{cm}^2$ $\quad |T_4| = \frac{1}{2}(2 \times 4)\text{cm}^2 = 4\text{cm}^2$ $\quad |T_5| = \frac{1}{2}(2 \times 6)\text{cm}^2 = 6\text{cm}^2$

$|T_6| = \frac{1}{2}(4 \times 10)\text{cm}^2 = 20\text{cm}^2$ $\quad |T_7| = \frac{1}{2}(2 \times 12)\text{cm}^2 = 12\text{cm}^2$ $\quad |T_8| = \frac{1}{2}(6 \times 2)\text{cm}^2 = 6\text{cm}^2$

Combinando estos resultados con las ecuaciones (1) y (2) obtenemos que $|T_1| = 10\text{cm}^2$ y $|T_2| = 34\text{cm}^2$, por lo tanto, la diferencia de las áreas de los dos triángulos que indica el problema es:

$$|T_2| - |T_1| = 24\text{cm}^2.$$

Problema 3. Sea $S = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{7 \cdots 7}_{77-veces}$ la suma de los primeros 77 números intibucanos, entonces, el problema nos piden encontrar el dígito de las decenas de S. Nota que solamente los dígitos de las unidades y decenas de los 77 números intibucanos "aportan" al dígito de las decenas de S.

$$\begin{array}{r} 7+ \\ 77+ \\ 777+ \\ \vdots\; \\ 77\cdots777+ \\ 777\cdots777 \\ \hline S \end{array}$$

Luego, el dígito de las decenas de S es el mismo dígito de las decenas de:

$$7 + \underbrace{77 + 77 + \cdots + 77}_{76-veces} = 7 + 77 \cdot 76 = 5859$$

Por lo tanto, el dígito de las decenas de la suma de los primeros 77 números intibucanos es 5.

Problema 4. Por hipótesis el triángulo APC es isósceles y $\measuredangle APC = 80°$, entonces $\measuredangle ACP = 80°$ y $\measuredangle PAC = 20°$ (ya que la suma de ángulos internos de un triángulo miden $180°$). Como el triángulo ABC es equilátero, se tiene que $\measuredangle BAC = 60°$. Note que $\measuredangle BAC = \measuredangle BAP + \measuredangle PAC$, luego

$$\measuredangle BAP = \measuredangle BAC - \measuredangle PAC = 60° - 20° = 40°$$

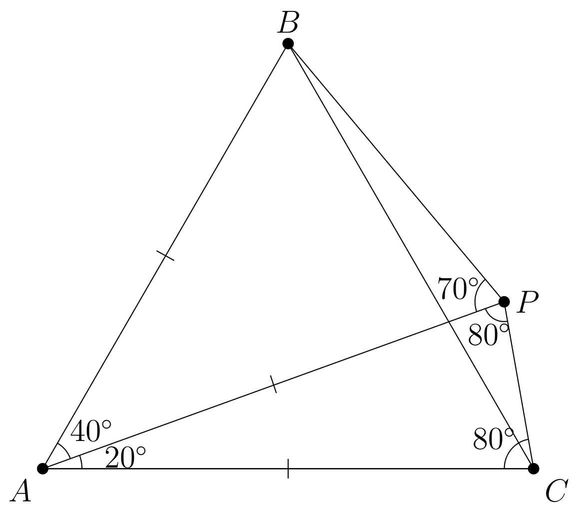
Utilizando nuevamente que el triángulo ABC es equilátero se tiene que $AB = AC$ y como el triángulo APC es isósceles también tenemos que $AC = AP$. Combinando estas dos igualdades se concluye que $AB = AP$ y por lo tanto el triángulo ABP es también isósceles, luego $\measuredangle ABP = \measuredangle APB$.

Sumando ángulos internos en el triángulo ABP se tiene que

$$\begin{aligned} 180° &= \measuredangle BAP + \measuredangle ABP + \measuredangle APB \\ &= 40° + \measuredangle APB + \measuredangle APB \\ &= 40° + 2\measuredangle APB \end{aligned}$$

De donde se concluye que

$$\measuredangle APB = \frac{180° - 40°}{2} = 70°$$

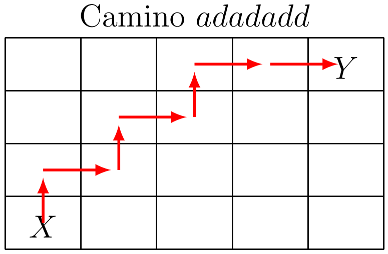


Problema 5. Sea $\mathcal{C}_{m,n}$ una cuadrícula de m filas y n columnas y sean X y Y dos celdas de la cuadrícula $\mathcal{C}_{m,n}$. Diremos que un *camino* de X a Y es una forma de llegar desde la celda X hasta la celda Y realizando únicamente movimientos hacia la derecha y hacia arriba.

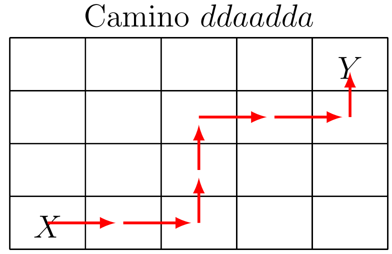
Para ejemplificar el algoritmo de solución de este problema utilizaremos una cuadrícula de 4 filas y 5 columnas en la que caracterizaremos todos los caminos de X a Y. Nota que para llegar desde la celda X hasta la celda Y debemos realizar 4 movimientos hacia la derecha y 3 movimientos hacia arriba. Un movimiento hacia la derecha lo representaremos con la letra d, mientras que un movimiento hacia arriba lo representaremos con la letra a. Así cada camino lo podemos representar como una cadena de 7 letras (4 d's y 3 a's).

En las siguientes gráficas se muestran los caminos *adadadd* y *ddaadda*.

Camino *adadadd*



Camino *ddaadda*



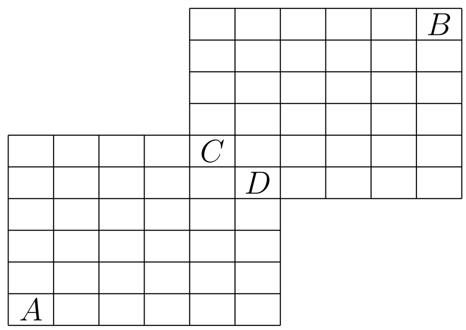
Entonces encontrar todos los caminos de X a Y es equivalente a encontrar todas las permutaciones diferentes que podemos formar con 4 letras d y 3 letras a.

De acuerdo con lo anterior, podemos generalizar lo siguiente: Sea $\mathcal{C}_{m,n}$ una cuadrícula de m filas y n columnas y sea $P(\mathcal{C}_{m,n})$ el total de caminos para llegar de la celda inferior izquierda hasta la celda superior derecha, entonces $P(\mathcal{C}_{m,n})$ se puede calcular como el número de permutaciones de $m - 1$

letras d y $n-1$ letras a, lo que igual a:

$$P(\mathcal{C}_{m,n}) = \binom{(m-1)+(n-1)}{(n-1)}$$

En la siguiente gráfica hemos marcado las celdas C y D. Nota que para llegar desde la celda A hasta la celda B tenemos que pasar obligatoriamente por la celda C o la celda D y no existe ningún camino que pase simultáneamente por la celda C y D (ya que no están permitidos movimientos hacia la izquierda o hacia abajo), es decir, todos los caminos que pasan por la celda C son diferentes de todos los caminos que pasan por la celda D.

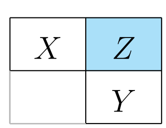


Sea n el número de caminos de A a B, entonces n lo podemos calcular como:

$$\begin{aligned}
n &= (\text{Número de caminos de } A \text{ a } C) \cdot (\text{Número de caminos de } C \text{ a } B) + \\
&= (\text{Número de caminos de } A \text{ a } D) \cdot (\text{Número de caminos de } D \text{ a } B) \\
&= \binom{5+4}{4} \cdot \binom{4+5}{5} + \binom{4+5}{5} \cdot \binom{5+4}{4} \\
&= 2\binom{9}{4} \cdot \binom{9}{5} \\
&= 2 \cdot 126 \cdot 126 \\
&= 31752
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hay $31,752$ formas de llegar desde la celda A hasta la celda B realizando solamente movimientos hacia la derecha y hacia arriba.

<u>*Solución alternativa*</u>: Para esta solución escribiremos en cada celda el número de formas de llegar desde A hasta dicha celda. En la siguiente figura observa que para llegar a la celda pintada en azul solamente podemos hacerlo desde la celda inmediatamente a la izquierda o desde la celda inmediatamente abajo. Entonces es evidente que se debe cumplir que $Z = X + Y$.



Desarrollando este procedimiento para todas las celdas de la cuadrícula del problema original llegamos a la solución.

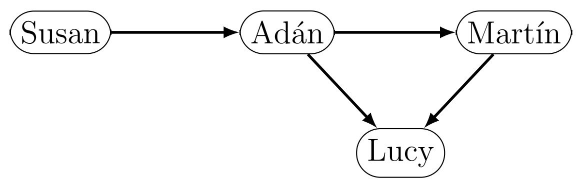
				126	756	2646	7056	15876	B 31752
				126	630	1890	4410	8820	15876
				126	504	1260	2520	4410	7056
				126	378	756	1260	1890	2646
1	6	21	56	126	252	378	504	630	756
1	5	15	35	70	126	126	126	126	126
1	4	10	20	35	56				
1	3	6	10	15	21				
1	2	3	4	5	6				
A	1	1	1	1	1				

5.2. Nivel II

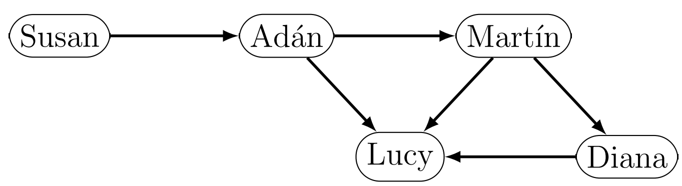
Problema 1. Para resolver este problema utilizaremos un diagrama y una relación de orden entre personas, la que definimos como sigue: $X \longrightarrow Y$ significa que la persona X construyó menos castillos de arena que la persona Y. Aplicaremos esta relación a todas las afirmaciones que aparecen en el enunciado del problema.

- Adán construyó menos castillos de arena que Martín y más que Susan.

- Lucy construyó más castillos de arena que Adán y más que Martín.



- Diana construyó más castillos de arena que Martín pero menos que Lucy.



Analizando el gráfico nos damos cuenta que Lucy construyó más castillos de arena que Diana, que Martín, que Adán y que Susan (por transitividad). Por lo tanto, Lucy fue quien construyó más castillos de arena.

Problema 2. Es el mismo problema que el problema 3 de Nivel I, solo que con una redacción diferente. Ve la solución aquí.

Problema 3. Si $a, b > 0$ entonces $a + b > 0$, luego la función $a \star b = \dfrac{ab+1}{a+b}$ está bien definida para valores positivos (el denominador nunca será 0). Observa también que si $a, b > 0$ entonces $a \star b > 0$.

Por lo anterior, el número $t = 2 \star (3 \star (\cdots 2016 \star (2017 \star 2018)))$ existe y es positivo. Entonces:

$$1 \star (2 \star (3 \star (\cdots (2017 \star 2018)))) = 1 \star t = \frac{1 \cdot t + 1}{1 + t} = \frac{t+1}{1+t} = 1$$

Problema 4. Es el mismo problema que el problema 5 de Nivel I. Ve la solución aquí.

