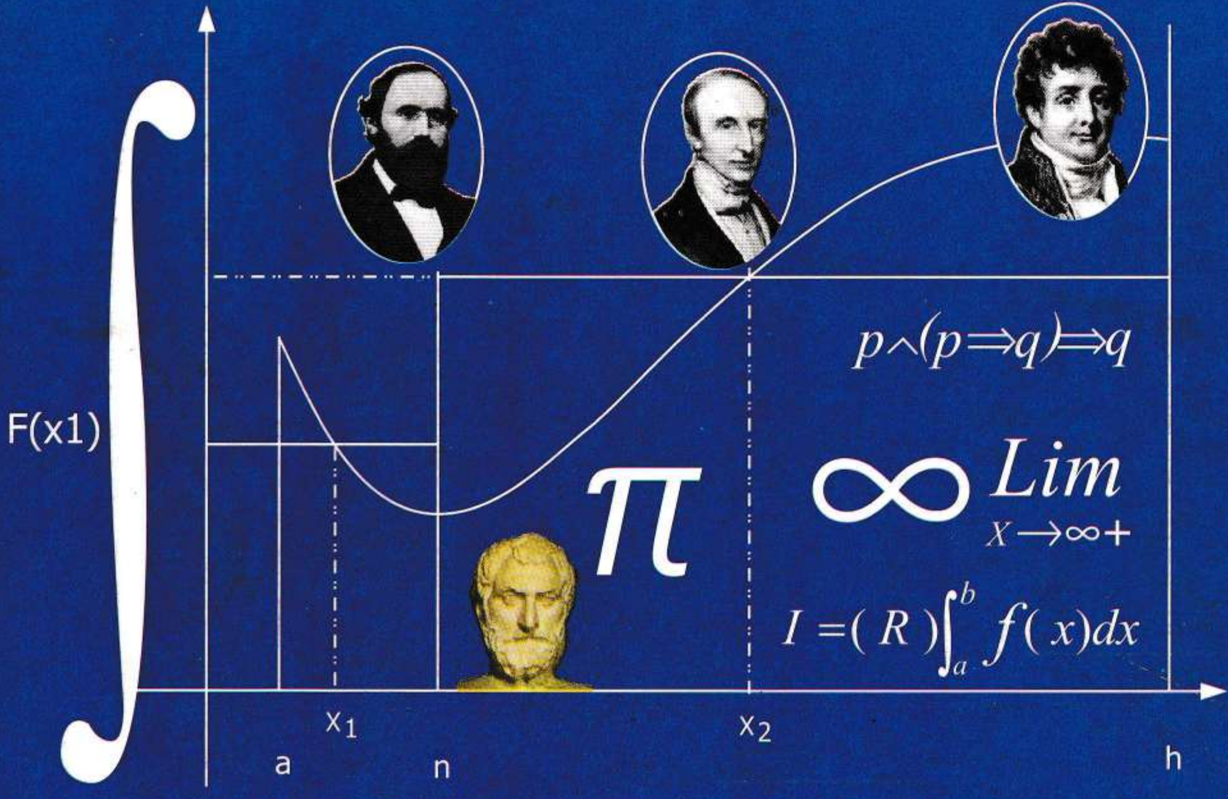
ℵ ALEPH

REVISTA DE MATEMATICAS

Volumen 1 No. 1 Año 2005



Matemáticas UPNFM

SECCION ACADEMICA DE MATEMATICAS
DEL CENTRO UNIVERSITARIO REGIONAL
DE LA UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZAN
SAN PEDRO SULA, CORTES.

Universidad Pedagógica Nacional
Francisco Morazán
Centro Universitario Regional
San Pedro Sula

TEMATICA

INDICADOR

Hermes Alduvín Díaz
Coordinador

Rafael Eduardo Pacheco
Diagramación y Edición

Nora Zulema Chinchilla
Diseño de Portada

COLABORADORES:
Mario Roberto Canales, Rafael Antonio Hernández, Juan Carlos Iglesias, Teodoro Adalberto Cáceres, Rafael Barahona Gómez.

Impresión: Editorial Murillo

PRESENTACION

La revista ALEPH es el órgano de difusión científica del equipo docente de la sección Académica de Matemáticas del Centro Universitario Regional de San Pedro Sula. Es una publicación semestral con artículos de carácter científico y tecnológico de actualidad, en el campo de la matemática con fin de apoyar la labor docente de los profesores de matemática de nivel medio, brindándoles herramientas metodológicas que hagan más favorable la construcción del conocimiento matemático en los alumnos.

Por otra parte, la revista potencia en los alumnos de matemáticas del Centro Universitario Regional una fuente de consulta muy valiosa en su Formación Inicial en el desarrollo de su perfil académico en el campo de la Educación Matemática.

Esta publicación también contribuye a la transformación del Sistema Educativo Nacional que se inició con la transformación de las Escuelas Normales y la implementación del Currículum Nacional Básico (CNB) porque tiene un contenido matemático que potencia el desarrollo del pensamiento matemático tal como lo señala el Diseño del Desarrollo del Currículum Nacional Básico.

La revista ha surgido como una respuesta a las necesidades del difundir del conocimiento matemático en esta era de la información, deficiencia encontrada en el proceso de auto-evaluación de la Carrera de Matemáticas en el año 2003.

Finalmente, ALEPH hace honor a la Teoría de Cantor sobre el infinito, la cual revolucionó la matemática de su tiempo, de igual forma se pretende que esta revista contribuya a revolucionar la educación en nuestro país.

Hermes Alduvín Díaz
Coordinador de ALEPH

EL PAPEL DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DOCENTE

(ENSAYO)

Rafael Eduardo Pacheco
Master en Educación Matemáticas

INTRODUCCIÓN

La didáctica de la matemática se ha constituido una disciplina científica cuyo objeto de estudio ha sido la construcción y difusión del conocimiento matemático. Dentro de esta perspectiva, la historia de las Matemáticas adquiere un gran sentido como generadora de conocimientos y juega un papel importante en los procesos de construcción de dichos conocimientos, en primer lugar, porque facilita los procesos de transposición didáctica necesarios para comprenderla al permitirnos conocer su desarrollo epistemológico, y en segundo lugar, porque ayuda a reflexionar sobre los fundamentos del por qué y para qué de su enseñanza.

La perspectiva histórica de las matemáticas describe el origen y desarrollo de esta disciplina y es la base fundamental para comprender su naturaleza, sus características, dificultades y valorar su carácter instrumental en la resolución de problemas, tanto en la parte científica como tecnológica. Bajo este criterio, se escribe el presente trabajo y su finalidad última es emitir juicios que valoren su potencial en la formación docente.

El escrito se estructura en tres partes, la primera parte es una síntesis del origen de la matemática tal como lo plantean **Aleksandrov, Kolgomorov y Laurentiev**, incluyendo los puntos de vista de **Boyer**. También, se incluye las características principales de la matemática y una descripción de las distintas etapas de su desarrollo.

La segunda parte, hace referencia a dos grandes valores que se deben destacar al estudiar la historia de las matemáticas, y finalmente, a manera de conclusión, se da a conocer la incidencia de estos conocimientos en nuestra práctica docente.

ORIGEN Y DESARROLLO DE LA MATEMATICA

Para todos es sabido que no se sabe exactamente cuando fue asentado por primera vez el dominio del número y las formas como medio de explicar el mundo, gran parte de lo que hoy se conoce como Matemática es el resultado de un pensamiento que originalmente se centró en los conceptos de número, magnitud y forma, pero que nadie puede afirmar donde y quienes lo iniciaron.

De lo que si se está completamente claro, según **Boyer**, es que la matemática apareció originalmente como parte de la vida diaria del hombre a través de una serie de diferencias, semejanzas y contrastes que observaron los antiguos entre las cosas que les rodeaban.

Existen diferentes posturas sobre el origen y desarrollo de las ideas matemáticas, según el punto de vista de **Aleksandrov, Kolgomorov y Laurentiev**, la mayor parte de esta ciencia ha sido el resultado del pensamiento que inicialmente se centró en la idea de número, magnitud y forma y que apareció como parte de la vida diaria del hombre en su búsqueda por contar con una herramienta para resolver las necesidades prácticas de la construcción y la agrimensura.

Por otra parte, se fortalece la idea que el lenguaje jugó un papel importante en el nacimiento del pensamiento matemático, debido a que los signos para representar números precedieron con toda probabilidad a las palabras. En tal sentido, Boyer plantea que la tardanza a lo largo del desarrollo del lenguaje en conseguir cubrir abstracciones tales como el número, se puede ver claramente en el hecho de que las expresiones verbales numéricas primitivas se refieren invariablemente a colecciones específicas concretas.

