XXIII Olimpiada Hondureña de Matemáticas

Nivel Básico

El Progreso, Yoro

Código: ____________________

Problema 1. ¿Cuántos números de tres dígitos cumplen que la suma de dos dígitos es igual a 7 veces el tercer dígito?.

Solución: Un número de tres dígitos se representa como abc, donde $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ y $b, c \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. La condición del problema puede interpretarse de tres maneras distintas:

1. La suma del primer y segundo dígito es 7 veces el tercero: $a + b = 7c$.
2. La suma del primer y tercer dígito es 7 veces el segundo: $a + c = 7b$.
3. La suma del segundo y tercer dígito es 7 veces el primero: $b + c = 7a$.

Analizaremos cada caso por separado.
Caso 1: $a + b = 7c$
La suma máxima de $a + b$ es $9 + 9 = 18$. Por lo tanto, $7c \leq 18$, lo que implica que c solo puede ser 1 o 2.

- **Si** $c = 1$: $a + b = 7$. Los números son: 161, 251, 341, 431, 521, 611, 701 (7 números).
- **Si** $c = 2$: $a + b = 14$. Los números son: 592, 682, 772, 862, 952 (5 números).

En este caso encontramos **12** números.
Caso 2: $a + c = 7b$
La suma máxima de $a + c$ es $9 + 9 = 18$. Por lo tanto, $7b \leq 18$, lo que implica que b solo puede ser 1 o 2.

- **Si** $b = 1$: $a + c = 7$. Los números son: 116, 215, 314, 413, 512, 611, 710 (7 números).
- **Si** $b = 2$: $a + c = 14$. Los números son: 529, 628, 727, 826, 925 (5 números).

En este caso encontramos **12** números.
Caso 3: $b + c = 7a$
La suma máxima de $b + c$ es $9 + 9 = 18$. Por lo tanto, $7a \leq 18$, lo que implica que a solo puede ser 1 o 2.

- **Si** $a = 1$: $b + c = 7$. Los números son: 107, 116, 125, 134, 143, 152, 161, 170 (8 números).
- **Si** $a = 2$: $b + c = 14$. Los números son: 259, 268, 277, 286, 295 (5 números).

En este caso encontramos **13** números.
Recuento final y eliminación de duplicados
Al sumar los resultados de los tres casos $(12 + 12 + 13 - 3 = 34)$, (hay 3 números que aparecen dos veces. Hay un total de $\boxed{\mathbf{34}}$ números de tres dígitos que cumplen la condición especificada.

□

Problema 2. Un lago grande contiene 50 islas, numeradas del 2 al 51. Dos islas están conectadas por un puente si y solo si uno de sus números divide al otro. ¿Cuántas islas hay con un solo puente?.

Solución: La condición para que exista un puente entre la isla a y la isla b es que a divida a b ($a|b$) o que b divida a a ($b|a$), con $a \neq b$.
Para una isla con número k (donde $2 \leq k \leq 51$), el número de puentes que tiene es la cantidad de otros números j en el conjunto $\{2, 3, \ldots, 51\}$ que son o bien divisores propios de k o múltiplos propios de k.
Dividiremos el análisis en dos casos, basados en si un número k puede tener múltiplos dentro del rango especificado.
Caso 1: Islas con número $k \leq 25$
Si $k \leq 25$, su múltiplo más pequeño, $2k$, será como máximo $2 \times 25 = 50$. Como 50 está en el rango de islas, cualquier isla k en este grupo ($2 \leq k \leq 25$) tiene garantizado al menos un puente hacia una isla más grande (la isla $2k$).
Para que una de estas islas tenga **exactamente un puente**, debe cumplir dos condiciones:

1. No debe tener puentes hacia islas más pequeñas, es decir, no debe tener divisores propios en el conjunto $\{2, 3, \ldots, 51\}$. Esto implica que k debe ser un **número primo**.

2. No debe tener más de un múltiplo en el conjunto. Es decir, $2k$ debe estar en el conjunto, pero $3k$ no.

Buscamos entonces números primos p tales que: $2p \leq 51 \quad \text{y} \quad 3p > 51$. De estas desigualdades, obtenemos: $p < 26 \quad \text{y} \quad p > 17$ Los números primos que se encuentran entre 17 y 26 son:

- **19**: Conectada solo a $2 \times 19 = 38$.

- **23**: Conectada solo a $2 \times 23 = 46$.

Encontramos 2 islas en este caso.
Caso 2: Islas con número $k > 25$
Si $k > 25$, su múltiplo más pequeño, $2k$, será como mínimo $2 \times 26 = 52$. Este valor ya está fuera del rango de las islas $\{2, 3, \ldots, 51\}$. Por lo tanto, estas islas no tienen puentes hacia islas más grandes.
Para que una de estas islas tenga **exactamente un puente**, este debe ser hacia una isla más pequeña. Esto significa que la isla k debe tener exactamente un divisor propio en el conjunto $\{2, 3, \ldots, 51\}$.
Analicemos qué tipo de número tiene esta propiedad:

- Un **número primo** p no tiene divisores propios mayores que 1, por lo que las islas primas en este rango (29, 31, 37, etc.) tienen 0 puentes.