Problema 5. Sean a, b, c enteros positivos que satisfacen

$$\begin{cases} ab + c = 34 \\ a + bc = 29 \end{cases} \tag{3}$$

Si restamos la segunda igualdad de la primera, obtenemos que a, b, c también deben satisfacer:

$$\begin{aligned} (ab + c) - (a + bc) &= 34 - 29 \\ ab + c - a - bc &= 5 \\ a(b - 1) - c(b - 1) &= 5 \\ (a - c)(b - 1) &= 5 \end{aligned}$$

Como a, b, c son enteros positivos, los números $a - c$ y $b - 1$ también son enteros y dividen a 5, por lo que solo hay dos posibilidades:

Caso 1:

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ b - 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c + 1 \\ b = 6 \end{cases} \tag{4}$$

Sustituyendo estos resultados de (4) en la primera ecuación de (3) tenemos que $6(c+1)+c = 34 \Rightarrow c = 4$, de donde $a = 4+1 = 5$, por lo que la terna (a, b, c) que satisface estas condiciones es $(5, 6, 4)$.

Caso 2:

$$\begin{cases} a - c = 5 \\ b - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c + 5 \\ b = 2 \end{cases} \tag{5}$$

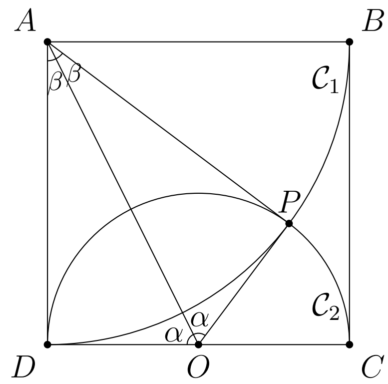
Sustituyendo estos resultados de (5) en la primera ecuación de (3) tenemos que $2(c+5)+c = 34 \Rightarrow c = 8$, de donde $a = 8+5 = 13$, por lo que la terna (a, b, c) que satisface estas condiciones es $(13, 2, 8)$.

Por lo tanto, las dos ternas (a, b, c) que satisfacen las condiciones del problema son $(5, 6, 4)$ y $(13, 2, 8)$.

Problema 6. Sean O el punto medio de CD, $\mathcal{C}_1$ la circunferencia con centro en A y radio 4 y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia con centro en O y radio 2. Trace los segmentos AO, AP y OP.

Nota que $AD = AP = 4$ por ser radios de $\mathcal{C}_1$, similarmente $OD = OP = 2$ por ser radios de $\mathcal{C}_2$. Entonces, por el criterio (LLL) se tiene que $\triangle AOD \cong \triangle AOP$ y

$$\begin{aligned} \measuredangle AOD &= \measuredangle AOP = \alpha \\ \measuredangle DAO &= \measuredangle PAO = \beta \end{aligned} \tag{6}$$

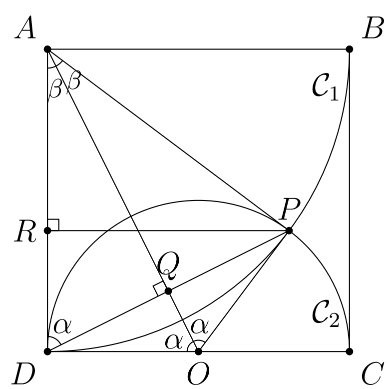


Sumando los ángulos internos del $\triangle AOD$ y utilizando (6) se tiene que:

$$\begin{aligned} \measuredangle ADO + \measuredangle AOD + \measuredangle DAO &= 180^\circ \\ 90^\circ + \alpha + \beta &= 180^\circ \\ \alpha + \beta &= 90^\circ \qquad (7) \end{aligned}$$

Sea Q la intersección de AO con DP y R el punto en AD tal que $AD \perp RP$. Trace los segmentos PR y DP.

Como D es punto de tangencia de AD con $\mathcal{C}_2$, $\measuredangle ADP$ es un ángulo semi-inscrito y utilizando (6) tenemos que $\measuredangle ADP = \frac{1}{2}\measuredangle DOP = \frac{1}{2}(2\alpha) = \alpha$. Luego, por suma de ángulos internos del $\triangle ADQ$ y (7) se sigue que $\measuredangle AQD = 90^\circ$.



Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo AOD tenemos que

$$AO = \sqrt{AD^2 + DO^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

Y por el criterio AA se tiene que que:

$$\triangle DOQ \sim \triangle AOD \qquad (8)$$
$$\triangle ADQ \cong \triangle APQ \qquad (9)$$
$$\triangle PDR \sim \triangle AOD \qquad (10)$$

De (8) se tiene que
$$\frac{DQ}{DO} = \frac{AD}{AO} \Rightarrow DQ = \frac{4}{2\sqrt{5}} \cdot 2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Por (9) tenemos que $DQ = PQ \Rightarrow PD = 2 \cdot DQ = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Finalmente por (10) implica que
$$\frac{PR}{PD} = \frac{AD}{AO} \Rightarrow PR = \frac{4}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{8\sqrt{5}}{5} \Rightarrow PR = \frac{16}{5}$$

Por tanto, la distancia del punto P al lado AD es $PR = \frac{16}{5}$.

5.3. Nivel III

Problema 1. Sean a, b, c los dígitos que estaban escritos en la pizarra inicialmente. La suma que obtuvo Alejandra fue $a + b + c = 15$. Supongamos sin perder generalidad que Alejandra borró el dígito a y en su lugar escribió el dígito 3. El producto de los nuevos 3 dígitos es $3bc = 36$.
Entonces, resolver este problema consiste en encontrar todas las soluciones enteras a, b, c tales que $0 \leq a, b, c \leq 9$ y

$$\begin{cases} a + b + c = 15 \\ 3bc = 36 \end{cases} \tag{11}$$

De la segunda igualdad de (11) tenemos que $bc = 12$. Analizando la factorización de 12 nos damos cuenta que los únicos casos posibles son: $(b, c) = (2, 6), (b, c) = (6, 2), (b, c) = (3, 4), (b, c) = (4, 3)$. De donde los posibles valores para $b + c$ son: $b + c = 7$ y $b + c = 8$. Combinando esto con la primera igualdad de (11) se sigue que los posibles valores de a son $a = 7$ y $a = 8$. Por lo tanto, el dígito que borró Alejandra fue un 7 o un 8.

Problema 2. Es el mismo problema que el problema 4 de Nivel I. Ve la solución aquí.

Problema 3. Es el mismo problema que el problema 5 de Nivel I. Ve la solución aquí.

Problema 4. Es el mismo problema que el problema 5 de Nivel II. Ve la solución aquí.

Problema 5. Sea $AB = 6l$ y $AD = h$, por las condiciones del problema $AF = FG = GB = 2l$, $DE = EC = 3l$ y $(ABCD) = 6hl = 70$, por lo que

$$hl = \frac{35}{3} \tag{12}$$

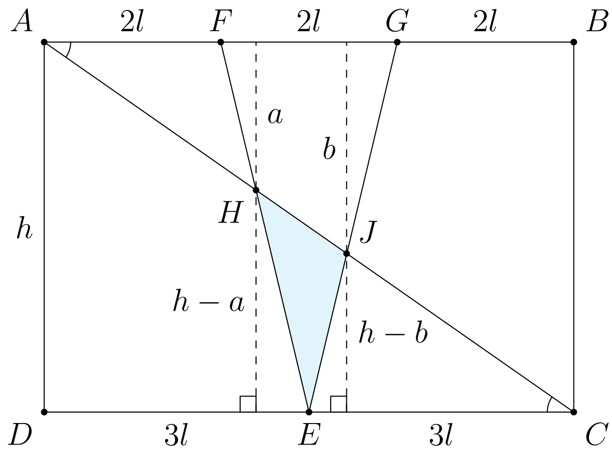
Observa que EFG es un triángulo con base $2l$ y altura h, entonces

$$(EFG) = \frac{1}{2}(2l)h = hl = \frac{35}{3}$$

Si encontramos el área de los triángulos AFH y AGJ podemos resolver fácilmente el problema ya que:

$$\begin{aligned} (EHJ) &= (EFG) - (FGJH) \\ &= \frac{35}{3} - [(AGJ) - (AFH)] \\ &= \frac{35}{3} + (AFH) - (AGJ) \end{aligned} \tag{13}$$

Tracemos una recta perpendicular a AB que pase por H y denotemos por a la distancia desde H hasta AB, luego se tiene que la distancia de H a CD es $h - a$. Observa que $\measuredangle FAH = \measuredangle ECJ$ ya que son ángulos alternos internos entre paralelas y $\measuredangle AHF = \measuredangle CHE$ por ser opuestos por el vértice. Luego $\triangle AFH \sim \triangle CEH$ por criterio AA.



Como en triángulos semejantes las alturas están a la misma razón que sus lados correspondiente (nota que a es la longitud de la altura del $\triangle AFH$ por H y $h-a$ es la longitud de la altura del $\triangle CEJ$ por H), entonces:

$$\frac{a}{h-a}=\frac{2l}{3l} \Rightarrow 3la=2l(h-a) \Rightarrow 5la=2hl=2\cdot\frac{35}{3} \Rightarrow la=\frac{14}{3}\text{ , por (12)}$$

y

$$(AFH)=\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot a=la=\frac{14}{3} \tag{14}$$

Ahora tracemos una recta perpendicular a AB que pase por J y denotemos por b la distancia desde J hasta AB y por $h-b$ la distancia de J a CD. Observa que $\measuredangle AJG=\measuredangle CJE$ por ser opuestos por el vértice. Luego $\triangle AGJ\sim\triangle CEJ$ por criterio AA y:

$$\frac{b}{h-b}=\frac{4l}{3l} \Rightarrow 3lb=4l(h-b) \Rightarrow 7lb=4hl=4\cdot\frac{35}{3} \Rightarrow lb=\frac{20}{3}\text{ , por (12)}$$

y

$$(AGJ)=\frac{1}{2}\cdot 4l\cdot b=2lb=\frac{40}{3} \tag{15}$$

Sustituyendo (14) y (15) en (13) concluimos que:

$$(EHJ)=\frac{35}{3}+\frac{14}{3}-\frac{40}{3}=3$$

Por tanto el área del triángulo EHJ es de 3 unidades cuadradas.