En cuanto al desarrollo de la matemática, **Aleksandrov, Kolgomorov y Laurentiev** consideran que los griegos hicieron grandes e importantes aportes, demostraron ciertos teoremas relativos a la geometría proyectiva y guiados por las necesidades de la astronomía, desarrollaron la geometría esférica, sin embargo, Boyer hace más énfasis a que los griegos tomaron las ideas de los Egipcios y luego las introdujeron en Grecia, restándole de alguna forma sus méritos.

CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTALES DE LA MATEMÁTICA

a) Las Abstracciones

Las abstracciones de la matemática tratan fundamentalmente de las relaciones cuantitativas y formas espaciales de los objetos, abstrayéndolas de todas las demás propiedades, por lo que sus aseveraciones están determinadas únicamente a través de razonamientos y cálculos. De esta manera, operamos con números abstractos sin preocuparnos de cómo relacionarlos con objetos concretos.

En tal sentido, Aleksandrov, Kolgomorov y Laurentiev, manifiestan que en la escuela elemental se estudia la tabla de multiplicar de forma que se multiplica un número abstracto por otro y no un número de manzanas por el precio de cada manzana, de la misma manera, en Geometría, el concepto de figura geométrica es el resultado de la abstracción de todas las propiedades de un objeto, exceptuando su forma espacial y sus dimensiones.

Haciendo una generalización, podemos ver que este tipo de abstracciones no es exclusivo de las matemáticas, por el contrario, estas están presentes en todas las ciencias, lo que ocurre es que en las matemáticas se ven más acentuadas porque se han generalizado al grado que pierden toda conexión con la realidad, logrando que el individuo no entienda su origen y se sienta imposibilitado para comprenderlo.
La introducción de la simbología matemática ha jugado un papel fundamental en la abstracción de sus conceptos, para el caso, al introducir símbolos para representar los números, el concepto de número que fue elaborado muy lentamente, queda reducido en nuestra mente en forma de imagen visible que se vuelve más compleja en la medida que se van estableciendo leyes generales aplicados a dichos números. Así, es más fácil imaginarse una colección de 5 objetos que una de 17,462, o, comprobar experimentalmente que una suma no depende del orden de sus sumandos que comprender que $x + y = y + x$.

b) Los teoremas

Otra característica principal de la matemática es que sus resultados se distinguen por un alto grado de rigor lógico, que se manifiesta en la demostración de sus teoremas. Demostrar un teorema significa deducirlo mediante un razonamiento lógico a partir de propiedades fundamentales de los conceptos que aparecen en dichos teoremas.
Parafraseando a Aleksandrov, los medios para descubrir teoremas son los modelos matemáticos y las analogías físicas que responden a ejemplos bien concretos constituyen la fuente real de la teoría matemática.

c) Las Aplicaciones

La aplicación de los conceptos, a pesar de sus abstracciones, es otra característica de la matemática, los conceptos y resultados tiene su origen en el mundo real y por lo tanto encuentran su aplicación en todas las ciencias, en la ingeniería y en la tecnología, es decir, en todos los aspectos prácticos de la vida.

Reconocer el principio mencionado anteriormente es el requisito más importante para su aprendizaje y enseñanza, por lo tanto, los docentes debemos tenerlo muy en cuenta a la hora de diseñar las secuencias didácticas con que pretendemos que los alumnos se apropien de este conocimiento.

Siguiendo lo expuesto por Aleksandrov, toda ciencia hace uso esencial en mayor o menor grado de la matemática, las ciencias exactas, la mecánica, la astronomía, la física y gran parte de la química, expresan sus leyes por medio de fórmulas que utilizan ampliamente el aparato matemático en el desarrollo de sus teorías.

Por ejemplo, Adam y Leverrier determinaron en 1846 el lugar exacto donde debía estar ubicado el planeta Neptuno, basándose en los cálculos matemáticos y en las leyes de la mecánica.

En este mismo orden de cosas, Navarrete (1982), señala que una teoría física queda perfectamente considerada sólo cuando las leyes propuestas son expresadas por medio de una notación matemática y pueden deducirse condiciones reales desde estos esquemas y, a la inversa, datos del mundo en torno pueden ser introducidos dentro de expresiones matemáticas, procedimiento por el cual se verifica la validez de la explicación propuesta en un fenómeno.

ETAPAS DE DESARROLLO DE LA MATEMATICA

La matemática se desarrolló a través de diferentes etapas que han sido claramente identificadas. La primera etapa es la de la aparición de la matemática como ciencia teórica pura e independiente que comienza desde los tiempos más remotos y se extiende hasta el siglo V A.C. En esta etapa se creó una conexión entre los teoremas y las demostraciones.

Una segunda etapa comprende la matemática Griega que se distingue por el desarrollo de la geometría y el predominio del álgebra, sobresaliendo, entre otros, los estudios de Euclides. En esta etapa se estudiaron las secciones cónicas como la Elipse, Parábola Hipérbola, etc. y se inicia el estudio de los teoremas relativos a la geometría proyectiva.
Como una sub etapa de este periodo sobresale la matemática del medio Oriente, que se caracterizó por el desarrollo principal en conexión con las necesidades del cálculo, además de la aritmética y la geometría. También, comprendió el desarrollo de la matemática del renacimiento que se caracterizó por las traducciones griegas al Arabe.

Algunos aportes de esta etapa fueron los estudios de Tartaglia y Ferrari en la resolución de ecuaciones cúbicas en general y más tarde la ecuación general de cuarto grado. También en esta etapa se inventaron los símbolos algebraicos actuales.

La tercera etapa corresponde al período del nacimiento y desarrollo del análisis. Los conceptos centrales de esta etapa son los de variable y función. Esta etapa de la matemática se ve muy impulsada por el desarrollo de las otras ciencias, particularmente las ciencias físicas. En esta etapa, se desarrollan la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral, identificándose claramente la matemática de las magnitudes variables.

Finalmente, tenemos la cuarta etapa, llamada matemática contemporánea cuyo objetivo es el estudio de todas las posibles relaciones e interdependencias cuantitativas entre magnitudes, las disciplinas que se aquí se desarrollan son menos conocidas porque se estudian casi exclusivamente en los departamentos universitarios de matemáticas y física. En esta etapa se puede mencionar las geometrías no Euclidiana, las nuevas teorías algebraicas, el análisis funcional, etc.

VALORACIÓN DE LA HISTORIA DE LAS MATEMATICAS EN LA ENSEÑANZA

Después de haber estudiado la historia de las Matemáticas, en sus diferentes etapas de desarrollo, se pueden emitir algunos juicios de valor en base a la experiencia adquirida. Uno de estos valores es la creación del sentido de la Matemática en todas sus dimensiones. Bajo este contexto, el estudio de la historia de la Matemática posee un gran valor filosófico porque nos permite reconocer el "porque" y "para que" de esta disciplina.

Comprender el "porque" de las Matemáticas adquiere un valor trascendental debido a que nos da la oportunidad de conocer su propia naturaleza, es decir, podemos conocer su contenido, sus métodos, desarrollo y significado, en general, su esencia.

Por otra parte, el estudio de la historia de las Matemáticas, ayuda a identificar las múltiples aplicaciones que le dan su razón de ser a esta ciencia, esto es, a mi juicio, el "para que" de las matemáticas, porque no se puede concebir una ciencia sin aplicabilidad práctica, ya sea que esta surja del pensamiento puro, como afirman los idealistas, o surja de las necesidades prácticas del hombre.

Un segundo juicio de valor que se puede mencionar respecto al estudio de la historia de las matemáticas, es reconocer su valor instrumental a través de todo su desarrollo. En la antigüedad, señala Boyer, Herodoto sostenía que la Geometría se había originado en Egipto porque creía que dicha materia había surgido allí, a partir de la necesidad práctica de trazar los lindes de las tierras después de la inundación anual del valle del río Nilo, además, su desarrollo puede haberse visto estimulado tanto por las necesidades prácticas de la construcción y de la agrimensura, como por un sentimiento estético de diseño y orden.

En el caso de la Aritmética, la transición del proceso sencillo de contar objetos uno a uno al proceso ilimitado de formación de números agregando una unidad al número anterior ha constituido una abstracción, sin embargo, posee un carácter instrumental enorme, porque fue producto de las necesidades del hombre.

En este contexto, Aleksandrov, considera que en una palabra, las fuerzas que condujeron al desarrollo de la aritmética fueron las necesidades prácticas de la vida social. Estas necesidades prácticas y el pensamiento abstracto que surgió de ellas, ejercieron unos sobre otros, una constante interacción, los conceptos abstractos constituyeron en sí una valiosa herramienta para la vida práctica y fueron constantemente mejorados debido a sus muchas aplicaciones.

Otra de las disciplinas donde se deja de manifiesto el carácter instrumental de la matemática es el Cálculo, este ha sido por sobre todo, el instrumento de cálculo por excelencia debido a las distintas aplicaciones que tiene, no se puede aprender física, mecánica, electricidad o electrónica sin la ayuda del cálculo.