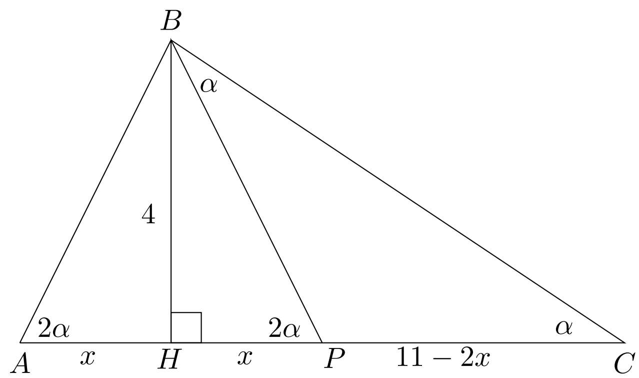
- Un número que es el **cuadrado de un primo**, $k = p^2$, tiene como único divisor propio (mayor que 1) al número primo p. Esta es la condición que buscamos.

Buscamos números k en el rango $26 \leq k \leq 51$ que sean el cuadrado de un primo y el único que cumple es: $7^2 = \mathbf{49}$. La isla 49 solo tiene un divisor en el conjunto, el 7. Por lo tanto, solo tiene un puente.
Encontramos 1 isla en este caso.
Combinando los resultados de ambos casos, las islas que tienen exactamente un puente son aquellas con los números: 19, 23 y 49. Por lo tanto, hay un total de $\boxed{\textbf{3 islas}}$ con un solo puente.

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo y H el pie de la altura desde B. Si se cumple que $\angle CAB = 2\angle BCA$, $BH = 4$ y $AC = 11$. Calcular el área del triángulo BHC.

Solución: Sean $\angle BCH = \alpha$ y $\angle BAH = 2\alpha$. Como $\angle BAH > \angle BCH$, entonces $HC > AH$, luego, podemos tomar un punto P en el segmento HC tal que $AH = HP$.

Tenemos que el triángulo ABP es isósceles, en consecuencia $\angle BPH = 2\alpha$. Sea $x = AH = HP$, entonces $PC = 11 - 2x$ y en el triángulo BPC tenemos que $\angle CBP = \angle BCP = \alpha$, luego, tenemos que $PB = PC = 11 - 2x$.



En el triángulo rectángulo BHP tenemos que $PB = 11 - 2x$, $BH = 4$ y $HP = x$, por el Teorema de Pitágoras:

$$4^2 + x^2 = (11 - 2x)^2 \implies 3x^2 - 44x + 105 = 0 \implies (3x - 35)(x - 3) = 0,$$

de donde $x = \frac{35}{3}$ o $x = 3$.
Como $AP = 2x < 11$ concluimos que $x = 3$. Para terminar, el área del triángulo BHC es igual a:

$$\frac{HC \cdot BH}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16.$$

Problema 4. Para cada entero positivo n, sea $S(n)$ la suma de los dígitos de n. Por ejemplo $S(23) = 5$ y $S(2003) = 5$. Hallar todos los enteros positivos n que satisfacen la ecuación

$$n = 23S(n) + 2025.$$

Solución: Primero, determinemos el número de dígitos que puede tener n. Como n es un entero positivo, $S(n) \geq 1$. Por lo tanto, el valor mínimo de n es:

$$n \geq 23(1) + 2025 = 2048$$

Esto nos indica que n debe tener al menos 4 dígitos.
Ahora, establezcamos un límite superior. Si n tiene k dígitos, entonces $n \geq 10^{k-1}$ y $S(n) \leq 9k$. Sustituyendo el límite superior de $S(n)$ en la ecuación original:

$$n = 23S(n) + 2025 \leq 23(9k) + 2025 = 207k + 2025$$

Combinando estas desigualdades, tenemos:

$$10^{k-1} \leq n \leq 207k + 2025$$

Probemos con diferentes valores de k:

- Si $k = 4$: $10^3 \leq 207(4) + 2025 \implies 1000 \leq 828 + 2025 = 2853$. La condición se cumple.
- Si $k = 5$: $10^4 \leq 207(5) + 2025 \implies 10000 \leq 1035 + 2025 = 3060$. La condición no se cumple.

Para $k > 5$, la desigualdad $10^{k-1} \leq 207k + 2025$ tampoco se cumplirá. Por lo tanto, n **debe ser un número de 4 dígitos**.
El valor máximo de $S(n)$ para un número de 4 dígitos es $S(9999) = 36$. Esto nos da un límite superior más ajustado para n:

$$n \leq 23(36) + 2025 = 828 + 2025 = 2853$$

Así que tenemos el rango definitivo para n: $2048 \leq n \leq 2853$.
Una propiedad conocida es que todo número entero es congruente a la suma de sus dígitos módulo 9. Es decir, $n \equiv S(n) \pmod 9$. Tomemos la ecuación original módulo 9:

$$n \equiv 23S(n) + 2025 \pmod 9$$
$$S(n) \equiv 23S(n) + 2025 \pmod 9$$

Las congruencias para los coeficientes son: $23 \equiv 5 \pmod 9$ y $2025 = 225 \times 9 \equiv 0 \pmod 9$. Sustituyendo:

$$S(n) \equiv 5S(n) + 0 \pmod 9$$
$$0 \equiv 4S(n) \pmod 9$$

Como 4 y 9 son coprimos, para que $4S(n)$ sea un múltiplo de 9, $S(n)$ debe ser un múltiplo de 9.
Ahora tenemos que encontrar los posibles valores para $S(n)$. Sabemos que $2048 \leq n \leq 2853$. El rango para $S(n)$ es:

$$2 \leq S(n) \leq 27$$

Los múltiplos de 9 en este rango son $\{9, 18, 27\}$. Procedemos a verificar cada caso.
Caso 1: $S(n) = 9$

$$n = 23(9) + 2025 = 207 + 2025 = 2232$$

Verificamos la suma de sus dígitos: $S(2232) = 2 + 2 + 3 + 2 = 9$. Coincide. $n = 2232$ **es una solución.**
Caso 2: $S(n) = 18$