Problema 6. Sea $h(x)=g(b-f(x))-f(1-g(x))$. Comencemos calculando los valores de $g(b-f(x))$ y $f(1-g(x))$.

$$\begin{aligned} g(b-f(x)) &= g(b-(x^2+ax+b)) \\ &= g(-(x^2+ax)) \\ &= (x^2+ax)^2-(x^2+ax)+1 \\ &= x^4+2ax^3+(a^2-1)x^2-ax+1 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} f(1-g(x)) &= f(1-(x^2+x+1)) \\ &= f(-(x^2+x)) \\ &= (x^2+x)^2 - a(x^2+x) + b \\ &= x^4+2x^3+(1-a)x^2-ax+b \end{aligned} \tag{17}$$

Por (16) y (17) tenemos que:

$$\begin{aligned} h(x) &= g(b-f(x)) - f(1-g(x)) \\ &= (x^4+2ax^3+(a^2-1)x^2-ax+1)-(x^4+2x^3+(1-a)x^2-ax+b) \\ &= 2(a-1)x^3+(a^2+a-2)x^2-(b-1) \\ &= 2(a-1)x^3+(a+2)(a-1)x^2-(b-1) \\ &= 2(a-1)\left[x^3+\frac{1}{2}(a+2)x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{b-1}{a-1}\right] \text{ ya que } a\neq 1 \end{aligned} \tag{18}$$

Por hipótesis $h(x)$ tiene al menos dos raíces iguales, entonces existen dos números (reales o complejos) r, l tales que: $h(x) = 2(a-1)(x-r)^2(x-l)$. Desarrollando esta expresión tenemos:

$$\begin{aligned} h(x) &= 2(a-1)(x-r)^2(x-l) \\ &= 2(a-1)(x^2-2rx+r^2)(x-l) \\ &= 2(a-1)\left[x^3-(l+2r)x^2+(r^2+2rl)x-r^2l\right] \end{aligned} \tag{19}$$

Combinando (18) y (19) tenemos que:

$$\begin{cases} -(l+2r) = \frac{1}{2}(a+2) \\ r^2+2rl = 0 \\ r^2 l = \frac{1}{2}\cdot\frac{b-1}{a-1} \end{cases} \tag{20}$$

Observa que $r = 0$ no puede ser raiz de $h(x)$ ya que al sustituir en (18) tendríamos que $h(0) = -(b-1) = 0$ lo que implica que $b = 1$, pero por hipótesis $b \neq 1$. Luego, por la segunda ecuación de (20) tenemos:

$$r(r+2l) = 0 \;\Rightarrow\; r = -2l$$

Sustituyendo este resultado en la primera y tercera ecuación de (20) se sigue que:

$$l = \frac{1}{6}(a+2)$$

y

$$l^3 = \frac{1}{8}\cdot\frac{b-1}{a-1}$$

Por lo tanto $\frac{1}{6}(a+2) = l = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b-1}{a-1}} \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{\frac{b-1}{a-1}} = \frac{1}{3}(a+2)$. De donde es evidente que a es un número racional si y solo si $\sqrt[3]{\frac{b-1}{a-1}}$ es un número racional.

Capítulo 6

Soluciones de la XVII OHM

6.1. Nivel I

Problema 1. Como 5 máquinas envasan 7200 cajas en 6 horas, asumiendo que las máquinas tienen las mismas características, podemos deducir que cada máquina envasa $7200/5 = 1440$ cajas en 6 horas. Asumiendo también que las máquinas funcionan de forma continua durante las 6 horas, podemos deducir que cada máquina envasa $1440/6 = 240$ cajas en 1 hora. Luego, cada máquina envasa $240 \times 8 = 1920$ cajas en 8 horas y por tanto se necesitan $15360/1920 = 8$ máquinas para envasar 15360 cajas en 8 horas.

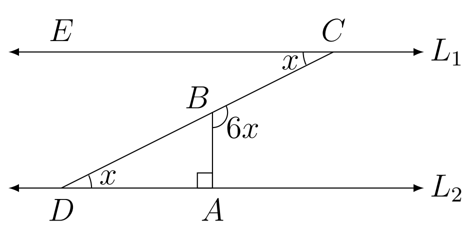
Problema 2. Sean $\frac{a}{d}$ y $\frac{b}{d}$ las dos fracciones. El problema plantea encontrar el valor de $\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d}$ si:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{d} + \dfrac{b}{d} = 6 \\ a + b = 18 \\ abd^2 = 720 \end{cases} \tag{21}$$

De la primera igualdad de (21) tenemos que $a + b = 6d$ y como $a + b = 18$ se tiene que $d = 18/6 = 3$. Sustituyendo en la tercera igualdad: $ab \cdot 3^2 = 720 \;\Rightarrow\; ab = 70/9 = 80$.
Por lo tanto $\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{d^2} = \frac{80}{9}$.

Nota que no nos pedían encontrar las fracciones, sino su producto. Pero si quieres encontrarlas solo debes buscar dos números enteros que sumen 18 y cuyo producto sea 80.

Problema 3. Sea E un punto en L_1 a la izquierda de C y D la intersección de BC con L_2. Como $L_1 \parallel L_2$ se tiene que $\measuredangle ADB = \measuredangle BCE$ por ser alternos internos entre paralelas.



Como la suma de ángulos internos de un triángulo es $180°$, del triángulo ABD se tiene que:

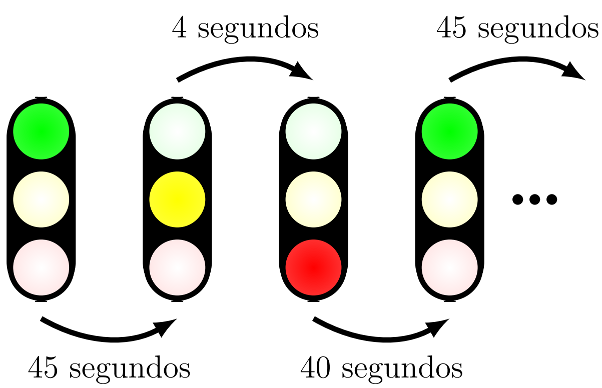
$$\begin{aligned} \measuredangle ABD + \measuredangle ADB + \measuredangle BAD &= 180° \\ \measuredangle ABD + x + 90° &= 180° \\ \measuredangle ABD &= 90° - x \end{aligned}$$

Observa también que los ángulos $\measuredangle ABD$ y $\measuredangle ABC$ son suplementarios, luego:

$$\begin{aligned} \measuredangle ABD + \measuredangle ABC &= 180° \\ 90° - x + 6x &= 180° \\ 5x &= 90° \\ x &= 18° \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 18°$.

Problema 4. Nota que el semáforo va cambiando cíclicamente por los colores (verde - amarillo - rojo) y que cada ciclo del semáforo dura $45 + 4 + 40 = 89$ segundos.



A las 7:00 a.m. cambió a verde (iniciando un ciclo). A las 2:34 p.m. habrán transcurrido 7 horas y 34 minutos, es decir, $7 \cdot 3600 + 34 \cdot 60 = 27240$ segundos. Observa que al hacer la división $\frac{27240}{89}$ obtenemos un cociente de 306 y un residuo de 6. Significa que desde las 7:00 a.m. hasta las 2:34 p.m. ocurrirán 306 ciclos completos del semáforo y sobrarán 6 segundos desde que el semáforo cambie de rojo a verde. Por lo tanto, a las $2:34$ p.m. el semáforo estará en verde.

Problema 5. Observa que en las filas que comienzan con $1, 7, 13, 19, \ldots$ los números siguientes se escriben hacia la derecha. Este patrón ocurre cada 6 números consecutivos y podemos caracterizar estos números con la fórmula $6k + 1$, donde k es un entero no negativo.

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10
13	14	15
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

El número más cercano y menor que 2019 que tiene esta forma es $2017 = 6 \cdot 336 + 1$, luego sabemos que 2018 y 2019 estarán a la derecha. Solamente completamos la tabla en la fila anterior y encontramos que el número que está inmediatamente arriba de 2019 es el 2014.

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2016	2015	2014
2017	2018	2019
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Problema 6. Si desarrollamos el binomio dado, tenemos:

$$\begin{aligned}\left(10^{2019} + 2019\right)^2 &= \left(10^{2019}\right)^2 + 2 \cdot 2019 \cdot 10^{2019} + (2019)^2 \\ &= 10^{4038} + 4038 \cdot 10^{2019} + 4076361\end{aligned}$$

Observa que 10^{4038} es un 1 seguido de 4038 ceros, similarmente, $4038 \cdot 10^{2019}$ es el número 4038 seguido de 2019 ceros. Para visualizar más fácilmente este número sumaremos de forma vertical los términos.

$$\begin{array}{rlccccl} 10^{4038} = & 10 & \cdots & 00000 & \cdots & 0000000 & + \\ 4038 \cdot 10^{2019} = & & & 40380 & \cdots & 0000000 & + \\ 4076361 = & & & & & 4076361 & \\ \hline (10^{2019} + 2019)^2 = & 10 & \cdots & 040380 & \cdots & 04076361 & \end{array}$$

De donde es claro que la suma de los dígitos del número $(10^{2019} + 2019)^2$ es:

$$1 + 4 + 3 + 8 + 4 + 7 + 6 + 3 + 6 + 1 = 43$$

6.2. Nivel II

Problema 1. Sea $\overline{abc}$ el número de tres cífras que satisface:

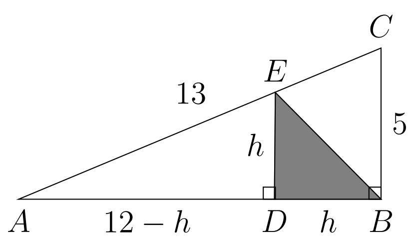
$$\begin{cases} a+b+c=18 \\ c=2b \\ \left|\overline{abc}-\overline{cba}\right|=297 \end{cases} \tag{22}$$

La tercera condición de (22) la escribimos entre valor absoluto, ya que no sabemos qué número es mayor entre $\overline{abc}$ y $\overline{cba}$. Como b y c son dígitos, por la segunda condición de (22) se tiene que $0 \leq b < 5$. En la siguiente tabla organizamos todos los posibles casos:

b	$c=2b$	$a=18-b-c$	$\overline{abc}$	$\overline{cba}$	$\left\|\overline{abc}-\overline{cba}\right\|$
0	0	18	Este caso no es posible. a no es un dígito		
1	2	15	Este caso no es posible. a no es un dígito		
2	4	12	Este caso no es posible. a no es un dígito		
3	6	9	936	639	297
4	8	6	648	846	198

Por tanto, el único número de tres dígitos que satisface las condiciones del problema es 936.

Problema 2. Sea ABC el triángulo rectángulo de hipotenusa 13 cm y cateto menor 5 cm y sea BDE el triángulo rectángulo isósceles inscrito, como se muestra en la siguiente figura.



Por el teorema de Pitágoras $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm. Sea $BD = h$ cm, entonces $AD = AB - BD = 12 - h$ cm. Y como el triángulo BDE es isósceles, $DE = h$ cm.
Observa que los triángulos ABC y ADE son semejantes por el criterio AA. Luego,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} \Rightarrow \frac{12}{5} = \frac{12-h}{h} \Rightarrow 12h = 5(12-h) \Rightarrow h = \frac{60}{17}$$

Por lo tanto, el área del triángulo BDE es

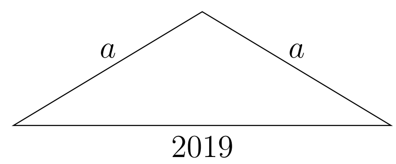
$$(\triangle BDE) = \frac{1}{2}BD \cdot DE = \frac{1}{2}h^2 \text{ cm}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{60}{17}\right) \text{ cm}^2 = \frac{1800}{289}\text{cm}^2$$

Problema 3. Queremos encontrar todos los triángulos isósceles cuyos lados midan a, a y 2019, siendo a un entero menor que o igual a 2019. Para que exista un triángulo con esas características es necesario y suficiente que se satisfaga la desigualdad triangular, es decir, que:

$$2019 < 2a$$

Entonces, por lo anterior tenemos que encontrar todos los enteros positivos a tales

$$a \leq 2019 < 2a$$



Por el extremo derecho de la desigualdad anterior tenemos que $2019 < 2a \Rightarrow \dfrac{2019}{2} < a \Rightarrow 1010 \leq a$. Por lo tanto, $1010 \leq a \leq 2019$ y existen 1010 triángulos isósceles con las características pedidas en el problema.