Este carácter instrumental del cálculo se ve más acentuado cuando se quiere proporcionar a los alumnos los conocimientos fundamentales del cálculo diferencial e integral de una variable real para ser utilizados en la interpretación, planteamiento y resolución de problemas específicos", (Alaníz, 1996), objetivos que son muy comunes en los procesos de enseñanza del cálculo.

3. CONCLUSION

La mayor incidencia de los conocimientos sobre historia de las matemáticas en la práctica docente es la contextualización de la enseñanza de las matemáticas. Esto no solo es importante porque ayuda a mejorar el discurso matemático, sino que da la oportunidad de conocer el desarrollo epistemológico de los contenidos a enseñar, tomando conciencia del esfuerzo y dificultades y problemas que tuvieron que enfrentar los matemáticos antiguos para desarrollar un saber, facilitando de esta forma su enseñanza.

Por otra parte, la contextualización de la enseñanza matemática, se ha vuelto una necesidad porque determina la construcción de herramientas y estrategias, tanto de enseñanza como de aprendizaje, para la comprensión de conceptos, leyes, generalizaciones, teorías, tan fundamentales para la resolución de problemas.

También, el hecho de conocer la historia de la matemática fortalece la forma de enseñar sus contenidos porque ayuda a dirigir el proceso de aprendizaje en una línea diferente a la tradicional, enfocándolo hacia una concepción constructivista del conocimiento, tal como lo concibieron los precursores, es decir, descubriendo y experimentando por su propia cuenta.

Bibliografía

Historia de la matemática
Carl B. Boyer
Alianza Editorial; ISBN: 84-206-8094-X

La Matemática: su contenido, método y significado
A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev y otros
Alianza Editorial;
ISBN: 84-206-2993-6

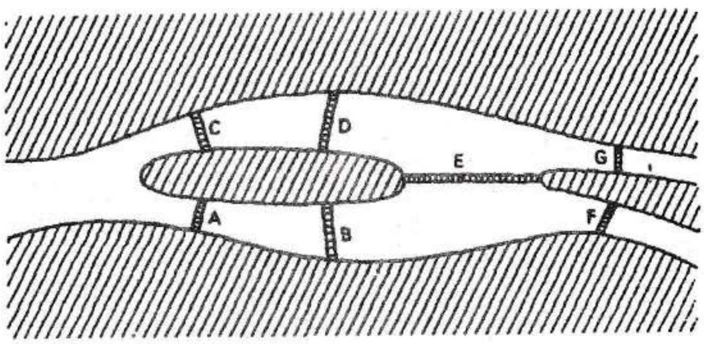
Juan Antonio Alanís Rodríguez. La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo. Tesis Doctoral: Departamento de Matemática Educativa, Cinvetsav-IPN,
México (1996)

Manuel Navarrete. Matemáticas y Realidad
Secretaría de Educación Pública de México.
Sep Setentas Diana, 1982.

LOS SIETE PUENTES DE KÖNIGSBERG

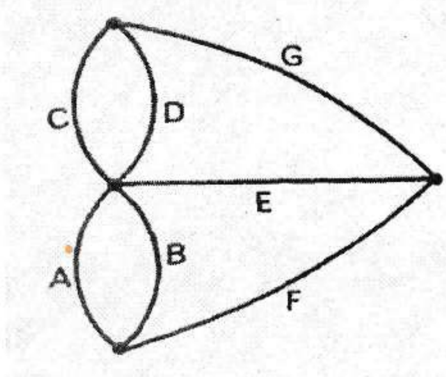
Teodoro Cáceres
Master en Educación Matemática

Una de las ramas importantes de la matemática actual, la topología, nació con el siguiente acertijo que el gran Euler describió y resolvió en uno de sus artículos: "El problema que, según entiendo, es muy bien conocido, se enuncia así: En la ciudad de Königsberg, en Prusia, hay una isla, llamada Kneiphof, rodeada por los dos brazos del rió Pregel. Hay siete puentes, A, B, C, D, E, F y G, que cruzan los dos brazos del rió (ver la figura de abajo). La cuestión consiste en determinar si una persona puede realizar un paseo de tal modo que cruce cada uno de los puentes una sola vez. Se me ha informado de que mientras unos negaban la posibilidad de hacerlo y otros lo dudaban, nadie sostenía que fuese posible realmente".



¿Por donde se puede empezar a atacar el problema? Piensa y observa. Hay muchos aspectos del problema que son totalmente irrelevantes, que no importan nada. Por ejemplo, que la isla sea más grande o más chica, que los puentes sean más estrechos o más anchos, rectos o curvos, más largos o más cortos. Lo esencial es el esquema, lo que los puentes unen y como estas uniones se comportan entre si. Lo esencial es, pues, lo siguiente: *(Se puede trazar el siguiente dibujo de un solo trazo sin repetir ninguna línea?*

Fig. 1



Seguro que esto le sugiera algún recuerdo de la infancia ¿sabrías repetir las siguientes figuras sin levantar el lápiz del papel y sin repetir dos veces una misma línea? ¿Sabrías hacer esto mismo saliendo de algún punto y volver al mismo punto?

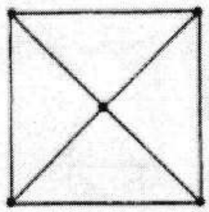


Fig. 2

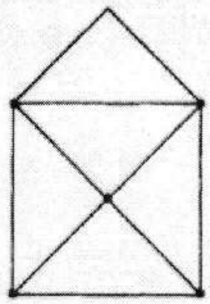


Fig. 3

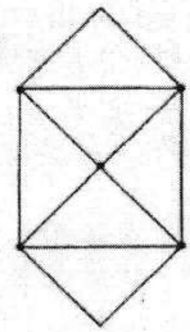


Fig. 4

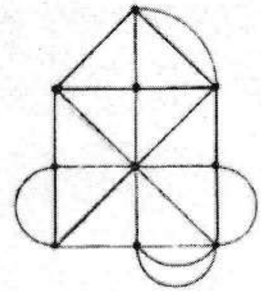


Fig. 5

Prueba, prueba... La figura 3 la conocerás casi seguro y la habrás hecho muchas veces, pero te costará terminar en el punto en que comienzas. La figura 4 es tan fácil de trazar que, a no ser que lo hagas a mala idea, saliendo de cualquier punto llegas al mismo punto sin repetir arcos y recorriéndolos todos, y eso casi sin proponértelo, La figura 2 parece más simple, tiene menos trazos, pero para ella, como para esta figura 6 de solo tres trazos,

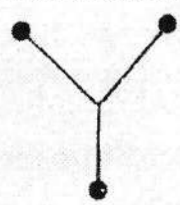


Fig. 6

Los dos problemas propuestos son imposibles de modo clarísimo, trivial, como a veces se dice insultantemente. La figura 5 parece que no hay cristiano que la analice, pero ahí tienes una solución:

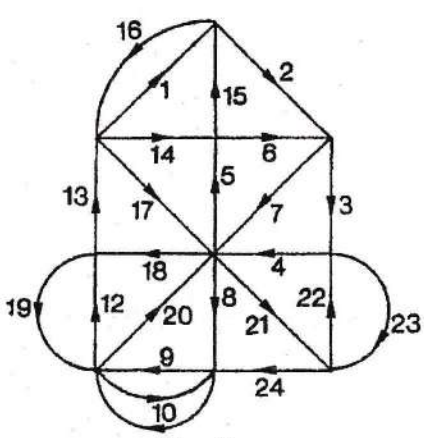
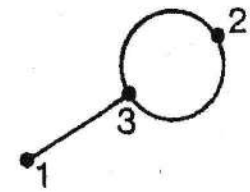


Fig. 7

¿Cuál es el misterio de los arcos de un caso y de otro? ¿Cómo averiguar si un dibujo se puede hacer como se pide y otro no? Y si se puede, ¿Cómo encontrar la receta?
Empecemos por casos sencillos:
La figura 8 se puede, faltaría más!, pero no se puede salir y llegar al mismo punto. La figura 9 se puede si se sale de A terminando en B y también se puede conseguir si se sale de B terminando en A, pero si

salimos de C no se puede. La figura 10 no se puede de ninguna forma. La figura 11 se puede saliendo de cualquier punto y se termina en el mismo punto. Lo que distingue a los vértices es claro. El número de posibles entradas y salidas de ellos, es decir el número de arcos que concurren en cada uno. Aquí están esos números, el grado de cada vértice:



¿Y por que es importante ese número? *¡Mi estimado lector, que le gustan los desafíos!* Entradas y salidas es lo que andamos buscando. Lo que nos atasca en un vértice es la falta de una salida, *¿no lo crees, así?* Es cierto, pero tener muchas entradas y salidas no siempre es bueno. La figura 12 tiene más entradas y salidas que la figura 3 y sin embargo la 3 **es posible** y la 12 **imposible**. Pensemos en una figura posible de trazar volviendo al mismo vértice de partida. Para cada vértice del recorrido, como no nos paramos en él, resulta que entramos tantas veces como salimos, naturalmente por arcos distintos. Así cada vértice es de grado par. El primero también, pues volvemos a terminar en él.