$$n = 23(18) + 2025 = 414 + 2025 = 2439$$

Verificamos la suma de sus dígitos: $S(2439) = 2 + 4 + 3 + 9 = 18$. Coincide. $n = 2439$ **es una solución.**
Caso 3: $S(n) = 27$

$$n = 23(27) + 2025 = 621 + 2025 = 2646$$

Verificamos la suma de sus dígitos: $S(2646) = 2 + 6 + 4 + 6 = 18$. No coincide con 27. No es solución.
Después de analizar todos los casos posibles, los únicos enteros que satisfacen la condición dada son $\boxed{\mathbf{2232} y \mathbf{2439}}$.
Solución 2: Primero observemos que

$$n = 23S(n) + 2025 \implies n - S(n) = 22S(n) + 2025$$

Se tiene que $9|n - S(n)$ y $9|2025$, entonces $9|22S(n)$. Como $mcd(22, 9) = 1$ entonces $9|S(n)$. Luego se aplica lo mismo de la solución 1.

Problema 5. Encontrar todas las tripletas de enteros (a, b, c) tales que se cumple la ecuación

$$8a^2c + b^2 + 8c - a^2 - 8b^2c = 2025.$$

<u>Solución:</u> El primer paso es reorganizar la ecuación para que nos permita factorizarla. Agrupamos los términos que contienen a^2, b^2 y c.

$$\begin{aligned} 8a^2c - a^2 - 8b^2c + b^2 + 8c &= 2025 \\ (8a^2c - a^2) - (8b^2c - b^2) + 8c &= 2025 \\ a^2(8c-1) - b^2(8c-1) + 8c &= 2025 \\ (a^2 - b^2)(8c-1) + 8c &= 2025 \end{aligned}$$

Para completar la factorización, sumamos y restamos 1 para crear otro término $(8c-1)$:

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2)(8c-1) + (8c-1) + 1 &= 2025 \\ (a^2 - b^2 + 1)(8c-1) &= 2024 \end{aligned}$$

Hemos llegado a una ecuación donde el producto de dos enteros es 2024.
Llamemos $X = 8c - 1$ y $Y = a^2 - b^2 + 1$. La ecuación es $XY = 2024$. Analicemos la naturaleza del factor $X = 8c - 1$. Como c es un entero, X debe ser un entero tal que al dividirlo por 8, el residuo es -1, o equivalentemente, 7. $X \equiv 7 \pmod 8$
Ahora, encontramos la factorización en primos de 2024:

$$2024 = 8 \times 253 = 8 \times 11 \times 23 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$$

Los factores de 2024 que debemos probar son aquellos que cumplen la condición $X \equiv 7 \pmod 8$. Notamos que $X = 8c - 1$ debe ser un número impar, así que solo necesitamos revisar los factores impares de 2024: $\pm 1, \pm 11, \pm 23, \pm 253$. Los únicos dos valores posibles para $8c - 1$ son -1 y 23.
Caso 1: $8c - 1 = -1$
Si $8c - 1 = -1$, entonces $8c = 0$, lo que implica que $c = 0$. El otro factor debe ser $a^2 - b^2 + 1 = \frac{2024}{-1} = -2024$.

$$a^2 - b^2 = -2025 \implies b^2 - a^2 = 2025$$

Factorizando la diferencia de cuadrados:

$$(b-a)(b+a) = 2025 = 45^2$$

Como a y b deben ser enteros, $b - a$ y $b + a$ deben ser factores enteros de 2025. Además, su suma $(b-a) + (b+a) = 2b$ debe ser par, por lo que ambos factores deben tener la misma paridad. Dado que su producto 2025 es impar, ambos deben ser impares, lo cual siempre se cumple.
Las parejas de factores de 2025 dan lugar a las siguientes soluciones para $(|a|, |b|)$:

- $(1, 2025) \implies b = 1013, a = 1012$
- $(3, 675) \implies b = 339, a = 336$
- $(5, 405) \implies b = 205, a = 200$
- $(9, 225) \implies b = 117, a = 108$
- $(15, 135) \implies b = 75, a = 60$
- $(25, 81) \implies b = 53, a = 28$
- $(27, 75) \implies b = 51, a = 24$
- $(45, 45) \implies b = 45, a = 0$

Para cada par $(|a|, |b|)$ con $a \neq 0$, obtenemos 4 tripletas $(\pm a, \pm b, 0)$. Para $(0, 45)$, obtenemos 2 tripletas $(0, \pm 45, 0)$. En total, hay $7 \times 4 + 2 = 30$ tripletas para $c = 0$.
Caso 2: $8c - 1 = 23$
Si $8c - 1 = 23$, entonces $8c = 24$, lo que implica que $c = 3$. El otro factor debe ser $a^2 - b^2 + 1 = \frac{2024}{23} = 88$.

$$a^2 - b^2 = 87$$

Factorizando la diferencia de cuadrados:

$$(a - b)(a + b) = 87 = 3 \times 29$$

Nuevamente, los factores deben ser ambos impares, lo cual se cumple.