Problema 4. Observa que $\dfrac{14n+25}{2n+1} = \dfrac{7(2n+1)+18}{2n+1} = 7 + \dfrac{18}{2n+1}$. Entonces para que $\dfrac{14n+25}{2n+1}$ sea entero, $2n+1$ debe ser un divisor de 18. Como $2n+1$ es un entero impar, se tiene que $2n+1$ debe ser $\pm 1, \pm 3$ o ± 9. De donde:

$$\begin{array}{lclcl}
2n+1=-9 & \Rightarrow & n=-5 & \Rightarrow & \dfrac{14n+25}{2n+1}=5 \\
2n+1=-3 & \Rightarrow & n=-2 & \Rightarrow & \dfrac{14n+25}{2n+1}=1 \\
2n+1=-1 & \Rightarrow & n=-1 & \Rightarrow & \dfrac{14n+25}{2n+1}=-11 \\
2n+1=1 & \Rightarrow & n=0 & \Rightarrow & \dfrac{14n+25}{2n+1}=25 \\
2n+1=3 & \Rightarrow & n=1 & \Rightarrow & \dfrac{14n+25}{2n+1}=13 \\
2n+1=9 & \Rightarrow & n=4 & \Rightarrow & \dfrac{14n+25}{2n+1}=9
\end{array}$$

Por lo tanto, $\dfrac{14n+25}{2n+1}$ será un cuadrado perfecto cuando n sea $-2, 0$ o 4.

Problema 5. Observa que si tenemos formadas 5 parejas en las que cada persona aparezca exactamente dos veces, por ejemplo: (Alba,Bety), (Alba,Cory), (Bety,Dana), (Cory,Elsa) y (Dana,Elsa). Si queremos hacer la asignación de cada pareja a un día de Lunes a Viernes, esto lo podemos hacer de $5! = 120$ formas diferentes, ya que la primera pareja la podemos asignar a cualquiera de los 5 días, la segunda pareja a cualquiera de los 4 días restantes y así sucesivamente. Y más aún, cada asignación diferente de las 5 parejas representa un plan de trabajo diferente, por lo tanto, el problema se reduce a encontrar la cantidad de formas diferentes de crear las 5 parejas. Lo que encontraremos a continuación:

<u>Paso 1.</u> ¿De cuántas formas puedo encontrar las parejas de Alba?
Para la primera pareja de Alba puedo elegir entre 4 personas (Bety, Cory, Dana y Elsa). Para la segunda pareja solamente puedo elegir entre 3 personas (ya que después de elegir la primera pareja no la puedo volver a elegir, por la condición b) del problema).
En total hay $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ formas posibles de elegir las parejas de Alba (dividimos por 2 ya que no importa

el orden en que elija las parejas).

Paso 2. ¿De cuántas formas podemos formar las 3 parejas restantes?
Sean X, Y, Z, W variables que representan a Bety, Cory, Dana y Elsa (no necesariamente en ese orden). Y suponga que las parejas de Alba son X y Y. Observe lo siguiente:

- X no puede ser pareja de Y.
  En caso contrario tendríamos las parejas (Alba,X), (Alba,Y), (X,Y) y las tres personas ya trabajarían 2 días a la semana cada una. Luego los dos días restantes tendrían que trabajar la pareja (Z,W), pero esto contradice la condición b) del problema.

- Z no puede formar pareja con X y Y
  Si Z formara pareja con X y Y tendríamos las parejas (Alba,X), (Alba,Y), (Z,X), (Z,Y). Luego cada persona (Alba, X, Y, Z) ya trabajaría 2 días a la semana y W no podría formar pareja con nadie sin contradecir la condición a) del problema.

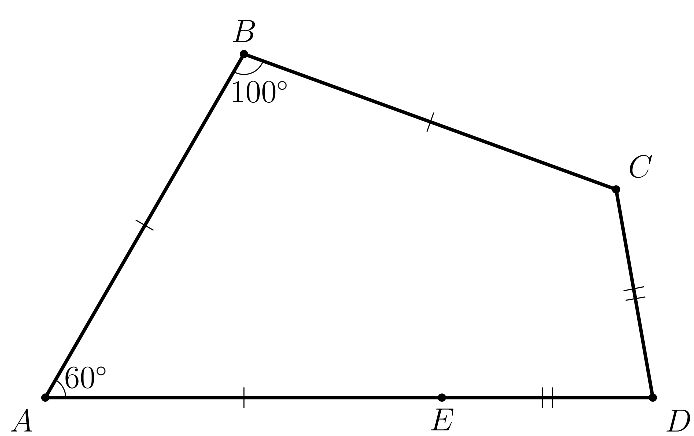
- W no puede formar pareja con X y Y
  Es exactamente el mismo caso anterior.

Por lo anterior, tenemos que Z y W deben formar una pareja y cada uno de ellos, formar otra pareja con X y Y. Así, las tres parejas restantes solamente pueden ser: $(X, Z), (Y, W), (Z, W)$ y $(X, W), (Y, Z), (Z, W)$, es decir, solo hay 2 formas de escoger las tres parejas restantes (después de haber escogido las parejas de Alba).

Por los Pasos 1. y 2. concluimos que hay $6 \cdot 2 = 12$ formas de escoger las 5 parejas que trabajarán durante la semana. Ahora, cada configuración de las 5 parejas las podemos ordenar de $5! = 120$ formas diferentes y así asignarles el día de la semana que trabajará cada pareja. Por lo tanto, el plan de trabajo se puede hacer de $12 \cdot 120 = 1440$ formas diferentes.

Problema 6. Sea E el punto entre A y D tal que $AE = AB$. Por hipótesis $AB = BC$ y $AD = BC + CD$, luego, $AE = BC$ y

$$ED = AD - AE = (BC + CD) - BC = CD \tag{23}$$

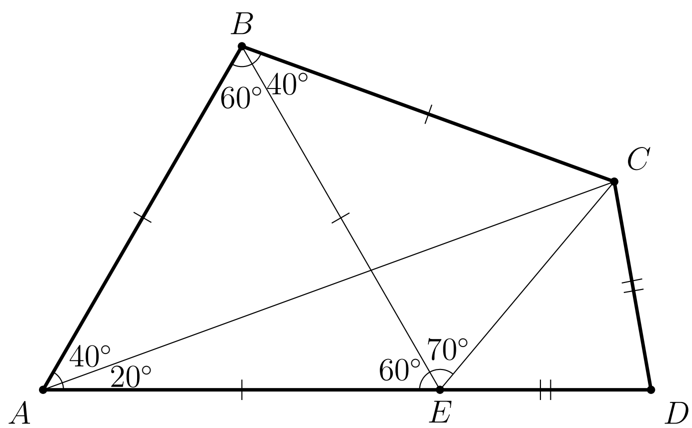


Trace los segmentos AC, BE y CE. Como el triángulo ABE es isósceles,

$$\measuredangle ABE = \measuredangle AEB = \frac{180^\circ - \measuredangle BAE}{2} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

Por lo tanto, el triángulo ABE es equilátero. Luego,

$$\measuredangle CBE = \measuredangle ABC - \measuredangle ABE = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ \tag{24}$$



Como $\triangle ABC$ es isósceles, $\measuredangle BAC = \dfrac{180^\circ - \measuredangle ABC}{2} = \dfrac{180^\circ - 100^\circ}{2} = \dfrac{80^\circ}{2} = 40^\circ$ y entonces

$$\measuredangle CAD = \measuredangle BAE - \measuredangle BAC = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$$

Dado que $\triangle ABE$ es equilátero, también se tiene que $BE = AB = BC$, es decir, $\triangle BCE$ es isósceles y por (24) se tiene:

$$\measuredangle BEC = \frac{180^\circ - \measuredangle CBE}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

Observa que $\measuredangle AEB + \measuredangle BEC + \measuredangle CED = 180^\circ$ de donde,

$$\measuredangle CED = 180^\circ - \measuredangle AEB - \measuredangle BEC = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$$

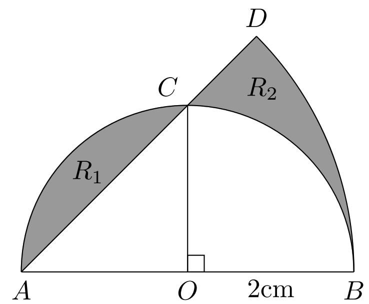
Por (23) tenemos que $\triangle CDE$ es isósceles, luego $\measuredangle ECD = \measuredangle CED = 50^\circ$ y por suma de ángulos internos en el triángulo ACE, tenemos que $\measuredangle ACE = 30^\circ$.
Por lo tanto, $\measuredangle ACD = \measuredangle ACE + \measuredangle ECD = 30^\circ + 50^\circ = 80^\circ$.

6.3. Nivel III

Problema 1. Para resolver este ejercicio asumiremos que la figura representa un semicírculo con centro en O y radio 2cm y un sector circular con centro en A y radio AB.
Observe que OA, OC y OB son radios del semicírculo, por lo tanto

$$AO = OC = OB = 2\text{cm}$$

Como $OA = OC$, el triángulo AOC es rectángulo isósceles y por tanto, $\measuredangle CAO = \measuredangle DAB = 45°$.



Sean R_1 y R_2 las regiones mostradas en la figura anterior y denotemos por $|R_k|$ el valor del área de la región R_k, entonces:

- R_1 es el área del cuarto de círculo AOC menos el área del triángulo rectángulo AOC.

$$\begin{aligned} |R_1| &= \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(2\text{cm})^2 - \frac{1}{2}(2\text{cm})(2\text{cm}) \\ &= \pi\text{cm}^2 - 2\text{cm}^2 \\ &= (\pi-2)\text{cm}^2 \end{aligned}$$

- R_2 es el área del sector circular ABD menos el área del cuarto de círculo BOC menos al área del triángulo rectángulo AOC.

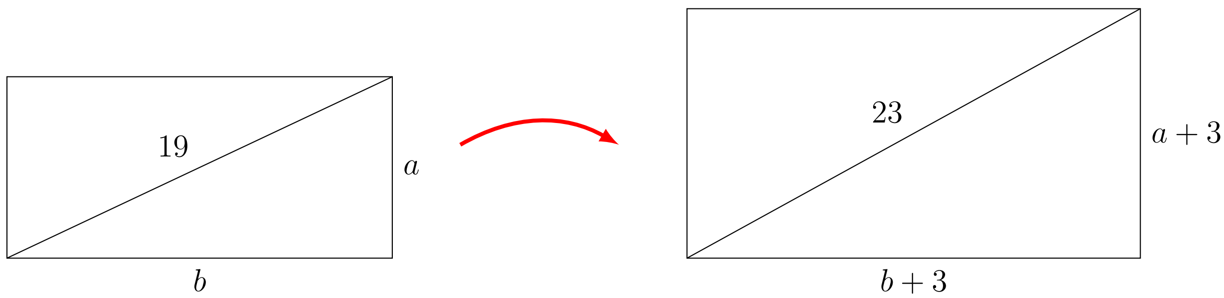
$$\begin{aligned} |R_2| &= \frac{45}{360}\cdot\pi\cdot(4\text{cm})^2 - \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(2\text{cm})^2 - \frac{1}{2}(2\text{cm})(2\text{cm}) \\ &= 2\pi\text{cm}^2 - \pi\text{cm}^2 - 2\text{cm}^2 \\ &= (\pi-2)\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $R_1 + R_2 = 2(\pi-2)\text{cm}^2$.

Problema 2. El problema nos plantea encontrar el mayor número de tres dígitos $\overline{abc}$, tal que $100 < (abc)^2 < 1000$. Como el producto abc es entero, entonces $10 < abc \leq 31$. Y como queremos encontrar el mayor número tomemos $a = 9$, luego $bc \leq 3$ y el mayor número que cumple esta condición se obtiene cuando $b = 3$ y $c = 1$, es decir, el número 931.