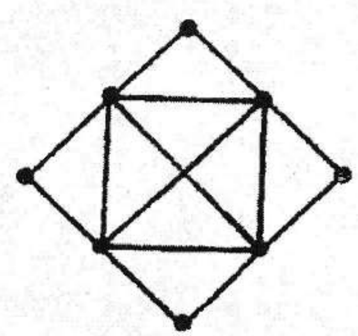


Fig. 12

Así, si *una figura es posible terminando en el mismo vértice de salida tiene que tener todos los vértices de grado par.*

¿Aclara esto nuestro problema totalmente? ¡Aún no! ¿Resultará que si todos los vértices son de grado par podemos hacer un recorrido llegando a terminar en el vértice de salida? **Veamos**. Lo que es seguro

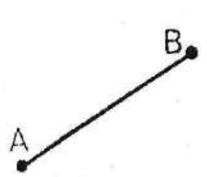


Fig. 8

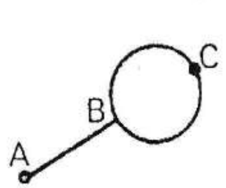


Fig. 9

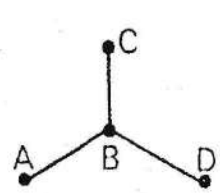


Fig. 10

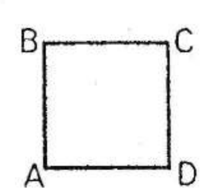
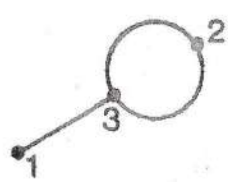


Fig. 11

es que nunca nos atascamos en nuestro camino si no es en el vértice de salida S, pues como cada vértice es de grado par, al entrar en uno que es distinto de S por primera vez nos queda un numero impar de arcos de salida, es decir, por lo menos un arco, al entrar por segunda vez nos queda de nuevo un numero impar, pues hemos usado tres arcos que concurren en ese vértice; así, siempre que entremos podremos salir. Por tanto, caminando por nuestra figura *al buen hondureño* saliendo de S solo nos atascamos estando en S de nuevo. Si hemos recorrido toda la figura ya tenemos nuestro problema resuelto. ¿Sí no la hemos recorrido? Si en nuestro camino C nos faltan arcos por recorrer, lo cierto es que podemos proceder así para ampliar nuestro camino y hacer uno más grande que siga verificando las reglas del juego. Cuando lleguemos al primer vértice S_1 del que salen arcos que no estén recorridos, vamos por ellos. Como antes, no nos podemos parar si no es en S_1. Ahora, cuando en S_1 están recorridos todos los arcos que salen de él, seguimos a partir de S_1 por el camino inicial C hasta llegar al primer vértice S_2 en el que concurran arcos que no están recorridos ni en el camino C ni en la ampliación que acabamos de hacer. Así, acabamos por recorrer todos los arcos.

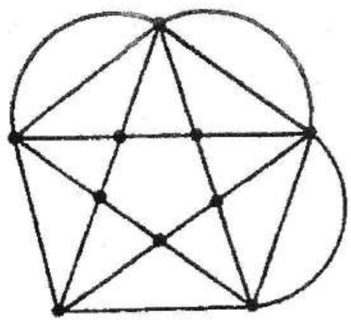
Por tanto, si todos *los arcos son de grado par, la figura propuesta* es *posible y además* ***tenemos la receta*** *para trazar* ***el camino*** *pedido. Además esta receta* ***nos dice que el*** *vértice* ***de salida,*** *que puede ser cualquiera, es necesariamente el mismo que el final!*

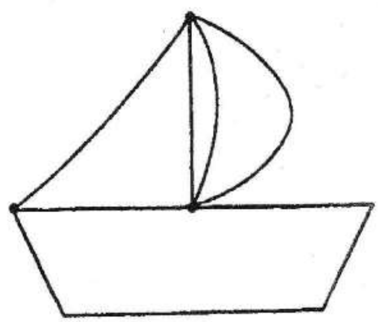
¿Y si hay vértices impares? Observa de nuevo la figura 9.



Si sales de A o de *B,* consigues hacerla, pero si sales de C, no. Los vértices A *y B* son impares, el C es par. ¿Qué misterio es éste? Lo que antes nos condujo a la solución nos puede indicar la forma de proceder ahora. En un trazado como el que tenemos que hacer hay un vértice inicial, un vértice final y todos los demás *de paso. Pero un vértice de paso (ni inicial ni final) tiene tantos arcos de entrada* como *de salida, es decir, es de grado par. Por tanto si una figura admite un* ***trazado*** *como el que se pide, todo vértice de paso ha de ser par.* Pero los vértices de paso son todos menos dos. Por tanto, si *una figura tiene más de dos vértices impares, es imposible.* Por otra parte, si una figura tiene dos vértices impares, este claro que si intentamos trazarla según las reglas, tendremos que salir de uno de los vértices impares e intentar terminar en el otro vértice impar. Sólo nos queda una cuestión para tener nuestro problema resuelto totalmente. Si una figura tiene dos o solo un vértice impar, ¿será posible?, ¿la receta? Lo que hasta ahora sabemos nos puede aclarar las cosas. Si una figura tiene uno o dos vértices impares, salimos con decisión de uno de ellos S. No nos podemos atascar en ningún vértice par, pues si entramos podemos salir de él, ni tampoco en S, pues al salir gastamos uno de sus arcos y así le quedan después un número par de ellos y, por tanto, si volvemos a entrar podemos salir. Como acabamos por atascarnos (solo hay un numero finito de arcos) queda claro que nos atascamos en el otro vértice impar, lo cual demuestra que *no puede haber un solo vértice impar.* Ahora nos preguntamos: ¿hemos recorrido con este camino C toda la figura? Si es así, *enhorabuena*, ya tenemos nuestro problema resuelto. ¿No, lo crees así? Entonces procedemos como antes. Salimos de S por el camino C hasta llegar al primer vértice S, del que salen arcos no recorridos del camino C. Observa que a todos los vértices que tienen aun arcos no recorridos en C les falta un numero par de arcos por recorrer. Así, saliendo de S, por arcos que no estén en C no nos atascamos en ningún vértice distinto de S_1. Así llegamos a S_1 por un camino C_1 de arcos que no están en C habiendo recorrido todos los arcos de S_1 que no estaban en C. Ahora podemos continuar por C hasta llegar al primer vértice S_2 que tiene arcos que no están en C ni en C_1. Procedemos igual, y de este modo acabamos por recorrer todos los arcos de la figura.

Puedes practicar el método proponiéndote figuras posibles complicadas y desafiando a algún amigo a trazarlas. Por ejemplo, las siguientes.





También puedes suponer que tienes una avioneta en Königsberg, qué te permite dar un (único salto de un punto a otro cualquiera, el que te apetezca. ¿Podrías entonces hacer el camino que se pide? ¿Cuál es la condición general de una figura para que se pueda trazar con la ayuda de un salto único?

NOTAS

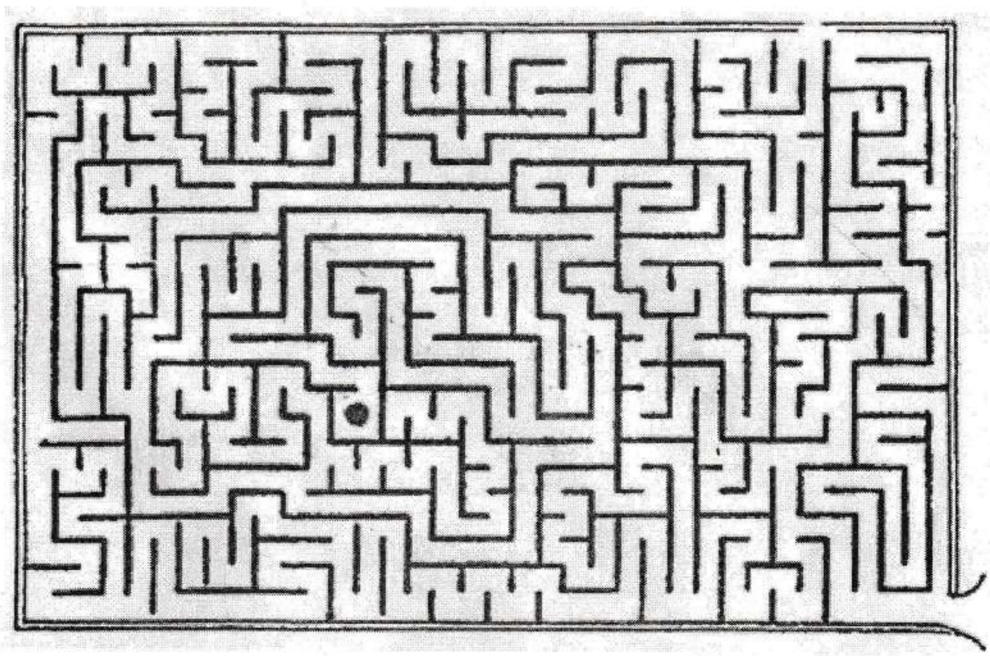
El método que hemos visto para resolver problemas como el de los puentes de Königsberg nos permite también resolver el problema de llegar al centro de cualquier laberinto que se nos ponga por delante, aun sin conocer en absoluto su estructura. Propongámonos llegar desde la entrada al punto del tesoro señalado en el laberinto del jardín de R. Ball, uno de los mas grandes escritores de recreaciones matemáticas de todos los tiempos. Supongamos que no tenemos ningún mapa y que por lo tanto nuestra finalidad deberá ser recorrer *todo* el laberinto (se supone, claro, que el tesoro este bien patente en algún punto del laberinto al que se puede llegar) y salir por la única entrada que hay. ***¿Podremos hacerlo?***