- $(1, 87) \implies a = 44, b = 43$
- $(3, 29) \implies a = 16, b = 13$

Estas dos parejas de valores absolutos $(|a|, |b|)$ son $(44, 43)$ y $(16, 13)$. Para cada una, al considerar los signos, obtenemos 4 tripletas. En total, hay $2 \times 4 = 8$ tripletas para $c = 3$.
La ecuación tiene un total de $30 + 8 = 38$ tripletas de soluciones enteras. Las soluciones son de la forma $(\pm a, \pm b, c)$, donde los valores de $(|a|, |b|, c)$ son:

- Para $\mathbf{c = 0}$: (1012, 1013, 0), (336, 339, 0), (200, 205, 0), (108, 117, 0), (60, 75, 0), (28, 53, 0), (24, 51, 0), y (0, 45, 0).
- Para $\mathbf{c = 3}$: (44, 43, 3) y (16, 13, 3).

$\square$

Duración: 4 horas y 30 minutos.

.

XXIII Olimpiada Hondureña de Matemáticas

Nivel Medio

El Progreso, Yoro

Código: ____________________

Problema 1. Un lago grande contiene 50 islas, numeradas del 2 al 51. Dos islas están conectadas por un puente si y solo si uno de los números divide al otro. Para cada isla, el distrito correspondiente comprende la isla misma y todas las islas a las que se puede llegar desde ella a través de cualquier número de puentes. ¿Cuántos distritos hay?.

Solución: Vamos a demostrar que un gran número de islas pertenecen a un único y gran distrito.

1. **Todas las islas del 2 al 25 están conectadas.** Sea k un número de isla tal que $2 \leq k \leq 25$. El número $2k$ es un múltiplo de k, por lo que la isla k está conectada a la isla $2k$. Además, como $4 \leq 2k \leq 50$, la isla $2k$ está dentro del rango del lago. Todos los números pares están conectados entre sí (ya sea directamente a 2 o a través de otro par, como 12 y 6, que a su vez se conecta a 2). Como $2k$ es par, está conectado a la isla 2. Por transitividad, cualquier isla $k \leq 25$ está conectada a la isla 2. Esto significa que todas las islas del 2 al 25 forman parte de un mismo distrito.

2. **Todos los números compuestos mayores que 25 están conectados.** Sea n un número compuesto tal que $25 < n \leq 51$. Por ser compuesto, n tiene al menos un factor primo $p \leq \sqrt{n}$. Dado que $n \leq 51$, tenemos que $p \leq \sqrt{51} < 8$. Esto significa que cualquier número compuesto en el rango [26, 51] debe tener un factor primo de 2, 3, 5 o 7. Todos estos factores primos (2, 3, 5, 7) son menores o iguales a 25. Como vimos en el punto anterior, todos ellos pertenecen al componente principal. Como n es divisible por p, la isla n está conectada a la isla p. Y como p está en el componente principal, n también debe estarlo.

Islas Aisladas

Basado en el análisis anterior, las únicas islas que podrían no estar en el componente principal son aquellas que no son compuestas y son mayores que 25. Es decir, los **números primos mayores que 25**.

Los números primos en el rango $25 < p \leq 51$ son: $29, 31, 37, 41, 43, 47$ Consideremos una de estas islas, representada por el primo p.

- Para que p esté conectada a otra isla k, se debe cumplir que p divide a k o k divide a p.
- Como p es primo, ningún $k < p$ (y $k > 1$) puede dividir a p.
- Para que p divida a k, k debe ser un múltiplo de p. El múltiplo más pequeño de p (distinto de p) es $2p$ que no están en el conjunto.

Como el múltiplo más pequeño de cada uno de estos primos ya está fuera del rango [2, 51], estas islas no tienen ninguna conexión. Cada una de ellas forma un distrito por sí sola.

Los distritos son:

1. **Un gran distrito** que contiene a todas las islas del 2 al 25 y a todos los números compuestos del 26 al 51.

2. **Seis distritos individuales**, cada uno compuesto por una única isla prima: $\{29\}$, $\{31\}$, $\{37\}$, $\{41\}$, $\{43\}$, $\{47\}$.

Por lo tanto, el número total de distritos es $1 + 6 = \boxed{\mathbf{7}}$. $\square$

Problema 2. Sea n un número natural con 4 dígitos diferentes y no nulos. Sea $P(n)$ es producto de sus dígitos. Por ejemplo $P(1234) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Encuentre el mayor valor posible de $n - P(n)$.

Solución:
Solución. Sea n un entero de cuatro cifras cuyos dígitos son a, b, c, d (de izquierda a derecha), con $a, b, c, d \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ dos a dos distintos. Entonces

$$n = 1000a + 100b + 10c + d, \qquad P(n) = abcd,$$

y nos interesa maximizar

$$F(a, b, c, d) := n - P(n) = 1000a + 100b + 10c + d - abcd.$$

Para cada cuatro dígitos distintos la mayor contribución a n se obtiene ordenando los dígitos en orden decreciente (para maximizar la parte decimal $1000a + 100b + 10c + d$), por tanto basta considerar únicamente cuádruplas con $a > b > c > d$ y comparar sus valores F.

Paso 1. *El dígito más significativo a debe ser 9.*
Si $a \leq 8$, considere la cuádrupla obtenida reemplazando a por 9 y dejando b, c, d igual. La diferencia en F es

$$\Delta = F(9, b, c, d) - F(a, b, c, d) = (9 - a)\,1000 - (9 - a)\,bcd = (9 - a)\,(1000 - bcd).$$

Como $b, c, d \leq 8, 7, 6$ como máximo (dígitos distintos y menores o iguales a 8), se tiene $bcd \leq 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$, por lo que $1000 - bcd \geq 664 > 0$. Luego $\Delta > 0$, es decir, reemplazar a por 9 aumenta F. Así en el máximo debe ocurrir con $a = 9$.