Problema 3. Sean a y b la altura y la base del primer rectángulo que dibujó Merary, entonces $a+3$ y $b+3$ son la altura y la base del segundo rectángulo. Como las diagonales de estos rectángulos miden 19cm y 23cm respectivamente, aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 19^2 \\ (a+3)^2 + (b+3)^2 = 23^2 \end{cases} \tag{25}$$



Desarrollando la segunda ecuación de (25) tenemos:

$$\begin{aligned}
(a+3)^2+(b+3)^2 &= 23^2 \\
(a^2+6a+9)+(b^2+6b+9) &= 529 \\
(a^2+b^2)+6(a+b)+18 &= 529 && \text{Sustituyendo la primera igualdad de (25)} \\
19^2+6(a+b)+18 &= 529 \\
6(a+b) &= 529-361-18 \\
6(a+b) &= 150 \\
a+b &= 25
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el perímetro del rectángulo inicial es de $2(a+b) = 50$cm.

Problema 4. Como $\overline{13d6}$ es el menor entero positivo tal que $k = 1^2 + 3^2 + d^2 + 6^2 = 46 + d^2$, se debe tener que $3 \leq d \leq 6$, ya que en caso contrario, se podrían reordenar los dígitos de $\overline{13d6}$ para formar un número menor y la suma de sus cuadrados seguiría siendo k, lo que no es posible ya que $a_k = \overline{13d6}$. Entonces solo tenemos que verificar 4 casos.

- Si $d = 3$, entonces: $k = 46 + 3^2 = 55$. Pero $55 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 7^2$, luego
$$a_{55} \leq 1127 \;\Rightarrow\; a_{55} \neq 1336$$
- Si $d = 4$, entonces: $k = 46 + 4^2 = 62$. Pero $62 = 2^2 + 3^2 + 7^2$, luego
$$a_{62} \leq 237 \;\Rightarrow\; a_{62} \neq 1346$$
- Si $d = 5$, entonces: $k = 46 + 5^2 = 71$. Después de una revisión te puedes dar cuenta que en efecto, $a_{71} = 1356$.
- Si $d = 6$, entonces: $k = 46 + 6^2 = 82$. Pero $82 = 1^2 + 9^2$, luego
$$a_{82} = 19 \;\Rightarrow\; a_{82} \neq 1366$$

Por lo tanto, el valor de k es 71.

Problema 5. Observe que $f(\sqrt{2}) = 0$ implica que:

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^3 + a(\sqrt{2})^2 + b\sqrt{2} + c \\
&= 2\sqrt{2} + 2a + \sqrt{2}b + c \\
&= \sqrt{2}(2+b) + (2a+c) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{cases} 2+b=0 \\ 2a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=-2a \end{cases}$$

Ya que en caso contrario, $\sqrt{2} = -\dfrac{2a+c}{2+b}$ sería un número racional. Entonces $f(x)$ lo podemos reescribir como:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+ax^2+bx+c \\ &= x^3+ax^2-2x-2a \\ &= x(x^2-2)+a(x^2-2) \\ &= (x+a)(x^2-2) \end{aligned}$$

La condición $f(t)=2019$ para algún entero t, implica que

$$(t+a)(t^2-2) = 2019 = 3 \cdot 673$$

Y como $t+a$ y t^2-2 son enteros, el problema se reduce a analizar 8 casos:

- $t+a=1$ y $t^2-2=2019$
  Este caso no es posible, ya que $t^2=2021 \Rightarrow t=\sqrt{2021}$ no es un entero.
- $t+a=-1$ y $t^2-2=-2019$
  Este caso no es posible, ya que $t^2=-2017$, lo que es absurdo.
- $t+a=3$ y $t^2-2=673$
  Este caso no es posible ya que $t^2=675 \Rightarrow t=\sqrt{675}$ no es un entero.
- $t+a=3$ y $t^2-2=-673$
  Este caso no es posible, ya que $t^2=-671$, lo que es absurdo.
- $t+a=673$ y $t^2-2=3$
  Este caso no es posible ya que $t^2=5 \Rightarrow t=\sqrt{5}$ no es un entero.
- $t+a=-673$ y $t^2-2=-3$
  Este caso no es posible, ya que $t^2=-1$, lo que es absurdo.
- $t+a=2019$ y $t^2-2=1$
  Este caso no es posible ya que $t^2=3 \Rightarrow t=\sqrt{3}$ no es un entero.
- $t+a=-2019$ y $t^2-2=-1$
  En este caso tenemos que $t^2=1$, luego hay dos opciones:
  $t=1$, de donde $a=-2020$.
  $t=-1$, de donde $a=-2018$.

Por lo tanto, solo hay dos polinomios que satisfacen las condiciones del problema:

$$f(x) = (x-2020)(x^2-2) = x^3-2020x^2-2x+4040$$

y

$$f(x) = (x - 2018)(x^2 - 2) = x^3 - 2018x^2 - 2x + 4036$$

Problema 6. Debido a las condiciones del problema, si el número n aparece en la lista de Mario, hay exactamente n números distintos de n en la lista, es decir, n debe aparecer escrito $250 - n$ veces en la lista. Por otro lado, en la lista no puede estar escrito ningún número mayor a 249, ya que si $k \geq 250$ es imposible que la lista contenga contenga al número k y a k números diferentes de él, ya que debería tener al menos $k + 1 > 250$ números y la lista de Mario solo tiene 250 números.

Supongamos que la lista de Mario tiene t números diferentes, digamos $n_1, n_2, \ldots, n_t$. Entonces cada número n_i debe aparecer $250 - n_i$ veces y la lista debe tener $(250 - n_1) + (250 - n_2) + \cdots + (250 - n_t)$ números. Como la lista se sabe que tiene 250 números, se sigue que:

$$\begin{aligned} (250 - n_1) + (250 - n_2) + \cdots + (250 - n_t) &= 250 \\ 250 \cdot t - (n_1 + n_2 + \cdots + n_t) &= 250 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_t &= 250(t - 1) \qquad (26) \end{aligned}$$

Por otro lado, ya que como los n_i son diferentes y menores que 250, se tiene que:

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + \cdots + n_t &\leq 249 + 248 + \cdots + (250 - t) \\ &= (250 - 1) + (250 - 2) + \cdots + (250 - t) \\ &= 250 \cdot t - (1 + 2 + \cdots t) \\ &= 250 \cdot t - \frac{t(t+1)}{2} \qquad (27) \end{aligned}$$

Combinando (26) y (27) se tiene que:

$$250(t - 1) \leq 250 \cdot t - \frac{t(t+1)}{2}$$

de donde

$$\frac{t(t+1)}{2} \leq 250$$

y

$$t < 22$$

Por lo tanto, la lista de Mario puede tener a lo más 21 números diferentes. A continuación se presenta un ejemplo de una lista con 21 números diferentes:

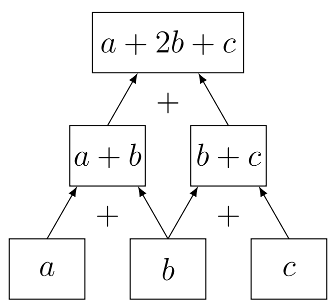
$$249, \underbrace{248, 248}_{2-veces}, \underbrace{247, \ldots, 247}_{3-veces}, \ldots, \underbrace{231, \ldots, 231}_{19-veces}, \underbrace{230, \ldots, 230}_{20-veces}, \underbrace{210, \ldots, 210}_{40-veces}$$

Capítulo 7

Soluciones de la XVIII OHM

7.1. Nivel Básico

Problema 1. Sean a, b, c los números escritos en la última fila (en ese orden). Entonces los números de la segunda fila serán $a + b$ y $b + c$ y el número escrito en la casilla de la primera fila será $(a + b) + (b + c) = a + 2b + c$.



Observa que el número b es el que más "aporta" a la expresión $a + 2b + c$, luego $a + 2b + c$ será máximo cuando b sea máximo y $a + 2b + c$ será mínimo cuando b sea mínimo.

Luego el mayor valor que se puede obtener en la casilla superior es 33, que ocurre cuando $a = 8$, $b = 9$ y $c = 7$. Y el menor valor que se puede obtener en la casilla superior es 7, que ocurre cuando $a = 2$, $b = 1$ y $c = 3$.

Problema 2. Como $BD = DE$ el triángulo BDE es isósceles y

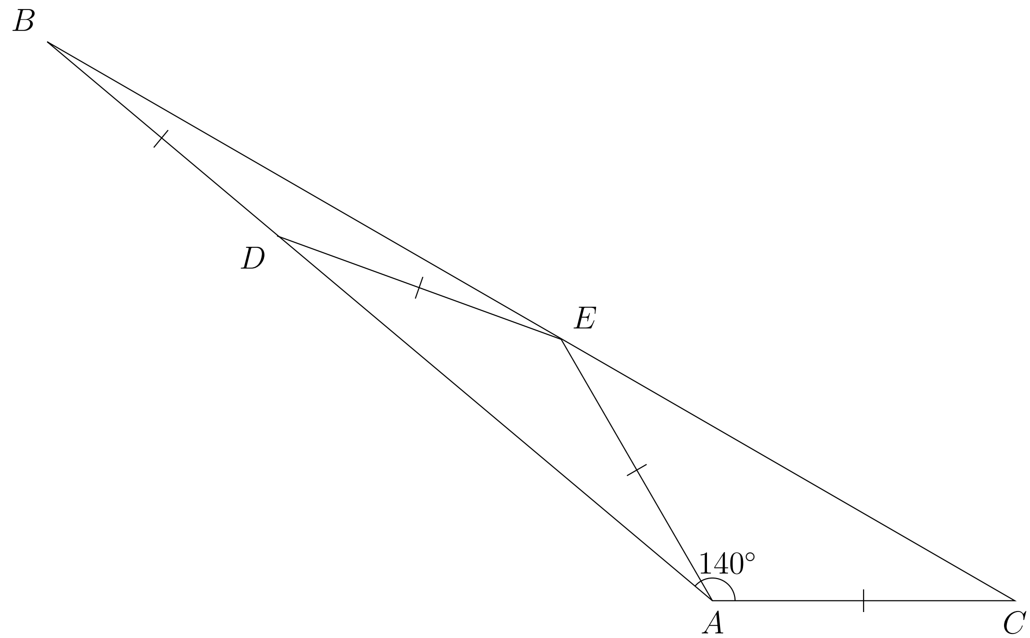
$$\measuredangle DBE = \measuredangle DEB = \alpha \tag{28}$$

Observa que $\measuredangle EDA$ es un ángulo exterior al triángulo BDE, luego $\measuredangle EDA = \measuredangle DBE + \measuredangle DEB = 2\alpha$. Y como $DE = EA$ se sigue que el triángulo EDA es isósceles y

$$\measuredangle EDA = \measuredangle EAD = 2\alpha \tag{29}$$

Por otro lado, como $EA = AC$ se tiene que el triángulo ACE es isósceles y

$$\measuredangle ACE = \measuredangle AEC = \beta \tag{30}$$



Por suma de ángulos internos en el triángulo ABC y por (28) y (30) se tiene que:

$$\begin{aligned} \measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC &= 180^\circ \\ \measuredangle DBE + \measuredangle ACE + 140^\circ &= 180^\circ \\ \alpha + \beta &= 40^\circ \qquad (31) \end{aligned}$$

Por (29) y (30) tenemos que:

$$\begin{aligned} \measuredangle BAC &= \measuredangle BAE + \measuredangle EAC \\ 140^\circ &= \measuredangle EAD + (180^\circ - \measuredangle AEC - \measuredangle ACE) \\ 140^\circ &= 2\alpha + (180^\circ - 2\beta) \\ \beta - \alpha &= 20^\circ \qquad (32) \end{aligned}$$

Combinando (31) y (32) tenemos que $\alpha = 10^\circ$ y $\beta = 30^\circ$. Por lo tanto,

$$\measuredangle ABC = \measuredangle DBE = \alpha = 10^\circ$$

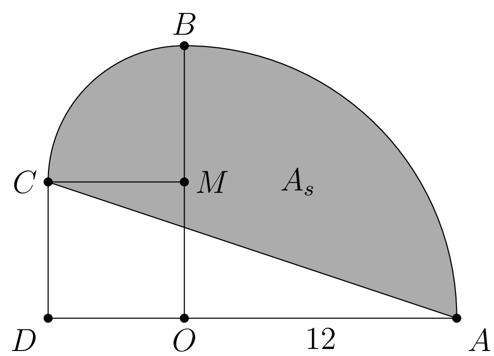
Problema 3. Como los números tienen que ser de 7 dígitos distintos y solo pueden aparecer los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7, entonces los números de la lista de Devis y María consisten en todas las permutaciones de los números $1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7, siendo 1234567 y 7654321 el primer y último número de la lista respectivamente. Observa que en total hay $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ números en la lista de Devis y María.