¡Si! El sendero que constituye el laberinto (línea en cursiva de la segunda figura) consta de arcos y puntos de bifurcación. Como por cada arco queremos pasar una vez de ida y otra de vuelta, repetimos cada arco dos veces. Una vez hecho esto, claramente tenemos una figura como las que hemos venido analizando con las figuras anteriores, con *todos l*os vértices pares. Así se puede recorrer toda ella sin repetir arcos partiendo de cualquier punto. Además, lo podemos hacer sin conocer el mapa del laberinto. Lo único que Necesitamos es poder señalar de algún modo los arcos que ya hemos recorrido.

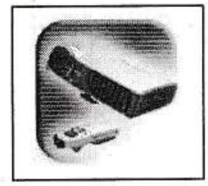
Para ello basta que con una tiza, en cada bifurcación señalemos con una flecha que sendero hemos tornado para no volverlo a tomar cuando estemos en el mismo punto.

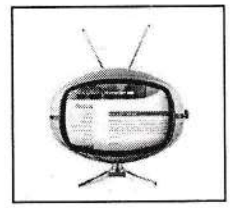
Naturalmente, este modo de proceder no nos proporciona el camino más breve para llegar al tesoro, pero si nos da la seguridad de llegar a él y de poder volver a salir.

El ejercicio anterior es presentado en el libro de Geometría Moderna de Floyd L. Downs, Jr., Texto que generalmente se utiliza para servir la clase de Geometría I.



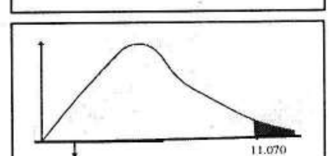
El laberinto del jardín de Rouse Ball, con su tesoro.





DIDACTICA DE LA MATEMATICA

$$X^2 = \sum \frac{(o-e)^2}{e}$$



UN ENFOQUE SOCIO-RECONSTRUCCIONISTA COMO ELEMENTO TEÓRICO PARA DISEÑAR UN MODELO DE ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA CENTRADO EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

(Ensayo)

Hermes Alduvín Díaz Luna
Master en educación Matemática

Introducción.

El aprendizaje de la matemática ha representado para la mayoría de las sociedades retos incalculables, pues a pesar de los grandes esfuerzos que se han hecho en países como los Estados Unidos, Inglaterra, Francia por superar las deficiencias de formación matemática en los distintos niveles educativos todavía no se tienen soluciones satisfactorias.

Actualmente existe la resolución de problemas como una tendencia prometedora en el aprendizaje de la matemática. Esta propuesta está basada en investigaciones hechas por instituciones como la NTCM de los Estados Unidos mediante experimentos longitudinales.

El diseño metodológico de la resolución de problemas como método de enseñaza-aprendizaje de la matemática implica que se adopte un enfoque curricular que permita que los elementos que conforman el currículo de matemáticas interactúen de manera integral.

En este trabajo se pretende dar respuesta a la interrogante de cómo planificar una propuesta de enseñanza de la matemática escolar que garantice obtener aprendizajes duraderos. Para ello, primero, se hace una interpretación teórica de cómo planificar el currículo de matemáticas utilizando un modelo integrador. Luego como ese modelo nos orienta para organizar y conducir un proceso de enseñanza de la matemática desde la visión de la resolución de problemas. Segundo, se hace una propuesta de cómo diseñar una ingeniería didáctica basada en el modelo de cambio de cuadros o marcos para la enseñanza-aprendizaje de la matemática, donde la resolución de problemas es un espacio vital para desentrañar y comprender conceptos matemáticos.

1. El enfoque socio-reconstruccionista como elemento de diseño metodológico de la matemática.

El enfoque curricular socio- reconstruccionista pretende trasformar la educación en un proceso de socialización o culturalización de la persona. Por ello se centra en el individuo como realidad sociocultural y en la sociedad como realidad sistémica e institucional. La escuela activa está dirigida al desarrollo de la personalidad del alumno, sus necesidades, intereses, apoyada en las nuevas teorías psicológicas cognitivas. Según Álvarez de Zayas (1997:32) este modelo no se preocupa en el para qué enseñar, ni en el qué sino en el como enseñar. Es decir, desde el punto de vista del aprendizaje le interesa como el alumno aprende, descubre para poder transferir dichos conocimientos a la solución de sus problemas.

Los sustentos teóricos a que se recurre en este enfoque son las orientaciones funcionales estructuralista que visualizan la sociedad como un sistema de interrelaciones funcionales y estructurales. Así mismo, acude a posiciones teóricas como liberalismo idealista y algunos aspectos provenientes de la economía política y del estructuralismo antropológico y, en la actualidad, de la cibernética social.

El enfoque socio–reconstruccionista nos posibilita diseñar un modelo curricular integral de la enseñanza-aprendizaje de la matemática más participativo y transversal donde los elementos básicos del currículo interaccionan permanente. Stenhouse (Citado por Gimeno, 2002:168) dice que "Los modelos centrados en el proceso elaboran y parten de principios de procedimiento, dejando un espacio flexible a ir concretando en su desarrollo de forma critica y abierta". Estos modelos propician espacios de aprendizaje con mayores posibilidades de desarrollo personal tanto para profesores como para los alumnos.

Una visión de la enseñanza de la matemática planificada desde este enfoque asegura que los objetivos didácticos y matemáticos propuestos estarán en función de comprender la realidad y resolver situaciones problemáticas. El papel del estudiante cambia, de una actitud pasiva predominante en la enseñanza tradicional, se convierte en un actor crítico, comprometido, dinámico y constructor de su propio aprendizaje. En este enfoque los papeles del docente también se trastocan pues debe asumir la función de facilitador del espíritu crítico del alumno y proporcionar los andamiajes para el desarrollo de las habilidades y destrezas del individuo. Los contenidos científicos son abordados desde la perspectiva de una combinación de los elementos culturales sistematizados y los cotidianos. Las metodologías que predominan son las participativas como el trabajo grupal, autogestión, análisis de problemas e investigación. Los recursos son utilizados como los medios propicios para el conocimiento del entorno sociocultural y en las formas de evaluación predomina la evaluación formativa, la auto evaluación y coevaluación.

Siguiendo con esta idea, la maestra Ortiz (2001:39) describe una propuesta metodológica de enseñanza basada en la solución de problemas desde un punto de vista experimental, donde los alumnos se enfrentan a situaciones donde las soluciones no son obvias. Los objetivos propuestos son claros, pero pueden ser modificados de acuerdo a las circunstancias o necesidades de los alumnos. El profesor hace una organización de los componentes del programa de tal forma que el conocimiento este en función de los intereses y necesidades de los alumnos. Planificar en función de las necesidades e intereses de los alumnos nos da un margen de éxito en la ejecución del currículo, tal como nos lo plantea Ander-Egg (1996:115) de que "El modelo curricular sólo se puede realizar de manera mas plena y profunda, en la medida en que es una pedagogía de la pregunta: tiene en cuenta los centros de interés de los educandos, su realidad social, su vida cotidiana y sus interrogantes". Es decir es fundamental para la formación plena del educando proponerle situaciones de conflicto cognitivo que darle respuestas ya elaboradas.

El sentido de la matemática escolar desde ésta perspectiva de acuerdo con Ortiz (2001:39) es que los alumnos hagan matemáticas desde el análisis de situaciones concretas para posteriormente ir comprendiendo los conceptos abstractos de la disciplina y a la vez ir dotándolos de capacidades que les posibiliten aprender por si mismos.