De ahora en adelante fijamos $a = 9$. Entonces

$$F(9, b, c, d) = 9000 + \big(100b + 10c + d - 9bcd\big).$$

Definimos

$$T(b, c, d) := 100b + 10c + d - 9bcd,$$

y queda maximizar $T(b, c, d)$ con $b, c, d \in \{1, \ldots, 8\}$ distintos.

Paso 2. *El segundo dígito b debe ser 8.*
Sea $b \leq 7$. Dado que c, d son dígitos distintos y no nulos, necesariamente $cd \geq 1 \cdot 2 = 2$. Además $10c + d \leq 10 \cdot 7 + 6 = 76$ (pues $c \leq 7$ y $d \leq 6$ en el peor caso para la cota). Entonces

$$T(b, c, d) = 100b + (10c + d) - 9bcd \leq 100b + 76 - 9b \cdot 2 = (100 - 18)b + 76 = 82b + 76.$$

Si $b \leq 7$ se obtiene

$$T(b, c, d) \leq 82 \cdot 7 + 76 = 650.$$

Por otra parte, si tomamos $b = 8$ y los residuos $c = 2, d = 1$ (válidos y distintos de $9, 8$), entonces

$$T(8, 2, 1) = 100 \cdot 8 + 10 \cdot 2 + 1 - 9 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 1 = 800 + 20 + 1 - 144 = 677.$$

Como $677 > 650$, cualquier elección con $b \leq 7$ no puede dar un T mayor que la elección con $b = 8, c = 2, d = 1$. Por tanto en el máximo debe ser $b = 8$.

Paso 3. *Con $a = 9, b = 8$ los dígitos c, d deben ser 2 y 1 (en ese orden al formar n).*

Con $a=9, b=8$ tenemos

$$F(9,8,c,d) = 9000 + \big(800 + 10c + d - 9\cdot 8\cdot cd\big) = 9800 + \big(10c + d - 72cd\big).$$

Sea $G(c,d) := 10c + d - 72cd$, con $c,d \in \{1,\dots,7\}$ distintos. Vamos a maximizar G.
- Si $d=1$, entonces $c \geq 2$ y

$$G(c,1) = 10c + 1 - 72c = 1 - 62c,$$

que es decreciente en c. Por tanto para $d=1$ el máximo se obtiene en $c=2$:

$$G(2,1) = 1 - 62\cdot 2 = 1 - 124 = -123.$$

- Si $d \geq 2$, entonces $c \geq 3$ y en particular $cd \geq 2\cdot 3 = 6$ (porque c y d son distintos y no pueden ser ambos 1 ni ambos 2). Entonces

$$G(c,d) = 10c + d - 72cd \leq 10\cdot 7 + 6 - 72\cdot 6 = 76 - 432 = -356,$$

que es mucho menor que -123.
Por tanto el máximo de G se alcanza en el caso $d=1, c=2$, y vale $G(2,1) = -123$. Consecuentemente el máximo de F con $a=9, b=8$ es

$$F(9,8,2,1) = 9800 + G(2,1) = 9800 - 123 = 9677.$$

La configuración de dígitos que da ese valor es $\{9,8,2,1\}$ y el número que maximiza n colocando los dígitos en orden descendente (para maximizar n) es $n = 9821$.

Conclusión. El mayor valor posible de $n - P(n)$ es

$$\boxed{9677},$$

obtenido por $n = 9821$ (con $P(9821) = 144$).

$\square$

Problema 3. Determine todas las tripletas (x,y,p) de enteros positivos tal que p es un número primo y satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 = 16p + 1 \\ y^2 = 23p^2 + 1 \end{cases}$$

<u>*Solución:*</u> De la segunda ecuación

$$y^2 - 1 = 23p^2 \quad \Longrightarrow \quad (y-1)(y+1) = 23p^2.$$

Notemos que $\gcd(y-1, y+1) = 1$, ya que deben ser impares. De esto solo se tienen los casos
Caso 1: $y - 1 = 1$ y $y + 1 = 23p^2$, es decir $y = 2$ y $23p^2 = 3$ que no tiene solución
Caso 2: $y - 1 = 23$ y $y + 1 = p^2$, es decir $y = 24$ y $p^2 = 25 \implies p = 5$.
Caso 3: $y - 1 = p^2$ y $y + 1 = 23$, es decir $y = 22$ y $p^2 = 21$ que no tiene solución.
Ahora probemos en la primera ecuación

$$x^2 = 16(5) + 1 = 81 \implies x = 9$$

Concluimos que la única tripleta (x,y,p) de enteros positivos con p primo que satisface ambas ecuaciones es

$$\boxed{(x,y,p) = (9,24,5)}.$$

$\square$

Solución 2: Restando las dos ecuaciones tenemos

$$y^2 - x^2 = 23p^2 - 16p \implies (y-x)(y+x) = p(23p-16)$$

al ser p primo se tiene que $p|y-x$ o $p|y+x$.
Analicemos estos dos casos
Caso 1: $p|y+x$.
Sea k entero tal que $y = kp - x$. Notemos que $5p = \sqrt{25p^2} > \sqrt{23p^2+1} = y > \sqrt{16p^2} = 4p$, es decir $4p < y < 5p$ y como $p \geq 2$, $x^2 = 16p + 1 < 8p^2 + p^2 = 9p^2 \implies x < 3p$. Así $5p > y = kp - x > kp - 3p = (k-3)p \implies k < 8$ y $kp > kp - x = y > 4p \implies k > 4$.
De la ecuación se tiene $kp(y-x) = p(23p-16) \implies k(kp-2x) = 23p - 16$. Analicemos para $k = 5, 6, 7$

- Si $k = 5$ se tiene

$$\begin{aligned} & 5(5p-2x) = 23p - 16 \implies 5x = p + 8 \\ \implies & 25(16p+1) = (p+8)^2 \implies p^2 - 16(24)p + 39 = 0 \\ \implies & p|39 \end{aligned}$$

  de los posibles valores de $p = 3, 13$ ninguno satisface.