La cantidad de números que comienzan con 1, es decir, los números de la forma $\overline{1abcdef}$ corresponde a todas las formas de permutar los dígitos $2, 3, 4, 5, 6$ y 7, que en total son $6! = 720$. Observa que la cantidad de números que comienzan con 2 es exactamente la misma, todas las formas de permutar los dígitos $1, 3, 4, 5, 6$ y 7, que son 720, así que en total hay $2 \cdot 720 = 1440$ números de 7 dígitos en la lista que comienzan con 1 o 2. Ahora, la cantidad de números de la lista que comienzan con $1, 2$ o 3 sería $3 \cdot 720 = 2160$, que se pasa de 2020, por lo que el número que se encuentra en la posición 2020 comienza con 3.

De la misma forma, la cantidad de números de la lista que comienzan con 31, es decir, los números de la forma $\overline{31abcde}$ es $5! = 120$ (todas las permutaciones de los dígitos $2, 4, 5, 6$ y 7). Y hay $4 \cdot 120 = 480$ números que comienzan con $31, 32, 34$ o 35. Entonces el número 3612457 ocupa la posición $1440 + 480 + 1 = 1921$. Siguiendo con este rezonamiento, hay $4! = 24$ números de la forma $\overline{361abcd}$ y $4 \cdot 24 = 96$ números que comienzan con $361, 362, 364$ y 365.

Por todo lo anterior, el número 3671245 ocupa la posición $1440 + 480 + 96 + 1 = 2017$. Y a partir de aquí procedemos de forma secuencial: 3671254 ocupa la posición 2018, 3671425 ocupa la posición 2019 y finalmente, 3671452 ocupa la posición 2020 de la lista de Devis y María.

Problema 4. Como OA y OB son radios de la misma circunferencia, $OA = OB = 12$ y por ser M punto medio de OB, $OM = MB = 6$. Observa también que MB y MC son radios de la misma circunferencia, luego $MB = MC = 6$. Sea D el punto en la prolongación de OA tal que $DOMC$ sea un cuadrado.



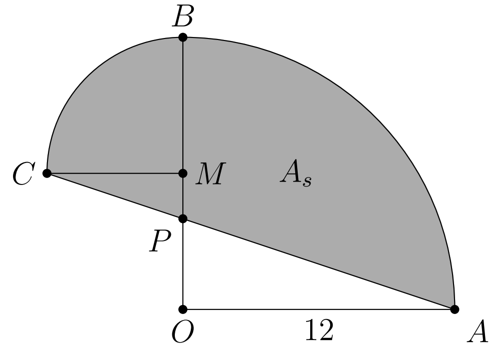
Observa que el área de la región sombreada A_s es la suma de las áreas de los dos cuartos de círculo, más el área del cuadrado $DOMC$, menos el área del triángulo ACD y por lo tanto, la podemos calcular como:

$$\begin{aligned} A_s &= (MBC) + (OAB) + (DOMC) - (DAC) \\ &= \frac{1}{4}\pi(6)^2 + \frac{1}{4}\pi(12)^2 + (6)^2 - \frac{1}{2}(18)(6) \\ &= 9\pi + 36\pi + 36 - 54 \\ &= 45\pi - 18 \end{aligned}$$

<u>*Solución alternativa:*</u> Sea P el punto de intersección de AC con OM y sea $PM = x$. Como $OM = 6$, entonces $PO = 6 - x$ y como $\measuredangle CMP = \measuredangle AOP = 90°$ y $\measuredangle CPM = \measuredangle APO$ por ser opuestos por el vértice, entonces los triángulos $\triangle CMP \sim \triangle AOP$ por criterio AA. De donde,

$$\frac{PM}{MC} = \frac{PO}{OA} \;\Rightarrow\; \frac{x}{6} = \frac{6-x}{12} \;\Rightarrow\; 12x = 36 - 6x \;\Rightarrow\; x = 2$$

Por lo tanto, $PM = 2$ y $OM = 4$.



Observa que el área de la región A_s la podemos calcular como la suma de las áreas de los dos cuartos de círculo más el área del triángulo CMP menos el área del triángulo AOP, entonces:

$$\begin{aligned} A_s &= (MBC) + (OAB) + (CMP) - (AOP) \\ &= \frac{1}{4}\pi(6)^2 + \frac{1}{4}\pi(12)^2 + \frac{1}{2}(6)(2) - \frac{1}{2}(12)(4) \\ &= 9\pi + 36\pi + 6 - 24 \\ &= 45\pi - 18 \end{aligned}$$

Problema 5. El problema se traduce a encontrar cuantos números de cuatro dígitos $\overline{abcd}$ satisfacen que $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$. Expresando esta igualdad en notación decimal tenemos:

$$\begin{aligned} \overline{ab} + \overline{cd} &= \overline{bc} \\ (10a + b) + (10c + d) &= 10b + c \\ 10a + d &= 9(b - c) \\ \overline{ad} &= 9(b - c) \end{aligned} \tag{33}$$

Entonces, el número $\overline{ad}$ debe ser un múltiplo de 9 de 2 dígitos, ya que $a \neq 0$ (dado que $\overline{abcd}$ es un número de 4 dígitos). De (33) se tiene que $b - c \geq 2$ y para cada elección de b y c, es claro que a y d quedan determinados de forma única. Luego, el problema se reduce a encontrar cuantos dígitos b y c satisfacen que $b - c \geq 2$, lo que desarrollamos en la siguiente tabla:

c	opciones para b	Número de casos
0	$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	8
1	$3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	7
2	$4, 5, 6, 7, 8, 9$	6
3	$5, 6, 7, 8, 9$	5
4	$6, 7, 8, 9$	4
5	$7, 8, 9$	3
6	$8, 9$	2
7	9	1

Por lo tanto, Berta pudo haber pensado $8 + 7 + \cdots + 2 + 1 = 36$ números diferentes.

7.2. Nivel Medio

Problema 1. Para resolver este problema utilizaremos el par ordenado (i, j) para referirnos a la celda de la tabla que se encuentra en la fila i y columna j. Observa que en la primera fila de la tabla siempre van a aparecer números triangulares, es decir, números de la forma: $\frac{n(n+1)}{2}$. Para ser más precisos, en la celda $(1, n)$ estará el número $\frac{n(n+1)}{2}$.

Esto se puede probar por inducción: Supongamos que en la celda $(1, n)$ se encuentra el número $\frac{n(n+1)}{2}$. Entonces, los siguientes números aparecerán escritos en la diagonal inmediatamente abajo.
En la celda $(n+1, 1)$ aparecerá el número $\frac{n(n+1)}{2} + 1$
En la celda $(n, 2)$ aparecerá el número $\frac{n(n+1)}{2} + 2$
En la celda $(n-1, 3)$ aparecerá el número $\frac{n(n+1)}{2} + 3$
En general, en la celda $(n+2-k, k)$ aparecerá el número $\frac{n(n+1)}{2} + k$ (Observa que desplazarse en la diagonal implica disminuir en 1 el valor de la fila y aumentar en 1 el valor de la columna). Por lo tanto, cuando tomamos $k = n+1$, tenemos que en la celda $(1, n+1)$ aparecerá el número

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

Que es el siguiente número triangular.

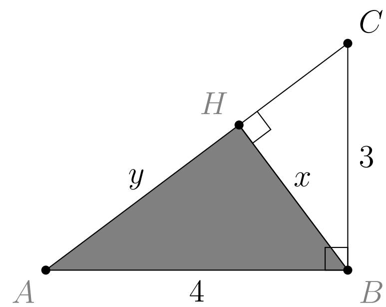
		Columnas						
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	$\cdots$	**n**
Filas	**1**	1	3	6	10	15 ...		$\frac{n(n+1)}{2}$
	2	2	5	9	14 ...			
	3	4	8	13 ...				
	4	7	12 ...					
	5	11 ...						
	$\vdots$							

Entonces, en la celda $(1, 63)$ aparecerá el número $\frac{63(63+1)}{2} = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$. A partir de aquí nos desplazamos en la diagonal inmediatamente abajo y tenemos que: 2017 aparecerá en la celda $(64, 1)$, 2018 aparecerá en la celda $(63, 2)$, 2019 aparecerá en la celda $(62, 3)$ y 2020 aparecerá en la celda $(61, 4)$.
Por lo tanto, el número 2020 estará en la fila 61 y columna 4.

Problema 2. Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo ABC tenemos que:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \;\Rightarrow\; AC = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Observa que $\triangle ABC \sim \triangle AHB$ por criterio AA y sean $BH = x$ y $AH = y$, entonces:



$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{HB} \;\Rightarrow\; \frac{5}{3} = \frac{4}{x} \;\Rightarrow\; x = \frac{12}{5}$$

y

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AH} \;\Rightarrow\; \frac{5}{4} = \frac{4}{y} \;\Rightarrow\; y = \frac{16}{5}$$

Luego, el área de la región sombreada es:

$$(\triangle ABH) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{16}{5} = \frac{96}{25}$$

Por lo tanto, $m + n = 96 + 25 = 121$.

Problema 3. Como $m|n$ significa que $m \neq 0$ y existe un entero l tal que $n = ml$. Sustituyendo en la desigualdad del problema tenemos que:

$$\begin{aligned}(5m+n)k &= 5n+m\\ (5m+ml)k &= 5ml+m\\ m(5+l)k &= m(5l+1) \quad \text{, dividiendo por } m\\ (5+l)k &= 5l+1 \end{aligned} \tag{34}$$

Note que si $l = -5$ de (34) se tiene que $(5-5)k = 5(-5)+1 \;\Rightarrow\; 0 = -24$, lo que es absurdo, por lo tanto $l \neq -5$ y $5 + l \neq 0$. Luego, de (34) se sigue:

$$(5+l)k = 5l+1 \;\Rightarrow\; k = \frac{5l+1}{5+l} = \frac{5(5+l)-24}{5+l} = 5 - \frac{24}{5+l} \tag{35}$$

Como k es un entero, entonces de (35) se tiene que $(5+l)|24$ y todos los posibles valores de k se muestran en la siguiente tabla.

$5+l$	l	$k=5-\dfrac{24}{5+l}$
-24	-29	6
-12	-17	7
-8	-13	8
-6	-11	9
-4	-9	11
-3	-8	13
-2	-7	17
-1	-6	29

$5+l$	l	$k=5-\dfrac{24}{5+l}$
1	-4	-19
2	-3	-7
3	-2	-3
4	-1	-1
6	1	1
8	3	2
12	7	3
24	19	4

Los posibles valores que puede tomar k son $-19, -7, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17$ y 29.

Problema 4. Sean O la intersección de AD con BE y F el punto en BO tal que $OF = OE$. Como BE es bisectriz de $\measuredangle ABC$, entonces $\measuredangle ABE = \measuredangle EBC = \alpha$.