El aprendizaje del conocimiento matemático es concebido como un aprendizaje significativo que puede ser utilizado en otros contextos diferentes al de la escuela. El aprendizaje significativo entendido tal como lo define Díaz y Hernández (1998:21) "la nueva información debe relacionarse de modo no arbitrario y sustancial con lo que alumno ya sabe". Además, Ortiz (2001:40) opina que "El aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por el profesor". El maestro asume el papel de ingeniero organizando y diseñando situaciones de aprendizaje que: partan de los conocimientos previos de los estudiantes, que estén ligadas a los intereses de los alumnos y también a los contenidos matemáticos. En otras palabras el profesor desafía la curiosidad del alumno, conduciendo la investigación hacia el logro de aprendizajes.

Sintetizando lo expresado anteriormente vemos que un modelo integrador de la enseñanza no da prioridad a objetivos previamente determinados sino, que estos sirven para seleccionar los métodos más adecuados de enseñanza-aprendizaje tal como lo manifiesta Stenhouse (1998:128)

> El modelo de proceso se sitúa en la posición según la cual semejantes principios educativos, junto con la especificación de un contenido y de unos amplios propósitos, pueden proporcionar una base para principios de procedimiento y normas de críticas adecuadas al mantenimiento de la calidad en el proceso educativo sin referencia a resultados del aprendizaje pretendidos y estrictamente especificados.

A continuación se describe un ejemplo de ingeniería didáctica de la enseñanza de la matemática que cumple con las características el enfoque socio-reconstruccionista y que además es un modelo integrador.

1. Marcos Secuencias Didácticas, Situaciones-Problema y ventanas conceptuales en el modelo de enseñanza basado en el cambio de cuadros o marcos

Este modelo de enseñanza es una ingeniería didáctica basada en el constructivismo, lo que Regine Douady denomina cambio de cuadros o marcos. Para ella un marco es "un campo de las matemáticas con objetos, relaciones entre objetos, definiciones y teoremas, las representaciones de esos objetos de las cuales ciertas son representaciones semióticas [...] (Perrin, 2001: 63).

El modelo proporciona espacios para que los estudiantes descubran y experimenten por sí mismos las relaciones entre conceptos y su operatoria, y acrezcan en el desarrollo de competencias matemáticas. Pretende que los estudiantes asuman el papel de actores en la búsqueda y construcción de significados, en la capitalización y apropiación del conocimiento matemático, mediante secuencias didácticas diseñadas por el profesor. Este proceso involucra la investigación –acción donde los estudiantes realizan actividades para la mejora continua y el perfeccionamiento de habilidades y destrezas. Según Grundy (1998:193) el perfeccionamiento no se produce desde afuera sino que son los estudiantes mismos quienes controlan el proceso de perfeccionamiento.

Las secuencias didácticas a las que se refiere Douady son las mismas situaciones didácticas que planteó Brousseau, quien decía que "se trata de aprehender el conocimiento por la vía de las condiciones en las que él aparece, de manera que podamos reproducirlas más o menos aproximadamente y por ello de provocar en los estudiantes la adquisición de un saber en el que el sentido y el funcionamiento sean satisfactorios" (citado por Robinet, 1984: 7).

Esta propuesta de Douady (cambio de cuadros o marcos) tiene como finalidad propiciar aprendizajes significativos en los estudiantes, ya que las secuencias didácticas utilizadas propician la confrontación de los conocimientos previos de los aprendices con los nuevos. Para Piaget, en los procesos de aprendizaje "el conocimiento pasa de un estado de equilibrio a otro a través de fases transitorias en el curso de las cuales la validez de los conocimientos anteriores es puesta en evidencia" (citado por Robinet, 1984: 4). Lo que plantea Douady ha tenido éxito en cierta forma pues encarna en su propuesta una de las grandes hipótesis de Piaget, la importancia de los equilibrios y desequilibrios en los aprendizajes.

Aquí el papel del profesor, desde el punto de vista didáctico, consiste en plantear problemas claves para los aprendizajes, problemas que permitan al estudiante transitar de un marco a otro, es decir, por ejemplo, del cuadro numérico al algebraico o al geométrico. Estas situaciones-problema a que referimos deben cumplir, según Robinet las siguientes condiciones:

a) La resolución de los problemas propuestos debe pasar obligatoriamente por la utilización, como herramienta, del o de los conceptos en cuestión (los conceptos son luego introducidos por su funcionamiento).

b) Las situaciones deben hacer intervenir el saber enseñado en diferentes contextos: la realidad física, las representaciones gráficas, el dominio de lo numérico, la geometría, etc.

c) En una serie de situaciones, debe darse la dialéctica "herramienta–objeto": el concepto interviene primero como una herramienta implícita en la fase de construcción de la noción, después él es reconocido como un objeto seguido de una fase de institucionalización. El concepto podrá intervenir, entonces, como una herramienta explícita en la fase de construcción de otra noción (Robinet, 1984: 8).

El juego de cuadros obliga a los estudiantes a resolver problemas de una manera no automática y, a su vez, portadora de sentido para ellos. En el cambio de cuadros intervienen las ventanas conceptuales, las cuales difieren de un estudiante a otro; Douady las define como todo el conjunto de registros (modos de representación de objetos matemáticos) que en el caso del contexto algebraico, lo constituyen el registro de las coordenadas de puntos (x, y), la factorización, las ecuaciones, su resolución, las representaciones gráficas, las tablas de valores, los valores de anulación.

Los cambios de registros y de cuadros, según Rogalsky (2001: 19) permiten buscar en otro marco objetos matemáticos que pertenecen implícitamente pero que no se manifiestan de manera explícita en el marco donde inicialmente se trabaja.

2.1. Pasos para la elaboración del modelo cambio de cuadros o marcos

Para la elaboración del modelo de cambio de cuadros o marcos se siguen los siguientes cuatro pasos:

Primer paso: determinar el objeto de estudio

Aquí se describen los conceptos que van a aparecer de manera explícita e implícita en el problema plateado, además se mencionan los cuadros (numérico, algebraico, geométrico, funcional, etc.) que intervienen en el juego.

Segundo paso: definición de los objetivos para la selección del tema

Se plantean los objetivos matemáticos y didácticos que se esperan lograr con la implementación del modelo.

Los objetivos a lograr deben de estar en función del problema matemático a plantearse posteriormente para la evocación de los conceptos viejos y nuevos. Estos objetivos deben, además, cumplir en cierta medida con la coordinación de temas que se abordan y se tratan de manera separada, pero que desde el punto de vista matemático sostienen relaciones de significado. Se pretende también dar a los estudiante medios para que puedan auto controlarse en su trabajo científico y crear nuevos conocimientos que tengan significado para ellos; los cuales el profesor podrá institucionalizar después.

Tercer paso: seleccionar las operaciones matemáticas y sus justificaciones

En este apartado se hace el planteamiento del problema y se toman las decisiones sobre el tipo de estrategias a utilizar y también las preguntas orientadoras que servirán de guía para que el estudiante vaya desentrañando y construyendo los conocimientos nuevos a partir de los ya conocidos.

El problema a resolver se propone con un enunciado de tal manera que todos los alumnos puedan abordarlo con sus conocimientos previos, y, que no se imponga ningún procedimiento. Aquí las preguntas orientadoras juegan un papel muy importante para resolver el problema, pues es mediante ellas que el alumno podrá hacer interactuar los cuadros y, al mismo tiempo, hacer cambios de registros dentro de los marcos o cuadros.

El profesor debe estar consciente de las competencias que entran en juego en cada uno de los cuadros para resolver el problema. Estas competencias pueden ser de dos tipos: las que se supone tiene el estudiante para abordar el problema y las que le ayudaran a resolverlo, o como lo llamaría Resnick y Ford (1998:161) la comprensión o insight, que es la capacidad que tiene el individuo para conocer la estructura del problema y poder visualizarlo en nuevo contexto.

Otro elemento importante a ser considerado son las herramientas conceptuales y las tecnológicas. Las primeras se refieren al conjunto de nociones subyacentes a las competencias que se presuponen como herramientas explícitas (teoremas, definiciones, axiomas, etc.); y las segundas, al uso de la tecnología para realizar cálculos (calculadoras científicas, computadora).

Cuarto paso: reconstrucción del modelo aplicado (institucionalización local)

Después de haber realizado todas las tareas propuestas, le toca al profesor seleccionar los hallazgos de los estudiantes que tienen un significado para ellos, aquello que es matemáticamente interesante y que puede volver a utilizarse, aquello que actúa en forma directa o preliminar sobre los objetos de enseñanza, o en forma de práctica de campo sobre los objetos del programa. Con este proceso el profesor organiza de manera coherente el saber de la clase.

El proceso de institucionalización puede hacerse sobre varios aspectos; por ejemplo, sobre el vocabulario de las relaciones existente entre los cuadros de los nuevos conocimientos adquiridos.