- Si $k = 6$ se tiene

$$\begin{aligned} & 6(6p-2x) = 23p - 16 \implies 12x = 13p + 16 \\ \implies & 4|12x - 16 = 13p \end{aligned}$$

  lo último no es posible, ya que p y 13 son primos.

- Si $k = 7$ se tiene

$$\begin{aligned} & 7(7p-2x) = 23p - 16 \implies 7x = 13p + 8 \\ \implies & 49(16p+1) = (13p+8)^2 \implies 13^2p^2 - 16(36)p + 15 = 0 \\ \implies & p|15 \end{aligned}$$

  de los posibles valores de $p = 3, 5$ ninguno satisface.

Caso 2: $p|y-x$ Sea k entero tal que $y = kp + x$. Tenemos que $4p < y < 5p$ y $x < 3p$. Así $4p < y = kp + x < kp + 3p = (k+3)p \implies k > 1$ y $kp < kp + x = y < 5p \implies k < 5$.
De le ecuación se tiene $kp(y+x) = p(23p-16) \implies k(kp+2x) = 23p - 16$. Analicemos para $k = 2, 3, 4$

- Si $k = 4$ se tiene

$$4(4p+2x) = 23p - 16 \implies 8|16 + 8(p+x) = 23p$$

  lo último no es posible, ya que p y 23 son primos.

- Si $k = 3$ se tiene

$$\begin{aligned} & 3(3p+2x) = 23p - 16 \implies 3x = 7p - 8 \\ \implies & 9(16p+1) = (7p-8)^2 \implies 49p^2 - 16^2p + 55 = 0 \\ \implies & p|55 \end{aligned}$$

  de los posibles valores de $p = 5, 11$ solamente $p = 5$ es solución de la ecuación. Así $x^2 = 16(5) + 1 \implies x = 9$ y $y^2 = 23(5) + 1 \implies y = 24$.

- Si $k=2$ se tiene
$$2(2p+2x)=23p-16 \implies 4|16+4(p+x)=23p$$
lo último no es posible, ya que p y 23 son primos.

Concluimos que la única tripleta (x,y,p) de enteros positivos con p primo que satisface ambas ecuaciones es
$$\boxed{(x,y,p)=(9,24,5)}.$$

$\square$

Solución 3:
De la primera ecuación
$$x^2-1=16p \quad \implies \quad (x-1)(x+1)=16p.$$
Notemos que $\gcd(x-1,x+1)=2$. Escribamos
$$x-1=2u, \qquad x+1=2v,$$
donde u,v son enteros positivos con $v=u+1$. Entonces
$$4uv=16p \quad \implies \quad uv=4p.$$
Como $\gcd(u,v)=1$ (pues u y v son consecutivos), el producto de dos enteros coprimos es $4p=2^2\cdot p$. Entonces uno de u,v debe dividir 4 y el otro debe ser el resto del factor primo; en particular, uno de ellos es un divisor de 4 y el otro es de la forma $\dfrac{4p}{\text{divisor de }4}$.
Analicemos los posibles valores enteros de u (recordando que $v=u+1$):

- Si $u\mid 4$, entonces $u\in\{1,2,4\}$. Calculamos $p=\dfrac{u(u+1)}{4}$:
$$u=1\Rightarrow p=\tfrac{1\cdot 2}{4}=\tfrac{1}{2}\text{ (no entero)}, \qquad u=2\Rightarrow p=\tfrac{2\cdot 3}{4}=\tfrac{3}{2}\text{ (no entero)},$$
$$u=4\Rightarrow p=\tfrac{4\cdot 5}{4}=5\text{ (primo)}.$$
- Si $v=u+1\mid 4$, entonces $v\in\{1,2,4\}$, lo que da $u\in\{0,1,3\}$. De estos, $u=3$ es el único que produce p entero y positivo:
$$u=3\Rightarrow p=\tfrac{3\cdot 4}{4}=3\text{ (primo)}.$$

Por tanto los únicos valores posibles de u que dan primo p son $u=3$ (con $p=3$) y $u=4$ (con $p=5$). Recuperando x mediante $x=2u+1$ obtenemos:
$$(u,p)=(3,3)\Rightarrow x=2\cdot 3+1=7, \qquad (u,p)=(4,5)\Rightarrow x=2\cdot 4+1=9.$$
Ahora probamos cuál(es) de estos primos cumplen la segunda ecuación $y^2=23p^2+1$.

- Si $p=3$, entonces
$$y^2=23\cdot 3^2+1=23\cdot 9+1=207+1=208.$$
Pero $14^2=196<208<225=15^2$, por lo que 208 no es un cuadrado perfecto. Así $p=3$ no da solución para y entero.
- Si $p=5$, entonces
$$y^2=23\cdot 5^2+1=23\cdot 25+1=575+1=576=24^2.$$
Por tanto $y=24$ es una solución entera positiva.