Los triángulos $\triangle ABO$ y $\triangle DBO$ son congruentes ya que tienen dos ángulos congruentes y comparten el lado BO. Luego,

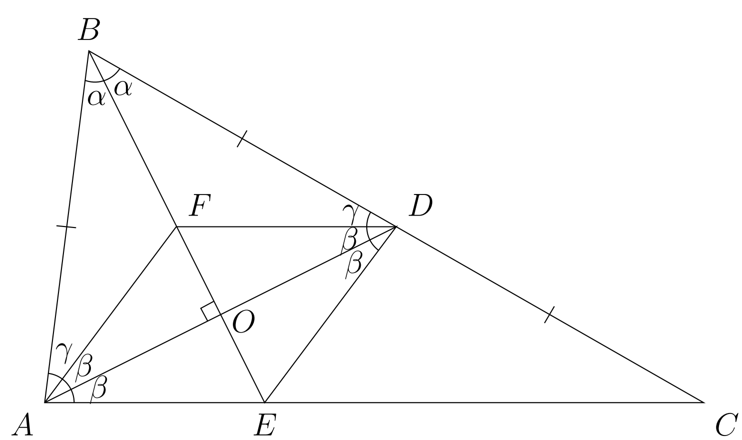
$$\begin{aligned} AB = DB = \frac{1}{2}BC \quad \text{y} \\ AO = DO = 2 \end{aligned} \tag{36}$$

Por el teorema de la bisectriz aplicada al triángulo ABC tenemos que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} \;\Rightarrow\; EC = 2AE \;\Rightarrow\; AC = 3AE \tag{37}$$

Observa que por construcción $OF = OE$ y por (36) $AO = DO$, entonces los cuatro triángulos $\triangle AFO$, $\triangle DFO$, $\triangle AEO$ y DEO son congruentes por el criterio LAL. Sea $\measuredangle FAO = \measuredangle FDO = \measuredangle EAO = \measuredangle EDO = \beta$.

Similarmente, los triángulos ABF y DBF son congruentes por criterio LAL y $\measuredangle BAF = \measuredangle BDF = \gamma$.



Por suma de ángulos internos en el triángulo ABO tenemos que $\alpha+\beta+\gamma = 90°$ y sumando ángulos internos en el triángulo ABC se tiene que:

$$2\alpha + 2\beta + \gamma + \measuredangle ACB = 180° \;\Rightarrow\; \measuredangle ACB = 90 - \alpha - \beta = \gamma$$

Como $\measuredangle FDB$ y $\measuredangle ACB$ son ángulos correspondientes e iguales, entonces FD es paralela a AC, luego, por el teorema de Thales aplicado al triángulo BEC tenemos que F es punto medio de BE y como $BE = 4$ se sigue que:

$$BO = 3 \text{ y } OE = 1 \tag{38}$$

Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo ABO y por (36) y (38) tenemos que:

$$AB = \sqrt{BO^2 + AO^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ y } BC = 2AB = 2\sqrt{13}$$

Por (36), (37), (38) y el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo AOE tenemos que:

$$AC = 3AE = 3\sqrt{AO^2 + OE^2} = 3\sqrt{2^2 + 1^2} = 3\sqrt{5}$$

Por lo tanto, los lados del triángulo ABC miden: $AB = \sqrt{13}, AC = 2\sqrt{13}$ y $BC = 3\sqrt{5}$.

Problema 5. Como x y y son enteros positivos entonces $x^y = y^{x-y}$ implica que $x - y \geq 0$, es decir $x \geq y$. Si $x = y$, es claro que la única solución posible es que $x = y = 1$.

Si $x > y$ se tiene que $x^y = y^{x-y} < x^{x-y} \Rightarrow y < x - y \Rightarrow x - 2y > 0$. Sea $d = mcd(x, y)$, entonces existen enteros positivos x_1, y_1 tales que $x = dx_1, y = dy_1$ y $mcd(x_1, y_1) = 1$. Sustituyendo en la igualdad original se tiene que:

$$\begin{aligned} x^y &= y^{x-y} \\ (dx_1)^y &= (dy_1)^{x-y} \\ d^y x_1^y &= d^{x-y} y_1^{x-y} \\ x_1^y &= d^{x-2y} y_1^{x-y} \end{aligned}$$

Como $x > y$ y $x - 2y > 0$, ambos extremos de la igualdad anterior son enteros. Ahora, si existe un primo p que divide a y_1, entonces $p | d^{x-2y} y_1^{x-y} = x_1^y \Rightarrow p | x_1$. Luego $p | mcd(x_1, y_1) = 1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $y_1 = 1 \Rightarrow y = d \Rightarrow y | x$. Es decir, existe un entero positivo $n \geq 2$ tal que $x = ny$.

Dado que $x = ny$, sustituyendo esto en la igualdad original se tiene:

$$\begin{aligned} x^y &= y^{x-y} \\ (ny)^y &= y^{ny-y} \\ n^y y^y &= \frac{y^{ny}}{y^y} \\ n^y y^{2y} &= y^{ny} \quad \text{, sacando raiz } y\text{-ésima} \\ ny^2 &= y^n \\ n &= y^{n-2} \end{aligned}$$

Si $n = 2$ se tiene que $2 = y^{2-2} = 1$, por lo que no hay solución.
Si $n = 3$ se tiene que $3 = y^{3-2} = y$, luego $x = 9, y = 3$ es solución.
Si $n = 4$ se tiene que $4 = y^{4-2} = y^2$, entonces $x = 8, y = 2$ es solución.

Es claro que $y = 1$ no puede ser solución para cualquier $n \geq 2$. Ahora, si $y > 1$ observa que si $n = 5$, entonces se tiene que $5 < 2^{5-2} \leq y^{5-2}$. Supongamos que $n < y^{n-2}$ para algún $n \geq 5$, entonces

$$n + 1 < y^{n-2} + 1 < y^{n-1} = y^{(n+1)-2}$$

Entonces, la igualdad $n = y^{n-2}$ es imposible para valores $n \geq 5$. Por lo tanto, los únicos pares ordenados (x, y) que son solución del problema son: $(1, 1), (8, 2)$ y $(9, 3)$.

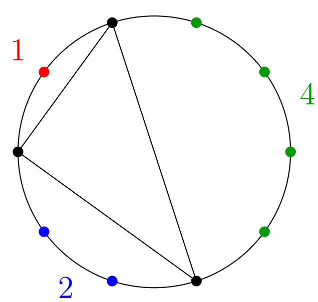
Capítulo 8

Soluciones de la XIX OHM

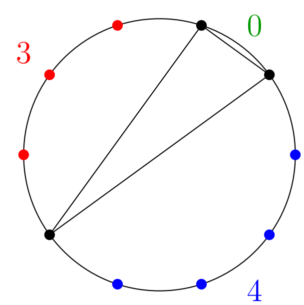
8.1. Nivel Básico

Problema 1. Para resolver este problema identificaremos cada triángulo inscrito en el círculo como una tripleta ordenada (x, y, z), donde x, y, z representan la cantidad de puntos que encierra cada lado del triángulo. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestran los triángulos $(1, 2, 4)$ y $(0, 3, 4)$.

Triángulo $(1, 2, 4)$



Triángulo $(0, 3, 4)$



Observa que si permutamos los elementos del la tripleta obtenemos triángulos congruentes, es decir, los triángulos (x, y, z), (z, y, x) y (y, x, z) son congruentes (por criterio LLL ya que las longitudes de sus lados será la misma). Además dos triángulos congruentes tendrán asociada la misma tripleta. También observa que como hay dibujados 10 puntos en la circunferencia, la suma $x + y + z$ debe ser igual a 7 (los 10 puntos menos los 3 vértices del triángulo).

Por lo tanto, la cantidad de triángulos diferentes que podemos dibujar corresponde a la cantidad de tripletas diferentes (x, y, z) tales que $x + y + z = 7$ y $x \leq y \leq z$. Las cuales escribimos a continuación

$(0, 0, 7)$	$(1, 1, 5)$	$(2, 2, 3)$
$(0, 1, 6)$	$(1, 2, 4)$	
$(0, 2, 5)$	$(1, 3, 3)$	
$(0, 3, 4)$		

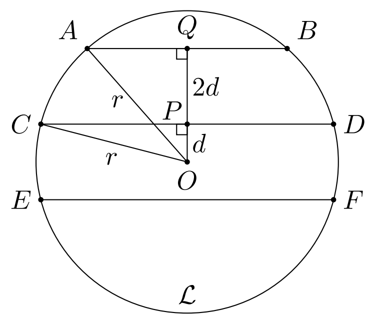
Por lo tanto, podemos dibujar 8 triángulos diferentes en el círculo.

Problema 2. Como $15n$ es múltiplo de 5 y solo debe tener como dígitos el 0 y el 2, el dígito de las unidades de $15n$ debe ser 0.
Como $15n$ es múltiplo de 3, la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 3, por lo tanto, la cantidad de veces que aparece el 2 en su notación decimal debe ser múltiplo de 3.
Por lo anterior, se deduce que el menor valor posible para $15n$ es 2220 y por lo tanto

$$n = \frac{2220}{15} = 148$$

Problema 3. Sea $\mathcal{L}$ una circunferencia con centro en O y radio r, en la que dibujamos las tres cuerdas AB, CD y EF. Como las cuerdas CD y EF tienen la misma longitud, estas deben ser equidistantes del centro O, es decir, deben ser simétricas respecto a O. Sean Q el punto en AB tal que $OQ \perp AB$ y P la intersección de OQ con CD. Observa que los triángulos $\triangle AQO$ y $\triangle BQO$ son congruentes por el criterio ALL (el ángulo de 90° es opuesto al lado mayor, es decir, a la hipotenúsa) y por lo tanto $AQ = BQ$, luego, Q es el punto medio de AB. Como las cuerdas AB y CD son paralelas, entonces $OP \perp CD$ y también se tiene que P es punto medio de CD.

Sea d la longitud de OP, entonces la distancia de la cuerda CD a la cuerda EF será $2d$ (dado que ambas cuerdas son equidistantes de O) y por hipótesis del problema esta distancia es la misma que la distancia entre las cuerdas AB y CD, por lo tanto $PQ = 2d$.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo AQO tenemos:

$$\begin{aligned} AQ^2 + OQ^2 &= OA^2 \\ \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (3d)^2 &= r^2 \\ 17^2 + 9d^2 &= r^2 \qquad (39) \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo CPO tenemos:

$$\begin{aligned} CP^2 + OP^2 &= OC^2 \\ \left(\frac{CD}{2}\right)^2 + d^2 &= r^2 \\ 19^2 + d^2 &= r^2 \qquad (40) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (39) y (40) se concluye que $d = 3$ y $r = \sqrt{370}$. Por lo tanto la distancia entre las cuerdas AB y EF es $4d = 12$.

Problema 4. Sean a, b enteros positivos con $a \neq 2$, entonces:

$$\frac{a}{a-2} = \frac{b+2021}{b+2016} \quad \Leftrightarrow \quad a(b+2016) = (a-2)(b+2021) \quad \Leftrightarrow \quad 5a = 2b + 4042 \tag{41}$$

Como $b \neq 0$, entonces

$$5a = 2b + 4042 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{2}{5} + \frac{4042}{5b} \tag{42}$$

Sean $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ dos soluciones diferentes de la ecuación diofántica (41), tales que $b_1 < b_2$. Note que:

$$b_1 < b_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4042}{b_2} < \frac{4042}{b_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{5} + \frac{4042}{b_2} < \frac{2}{5} + \frac{4042}{b_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{b_1} \quad \text{por (42)}$$

Por lo tanto, encontrar el mayor valor que puede tomar $\frac{a}{b}$ es equivalente a encontrar el menor valor de b, tal que existe una solución (a, b) de la ecuación diofántica (41).