La fase de institucionalización del lado del profesor comienza con la selección del problema a resolver y con las selecciones didácticas que orientarán el proceso de resolución del problema; pero del lado de los estudiantes aparece hasta el final cuando el profesor trata de articular de manera coherente el conjunto de etapas vividas por los estudiantes en relación con los objetivos de aprendizaje.

3. Conclusiones.

El enfoque socio–reconstruccionista nos posibilita diseñar un modelo curricular integral de la enseñanza-aprendizaje de la matemática más participativo y transversal donde los elementos básicos del currículo interaccionan permanente. La enseñanza de la matemática planificada desde este enfoque nos asegura que los objetivos didácticos y matemáticos propuestos estarán en función de comprender la realidad y resolver situaciones problemáticas.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática fundamentado en el enfoque socio-reconstruccionista nos orienta para que los alumnos hagan matemáticas desde el análisis de situaciones concretas para posteriormente ir comprendiendo los conceptos abstractos de la disciplina y a la vez ir dotándolos de capacidades que les posibiliten aprender por si mismos. Visualizando la educación matemática desde ésta perspectiva nos obliga a que el aprendizaje se produzca a través de investigaciones que han sido planificadas por un profesor -ingeniero- organizando y diseñando situaciones de aprendizaje que: parten de los conocimientos previos de los estudiantes y aprendizajes ligados a los intereses de los alumnos.

El modelo de cambio de cuadros o marcos de Regine Douady, proporciona espacios para que los estudiantes descubran y experimenten por sí mismos las relaciones entre conceptos y su operatoria, y crezcan en el desarrollo de competencias matemáticas. Pretende que los estudiantes asuman el papel de actores en la búsqueda y construcción de significados, en la capitalización y apropiación del conocimiento matemático. Este proceso involucra la investigación –acción donde los estudiantes realizan actividades para la mejora continua y el perfeccionamiento de habilidades y destrezas.

El juego de cuadros obliga a los estudiantes a resolver problemas de una manera no automática y, a su vez, portadora de sentido para ellos. En el cambio de cuadros intervienen las ventanas conceptuales, las cuales difieren de un estudiante a otro; Douady las define como todo el conjunto de registros (modos de representación de objetos matemáticos).

5. Bibliografía:

ALVAREZ DE ZAYAS, Rita M. (1997). **Hacia un currículo integral y contextualizado**. Universidad Nacional Autónoma de Honduras. Editorial Universitaria, Tegucigalpa, Honduras.

ANDER-EGG, Ezequiel. (1996). **La planificación educativa**. Conceptos, métodos, estrategias y técnicas para educadores. Editorial Magisterio del Río de la Plata.

DÍAZ BARRIGA, Frida. & HERNÁNDEZ ROJAS, Gerardo. (1998). **Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista**. McGraw- Hill Interamericana.

DOUADY, Regine & otros (1995), **Ingeniería didáctica en educación matemática**, Iberoamericana, México, pp. 61-96.

GIMENO SACRISTAN, José. (2002). **La pedagogía por objetivos: obsesión por la eficiencia**. Ediciones Morata. Undécima edición.

GRUNDY, Shirley. (1998). **Producto o praxis del currículo**. Ediciones Morata. Tercera edición.

IREM-Universidad Paris 7 Denis Diderot (2001), **"Cambio de marco"** en **Actas de la Jornada en Homenaje a Regine Douady**, editorial IREM, París.

ORTIZ, Francisca. (2001). Matemática. **Estrategias de enseñanza y aprendizaje**. Editorial Pax México, Lib. Carlos Césarman, S.A.

ROBINET, J. (1984), **Ingeniería didáctica (del nivel elemental al superior)**, Editorial. These de doctorat D' etat, Université de Paris VII Denis Didedot, pp. 1-16.

RESNICK, Lauren. & FORD, Wendy. (1998). ***La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.*** Ministerio de Educación y Ciencia-Paidós.

STENHOUSE, Lawrense. (1998). **La investigación como base de la enseñanza**. Madrid. Ediciones Morata. Cuarta edición.

UNA PROPUESTA CONSTRUCTIVISTA PARA EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA

Por: Rafael Eduardo Pacheco
Master en Educación Matemática

La enseñanza de la matemática, ha sido a través del tiempo, un tema de mucho interés y preocupación para los docentes e investigadores de los diferentes círculos educativos del mundo al grado que han encontrado formas alternativas para facilitar el aprendizaje de esta ciencia, sin embargo, en nuestros centros educativos aún se sigue apreciando prácticas pedagógicas tradicionales que no favorecen un aprendizaje significativo en los alumnos.

La razón principal de esta situación es que el método utilizado por la mayoría de los profesores es el deductivo, este método consiste en usar axiomas para demostrar verdades matemáticas o para verificarlas, condicionando de esta manera, el desarrollo de una clase a partir de definiciones y reglas ya definidas, mostrar algunos ejemplos y posteriormente hacer ejercicios sin ningún tipo de análisis epistemológico ni tomando en cuenta los conocimientos previos del alumno.

Esta forma de enseñar es criticada por los investigadores matemáticos porque no potencia en los alumnos ningún tipo de razonamiento que les ayude a resolver problemas, no desarrolla la creatividad, la toma de decisiones ni el pensamiento crítico, lo cual da como resultado un alumno sumiso que todo conocimiento lo acepta como verdad absoluta y lo que es peor, todo lo espera del profesor. En este sentido, el alumno aprende de memoria en base a la repetición y sin ningún tipo de reflexión, haciéndolo aprender para el momento y no para la vida.

Una crítica a esta forma de enseñanza la propone Gómez (2002, pág. 28-29), al considerar que "la matemática se enseña de la misma manera que hace 100 años, en blanco y negro, donde el maestro ha seguido el mismo libro de texto en toda su carrera, copiando al pie de la letra todos los contenidos en la pizarra y manteniendo alejada su aplicación a la especialidad del futuro profesional".

Una causa de esta situación, es que la forma de enseñanza que impartimos responde, principalmente, al tipo de formación profesional que recibimos en su momento, muchos de nosotros hemos tenido una formación inicial en la década de los 80 o antes, donde el formalismo matemático aun estaba presente. Este formalismo es caracterizado por Browder (Citado por Eingenheer, 1997, Pág. 37) como una corriente que considera que la matemática es independiente de objetos o hechos matemáticos, que sólo está constituida por axiomas, definiciones y teoremas y que existen reglas mediante las cuales se deduce una fórmula a partir de otra, pero las fórmulas no se refieren a cosa alguna, solo son combinaciones de símbolos.

Una ilustración de esta situación, es el estudio de las expresiones algebraicas, usando el método deductivo, generalmente, el profesor inicia el tema de la factorización partiendo que de que $ax + bx = x(a+b)$ y lo justifica con el hecho de que x es común a ambos términos en la expresión. Así, el profesor (no el alumno) divide cada término de la expresión algebraica entre el factor común (x), logrando como resultado $x(a+b)$. Seguidamente, cambia la expresión a algo parecido a $2x + 6x^2$ y continuando con el mismo procedimiento obtiene como factores $2x$ y $(1+3x)$, concluyendo que $2x + 6x^2 = 2x(1+3x)$. Posteriormente hace otros ejemplos y propone varios ejercicios como tarea.

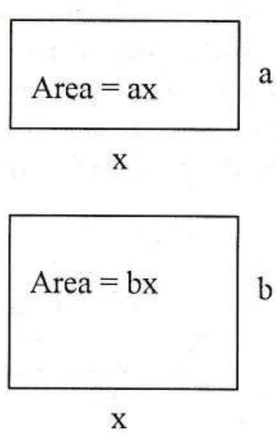
Esta forma de desarrollar el contenido de las expresiones algebraicas, muestra claramente el carácter axiomático de la matemática, se deducen los resultados en forma algorítmica partiendo de reglas y principios algebraicos establecidos previamente. Además, lo señalado por el profesor es considerado una verdad absoluta al grado que, ni siquiera se hace una verificación aritmética de las igualdades mencionadas. Si a esto agregamos la pasividad del alumno, vemos que la clase resulta aburrida y se convierte en una carga pesada que el alumno tiene que soportar el resto del periodo escolar sin darle oportunidad de reflexionar sobre los contenidos ni sobre su propio aprendizaje.

Este enfoque de la matemática no responde a las necesidades inmediatas de la sociedad actual, porque hoy en día se requieren individuos que puedan manipular, interpretar y comunicar datos en forma eficiente, es decir que aprendan a resolver problemas y tomar decisiones precisas, porque, como bien lo señala Eingenheer, (1997, Pág. 39), "El proceso escapa a un tratamiento algorítmico predeterminado, de respuesta única; exige una autorregulación interna por parte del propio individuo. Los procesos y los instrumentos de la matemática tradicional contribuyen a solucionar solo algunos de estos segmentos del problema total".