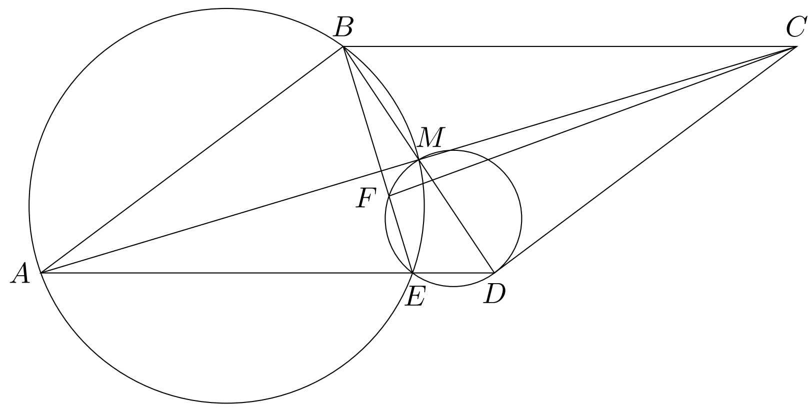
Concluimos que la única tripleta (x, y, p) de enteros positivos con p primo que satisface ambas ecuaciones es

$$\boxed{(x, y, p) = (9, 24, 5)}.$$

$\square$

Problema 4. Sea $ABCD$ un paralelogramo y M la intersección de las diagonales. El circuncírculo de $\triangle ABM$ intersecta el segmento de línea AD en $E \neq A$ y el circuncírculo de $\triangle EMD$ intersecta el segmento de línea BE en el punto $F \neq E$. Demuestre que $\angle ACB = \angle DCF$.

<u>*Solución:*</u>



Note que

$$\begin{aligned}
\angle BCD &= \angle BAD \quad (\textit{paralelogramo}) \\
&= \angle BAE = 180^\circ - \angle EMB \quad (EABM \text{ es cíclico}) \\
&= \angle EMD = \angle EFD \quad (\text{ángulo inscrito en } EFMD) \\
&= 180^\circ - \angle BFD
\end{aligned}$$

Por lo tanto $CBFD$ es un cuadrilátero cíclico. Tambiíen se tiene los cuadriláteros $EABM$, $EFMD$ y $CBFD$ son cíclicos y así

$$\begin{aligned}
\angle ACD &= \angle CAB = \angle MAB = \angle MEB = \angle MEF \\
&= \angle MDF = \angle BDF = \angle BCF
\end{aligned}$$

Por lo que $\angle ACF + \angle FCD = \angle ACD = \angle BCF = \angle BCA + \angle ACF$, que al restar $\angle ACF$ se obtiene $\angle ACB = \angle DCF$.

$\square$

Problema 5. Sea $a_1, a_2, a_3, \cdots$ una sucesión de números reales tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 2025$ y

$$a_{n+2} = a_{n+1} + n^2 a_n$$

para cualquier entero positivo n. Encuentre el menor entero mayor que $\dfrac{a_{2024}}{a_{2023}}$.

<u>*Solución:*</u> Sea

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (n \geq 1),$$

las cuales están bien definidas porque $a_1 = 1 \neq 0$ y por la recurrencia todos los a_n son positivos (se ve por inducción: $a_1 > 0, a_2 > 0$ y $a_{n+2} = a_{n+1} + n^2 a_n > 0$). Dividiendo la relación $a_{n+2} = a_{n+1} + n^2 a_n$ por a_{n+1} obtenemos la relación recursiva para b_n:

$$\boxed{b_{n+1} = 1 + \frac{n^2}{b_n}} \qquad (n \geq 1).$$

Vamos a encontrar un intervalo donde se encuetre $b_{2023} = \dfrac{a_{2024}}{a_{2023}}$ y que podamos encontrar el menor entero mayor que b_{2023}. La relación anterior muestra inmediatamente que las b_n alternan alrededor de valores del orden de n. Para explotar esto establecemos cotas útiles.

Lema 1 (alternancia y cotas iniciales). Se tiene

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1} = 2025 = 45^2,$$

y, para $n \geq 2$, las b_n son positivas. Además las b_n cumplen la alternancia

$$\text{si } b_n > n \text{ entonces } b_{n+1} < n+1, \qquad \text{y si } b_n < n \text{ entonces } b_{n+1} > n+1.$$

(Esto se obtiene de la forma $b_{n+1} = 1 + \dfrac{n^2}{b_n}$: si $b_n > n$ entonces $b_{n+1} < 1 + \dfrac{n^2}{n} = n+1$, y si $b_n < n$ entonces $b_{n+1} > 1 + \dfrac{n^2}{n} = n+1$.)
En particular, a partir de $b_1 = 2025 > 1$ se obtiene $b_2 < 2$, luego $b_3 > 3$, $b_4 < 4$, $b_5 > 5$, etc. Es decir, los términos de índice impar quedan por encima de su índice y los de índice par por debajo de su índice.

Lema 2 (mejores cotas por inducción). Para todo entero $m \geq 2$ se verifican las desigualdades

$$\text{(i)} \quad 2m < b_{2m+1} < 2m+1,$$
$$\text{(ii)} \quad 2m-1 < b_{2m} < 2m.$$