Todas las soluciones enteras de la ecuación diofántica (41) son:

$$\begin{cases} a = 4042 - 2t \\ b = 8084 - 5t \end{cases}, \text{ con } t \in \mathbb{Z}$$

El menor valor entero positivo de b ocurre cuando $t = 1616$, luego $a = 810$ y $b = 4$. Por lo tanto, el mayor valor que puede tomar $\frac{a}{b}$ es $\frac{810}{4} = \frac{405}{2} = 202.5$.

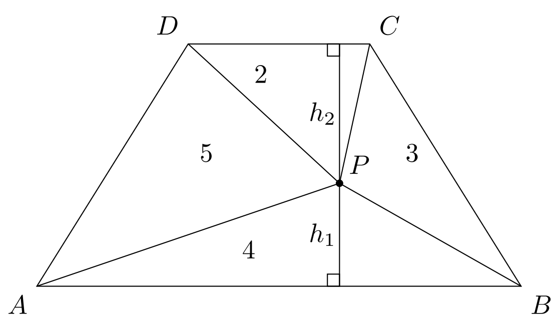
Problema 5. Sea P el punto interior al trapecio en el que se construyen los triángulos y sean h_1 y h_2 las distancias de P a AB y CD respectivamente.

El área del triángulo ABP se calcula como:

$$(\triangle ABP) = \frac{1}{2} \cdot ABh_1 = 4 \;\Rightarrow\; ABh_1 = 8 \tag{43}$$

El área del triángulo CDP se calcula como:

$$(\triangle CDP) = \frac{1}{2} \cdot CDh_2 = 2 \;\Rightarrow\; CDh_2 = 4 \tag{44}$$



Si calculamos el área del trapecio tenemos

$$\begin{aligned}(ABCD) = \frac{1}{2}(AB+CD)(h_1+h_2) = 2+3+4+5 = 14\\ (AB+CD)(h_1+h_2) = 28\\ ABh_1 + ABh_2 + CDh_1 + CDh_2 = 28 \qquad (45)\end{aligned}$$

Sustituyendo (43) y (44) en (45) tenemos que

$$8 + ABh2 + CDh_1 + 4 = 28 \;\Rightarrow\; ABh_2 + CDh_1 = 16$$

Y dividiendo esta última igualdad por $CDh_2 = 4$ tenemos:

$$\frac{ABh_2}{CDh_2} + \frac{CDh_1}{CDh_2} = \frac{16}{4} \;\Rightarrow\; \frac{AB}{CD} + \frac{h_1}{h_2} = 4 \qquad (46)$$

Observa también que si dividimos (43) por (44) se tiene:

$$\frac{ABh_1}{CDh_2} = \frac{8}{2} \;\Rightarrow\; \frac{AB}{CD}\cdot\frac{h_1}{h_2} = 2 \qquad (47)$$

Sea $x = \frac{AB}{CD}$ e $y = \frac{h_1}{h_2}$, entonces (46) y (47) se convierten en el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Cuyas soluciones en x son $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Por hipótesis $AB > CD$, entonces $\frac{AB}{CD} > 1$ y por lo tanto,

$$\frac{AB}{CD} = x = 2 + \sqrt{2}$$

8.2. Nivel Medio

Problema 1. Observa que este problema es muy similar al problema 1 de Nivel Básico, solamente se ha incrementado el número de puntos de la circunferencia de 10 a 15 puntos. Así que basándonos en la solución del problema 1 de Nivel Básico el problema se reduce a encontrar todas las tripletas diferentes (x, y, z) tales que $x + y + z = 12$ y $x \leq y \leq z$, las cuales se escriben a continuación:

$(0, 0, 12)$	$(1, 1, 10)$	$(2, 2, 8)$	$(3, 3, 6)$	$(4, 4, 4)$
$(0, 1, 11)$	$(1, 2, 9)$	$(2, 3, 7)$	$(3, 4, 5)$	
$(0, 2, 10)$	$(1, 3, 8)$	$(2, 4, 6)$		
$(0, 3, 9)$	$(1, 4, 7)$	$(2, 5, 5)$		
$(0, 4, 8)$	$(1, 5, 6)$			
$(0, 5, 7)$				
$(0, 6, 6)$				

Por lo tanto, podemos dibujar 19 triángulos diferentes en el círculo.

Problema 2. De las relaciones iniciales tenemos que $a^2 = 1 - b^2$ y $c^2 = 1 - d^2$. Multiplicando miembro a miembro ambas igualdades tenemos que: $a^2c^2 = (1 - b^2)(1 - d^2) = 1 - b^2 - d^2 + b^2d^2$, de donde

$$a^2c^2 - b^2d^2 = (ac + bd)(ac - bd) = 1 - b^2 - d^2$$

Por hipótesis $ac + bd = 0$, de donde se sigue que $1 - b^2 - d^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 + d^2 = 1$.
Entonces tenemos que

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad (48)$$
$$c^2 + d^2 = 1 \qquad (49)$$
$$b^2 + d^2 = 1 \qquad (50)$$

Combinando (48) y (50) tenemos que $a^2 = d^2$ y combinando (49) y (50) tenemos que $b^2 = c^2$. Note que si $a^2 = d^2 = 0$, entonces $ab + cd = 0 \cdot b + c \cdot 0 = 0$. Similarmente, si $b^2 = c^2 = 0$ entonces $ab + cd = a \cdot 0 + 0 \cdot d = 0$.
Ahora, si a, b, c, d son todos distintos de 0, nos quedan los siguientes casos.

Caso 1: Si $a = d$.
Como $ac + bd = 0$, se tiene que cumplir que $b = -c$ y por lo tanto: $ab + cd = 0$.

Caso 2: Si $a = -d$.
Como $ac + bd = 0$, se tiene que cumplir $b = c$ y por lo tanto: $ab + cd = 0$.

Por lo tanto $ab + cd = 0$ para todos los reales a, b, c, d que satisfagan las condiciones iniciales.

Problema 3. Observa que este problema es muy similar al problema 4 de Nivel Básico, solamente se ha cambiado la expresión $b + 2016$ por $b + 2008$. Así que basándonos en la solución del problema 4 de Nivel Básico, encontrar el mayor valor que puede tomar $\frac{a}{b}$ es equivalente a encontrar el menor valor de b que es solución de la ecuación diofántica $13a = 2b + 4042$.

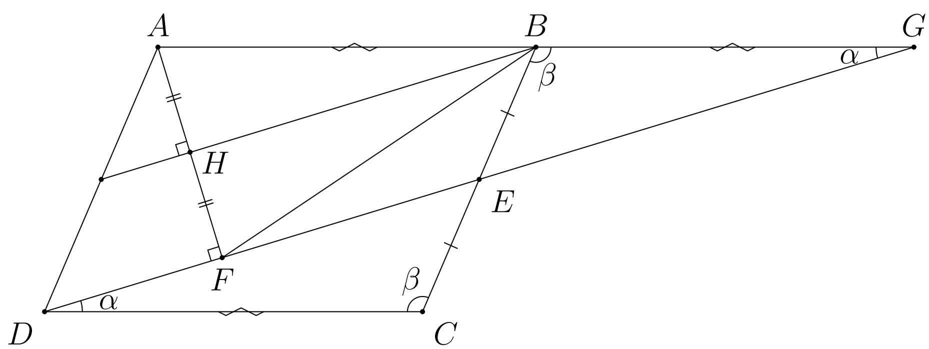
Todas las soluciones enteras de la ecuación diofántica $13a = 2b + 4042$ son:

$$\begin{cases} a = 4042 - 2t \\ b = 24252 - 13t \end{cases}, \text{ con } t \in \mathbb{Z}$$

El menor valor entero positivo de b ocurre cuando $t = 1865$, luego $a = 312$ y $b = 7$. Por lo tanto, el mayor valor que puede tomar $\frac{a}{b}$ es $\frac{312}{7}$.

Problema 4. sean G la intersección de AB con DE y sea H el punto medio de AF. Observe que $\measuredangle CDE = \measuredangle EGB = \alpha$ y $\measuredangle DCE = \measuredangle GBE = \beta$ por ser ángulos alternos internos entre las rectas paralelas AG y CD. Entonces los triángulos DCE y GBE son semejantes por criterio AA y como $CE = BE$ (por ser E punto medio de BC), se tiene que $\triangle DCE \cong \triangle GBE$. Luego $BG = CD = AB$ por ser $ABCD$ un paralelogramo.

Centrándonos en el triángulo AFG, observa que H es punto medio de AF (por construcción) y B es punto medio de AG, por lo tanto HB es base media de FG y $HB \parallel FG$, por lo tanto $HB \perp AF$. Entonces, los triángulos ABH y FBH son congruentes por criterio LAL (ya que $AH = FH$ y comparten el lado BH) y por lo tanto $FB = AB = BG$.
Por lo tanto, el triángulo BFG es isósceles y $\measuredangle EFB = \measuredangle EGB = \measuredangle CDE$



Problema 5. Para todo número entero positivo k, definamos $s(k)$ como la suma de todos los dígitos de k.
Observe que $l_n = \underbrace{11 \cdots 11}_{n-veces}$ es el menor número creciente de n dígitos y $L_n = \underbrace{99 \cdots 99}_{n-veces}$ es el mayor.
Entonces para cualquier número creciente m de n dígitos se tiene que $l_n \leq m \leq L_n$ y $n = s(l_n) \leq s(m) \leq s(L_n) = 9n$.

Lema 1: Si $n \leq k \leq 9n$ entonces existe un número creciente m_k de n dígitos tal que $s(m_k) = k$.
Demostración: Razonemos por inducción.
Caso base: Si $k = n$, defina $m_k = l_n$, entonces $s(m_k) = s(l_n) = n$.

Supongamos que para algún $n \leq k < 9n$ existe un número creciente m_k de n dígitos tal que $s(m_k) = k$. Como $k < 9n$, entonces $m_k \neq L_n$ y el primer dígito de izquierda a derecha de m_k es $a \neq 9$.

Caso 1: $m_k = \underbrace{aa\cdots a}_{n-veces}$, entonces defina $m_{k+1} = m_k + 1$. Note que m_{k+1} es creciente y $s(m_{k+1}) = k+1$.

Caso 2: $m_k = \underbrace{aa\cdots a}_{r-veces} b_1 \cdots b_{n-r}$, con $a < b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{n-r}$.

Defina $m_{k+1} = \underbrace{aa\cdots a}_{(r-1)-veces}(a+1)b_1 \cdots b_{n-r}$. Note que m_{k+1} es creciente y $s(m_{k+1}) = k+1$.

Finalmente, L_n es creciente y $s(L_n) = 9n$. Por lo tanto queda probado el Lema 1.

Lema 2: Para todo natural n, existe un entero positivo c_n tal que $n \leq c_n^2 < 9n$.
Demostración: Sea c_n el mayor entero positivo tal que $(c_n - 1)^2 < n \leq c_n^2$. Vamos a demostrar que $c_n^2 < 9n$.
Note que $c_n - 1 \leq (c_n - 1)^2 < n \;\Rightarrow\; c_n < n + 1 \leq 2n$.
Por otro lado, $c_n^2 - 2c_n + 1 = (c_n - 1)^2 < n \;\Rightarrow\; c_n^2 < n + 2c_n - 1 < n + 2c_n < n + 2(2n) = 5n < 9n$.

Por lo tanto $n \leq c_n^2 < 9n$ y queda demostrado el Lema 2.

Combinando el Lema 1 y Lema 2 se demuestra el problema.