(Obs.: la fórmula se escribe convenientemente con índices mostrados así; equivalentes a: para índices impares, b_{impar} está entre $n+1$ y $n+2$, y para índices pares, b_{par} está entre $n-1$ y n.)
Prueba del lema. Procedemos por inducción en m.
Base $m = 1$: ya hemos calculado $b_1 = 2025$, y con la relación $b_2 = 1 + \frac{1^2}{b_1} = 1 + \frac{1}{2025} < 2$, por tanto $2 \cdot 1 - 1 = 1 < b_2 < 2$ y, a su vez, $b_3 = 1 + \dfrac{2^2}{b_2} > 1 + \dfrac{4}{2} = 3$, y además a partir de la cota inferior para b_2 se obtiene una cota superior para b_3 que lo sitúa por debajo de $2 \cdot 1 + 1 = 3$ aumentada en menos de 1.
Paso inductivo: supongamos que para cierto $m \geq 1$ se cumplen (i) y (ii). Usando

$$b_{2m+2} = 1 + \frac{(2m+1)^2}{b_{2m+1}}$$

y las cotas inductivas $2m < b_{2m+1} < 2m+1$ se obtiene inmediatamente

$$b_{2m+2} > 1 + \frac{(2m+1)^2}{2m+1} = 2m+2$$

y

$$b_{2m+2} < 1 + \frac{(2m+1)^2}{2m} = 2m+1 + \frac{(2m+1)^2}{2m} - (2m+1) = 2m+1 + \frac{2m+1}{2m} < 2m+2.$$

De aquí sigue (reindexando adecuadamente) la cota para el término par siguiente; un cálculo análogo usando

$$b_{2m+3} = 1 + \frac{(2m+2)^2}{b_{2m+2}}$$

y las cotas para b_{2m+2} da la cota para b_{2m+3}. Con estas desigualdades se cierra la inducción y las cotas se mantienen para todo $m \geq 2$.

(La desigualdad superior se obtiene usando la cota inferior del paso anterior y la desigualdad inferior usando la cota superior del paso anterior; las fracciones adicionales son pequeñas y permiten acotar dentro del intervalo deseado.)

Aplicando el lema con $2m+1=2023$ (es decir, $m=1011$) obtenemos la cota

$$2024 < b_{2023} < 2025.$$

Recordando que $b_{2023} = \dfrac{a_{2024}}{a_{2023}}$, concluimos que

$$2024 < \frac{a_{2024}}{a_{2023}} < 2025.$$

Por tanto el menor entero mayor que $\dfrac{a_{2024}}{a_{2023}}$ es

$$\boxed{2025}.$$

□

Solución 2: Sea $k = 2025$ y $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ para todo entero positivo n. La recurrencia se reescribe como $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{n^2 a_n}{a_{n+1}}$, es decir

$$b_{n+1} = 1 + \frac{n^2}{b_n}.$$

Note que $b_1 = k$, $b_1 = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}$, $b_3 = \frac{5k+1}{k+1} = 5 - \frac{4}{k+1}$ y $b_4 = \frac{14k+10}{5k+1} = \frac{14}{5} + \frac{36}{5(5k+1)}$. Vamos a probar que

$$2n+2+\frac{1}{2n} < b_{2n+1} < 2n+3$$

$$2n + \frac{4}{2n+3} < b_{2n+2} < 2n+1$$

para todo entero positivo n. El caso $n=1$ se cumple

$$b_3 = \frac{5k+1}{k+1} \in \left(\frac{9}{2}, 5\right)$$

$$b_4 = \frac{14k+10}{5k+1} \in \left(\frac{14}{5}, 3\right)$$

Primero asumamos que

$$2(n-1) + \frac{4}{2n+1} < b_{2n} < 2n-1$$

que es el caso $n-1$. Esto ímplica

$$b_{2n+1} = 1 + \frac{4n^2}{b_{2n}} \in \left(1 + \frac{4n^2}{2n-1}, 1 + \frac{4n^2}{2(n-1)+\frac{4}{2n+1}}\right)$$

Note que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{4n^2}{2n-1} &\geq 2n+2+\frac{1}{2n} \\ \Leftrightarrow 4n^2 &\geq (2n-1)\left(2n+1+\frac{1}{2n}\right) \\ \Leftrightarrow 4n^2 &\geq 4n^2 - 1 + \frac{2n-1}{2n} \\ 1 &\geq \frac{2n-1}{2n} \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
& 1+\frac{4n^2}{2(n-1)+\frac{4}{2n+1}} \leq 2n+3 \\
\Leftrightarrow & 4n^2 \leq (2n+2)\left(2n-2+\frac{4}{2n+1}\right) \\
\Leftrightarrow & 4n^2 \leq 4n^2-4+\frac{8n+8}{2n+1} \\
& 4 \leq \frac{8n+8}{2n+1}
\end{aligned}
$$

ambas desigualdades son ciertas. Por lo que se satisface la primera desigualdad. Similarmente, esto ímplica

$$b_{2n+2}=1+\frac{(2n+1)^2}{b_{2n+1}} \in \left(1+\frac{(2n+1)^2}{2n+3}, 1+\frac{(2n+1)^2}{2n+2+\frac{1}{2n}}\right)$$

Note que

$$
\begin{aligned}
1+\frac{(2n+1)^2}{2n+3} = & \frac{2n+3+(2n+1)^2}{2n+3} \\
= & \frac{4n^2+6n+4}{2n+3} \\
= & 2n+\frac{4}{2n+3}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
1+\frac{(2n+1)^2}{2n+2+\frac{1}{2n}} = & 1+\frac{2n(2n+1)^2}{4n^2+4n+1} \\
= & 1+\frac{2n(2n+1)^2}{(2n+1)^2} \\
= & 2n+1
\end{aligned}
$$

ambas desigualdades son ciertas. Por lo que se satisface la segunda desigualdad. Por inducción las desigualdades se satisfacen para todo entero positivo n.

En particular, tenemos

$$\frac{a_{2024}}{a_{2023}} = b_{2023} \in \left(2024+\frac{1}{2022}, 2025\right).$$

Esto demuestra que el menor entero mayor que $\frac{a_{2024}}{a_{2023}}$ es 2025.

□

Duración: 4 horas y 30 minutos.

.