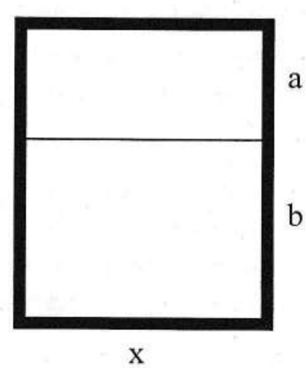
LA PROPUESTA

Haciendo una reflexión de lo señalado anteriormente se propone una forma diferente de enseñar la matemática, tomando como ejemplo el tema de las expresiones algebraicas, con un enfoque constructivista donde sea el alumno el que reconstruya su propio conocimiento, partiendo de lo que sabe, es decir, algunas generalidades de la aritmética y ciertos principios geométricos como el área del cuadrado y del rectángulo.

La clase puede iniciar presentándole al alumno que ax y bx son las áreas de dos rectángulos cuyos lados del primero miden "a" y "x", y los lados del segundo miden "b" y "x" , luego le pedimos que construya un solo rectángulo a partir de estos dos y analice ¿Cuáles son los lados de este nuevo rectángulo?, ¿Puede construir una figura del resultado? , ¿Cuál será el área del nuevo rectángulo?.Veamos la ilustración.



Suma de áreas es ax + bx



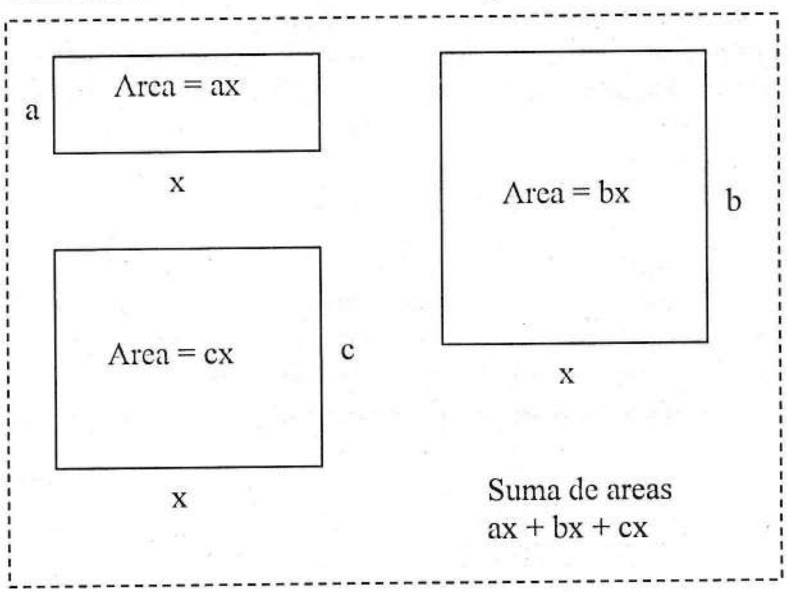
Area total del nuevo rectángulo es x (a + b)

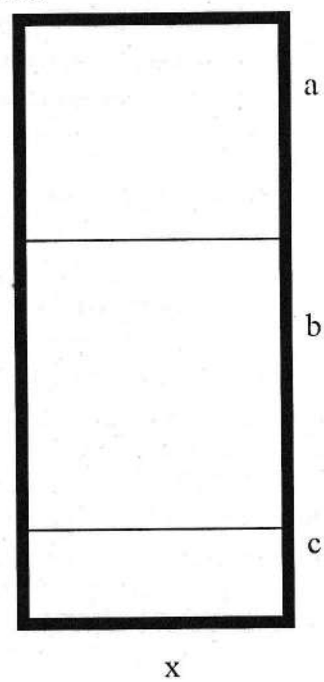
En este ejemplo, podemos ver claramente que el alumno reconstruye fácilmente el nuevo rectángulo con lo que ya sabe y puede determinar que el área del nuevo rectángulo es $x(a+b)$ concluyendo que $ax + bx = x(a + b)$ en relación a las áreas de los rectángulos y sin necesidad que el profesor se lo muestre.

Continuando con este análisis se pueden plantear a los alumnos otros ejercicios como los siguientes

1. $ax + bx + cx = x(a + b + c)$
2. $4x + ax = x(4+a)$
3. $ax + x^2 = x(a + x)$

Una ilustración de estas relaciones algebraicas se muestra a continuación:



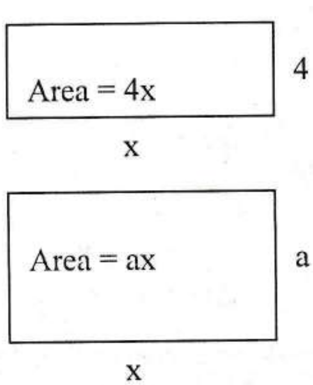


Area Total
$x(a + b + c)$

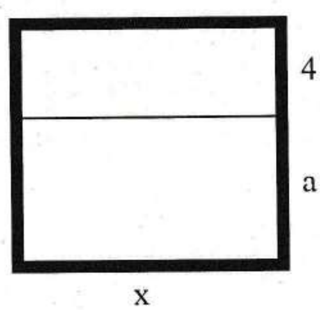
Conclusión

$$ax + bx + cx = x(a + b + c)$$

En el en el ejercicio 2, tenemos



Suma de áreas
$4x + ax$

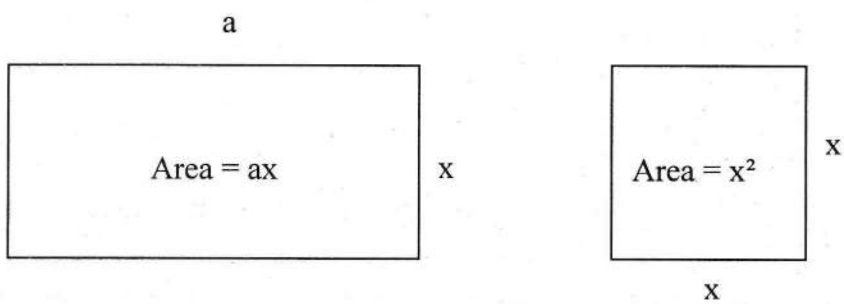


Area total del rectángulo
$x(4 + a)$

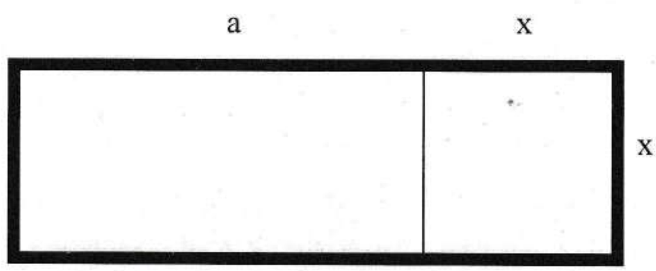
Conclusión

$$4x + ax = x(4 + a)$$

En el ejercicio 3 es necesario observar que se plantea la suma de áreas de un rectángulo y un cuadrado con un lado común, por lo tanto, la ilustración sería como sigue.



Suma de áreas
$ax + x^2$



Area total
$x(a + x)$

Conclusión

$$ax + x^2 = x\,(a + x)$$

Estos análisis potencian en los alumnos un tipo de razonamiento que favorece el estudio de la matemática, en primer lugar, porque crea en el alumno cierta autonomía que le ayuda a construir el conocimiento por su propia cuenta, en este caso, el papel del profesor es de mediador entre él y el conocimiento, de manera que debe orientarlo con guías didácticas apropiadas y otros tipos de apoyo, cuidando de no resolverle el problema.*

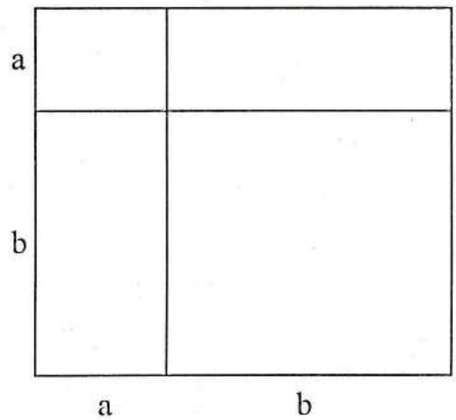
Por otra parte, estos análisis permiten modificar la estructura cognitiva del alumno a través de un proceso de acomodación en relación a los conocimientos previos y los que adquirió, de manera que ahora estará preparado para usar este nuevo conocimiento para continuar construyendo otros saberes matemáticos.

* En el enfoque constructivista del aprendizaje, el conocimiento no se transmite verticalmente del maestro al alumno, por el contrario, es necesario que el alumno lo descubra por su propia cuenta. El hecho de no resolverle el problema no debe interpretarse como que el profesor no le está enseñando, simplemente le está dando la oportunidad para que aprenda.

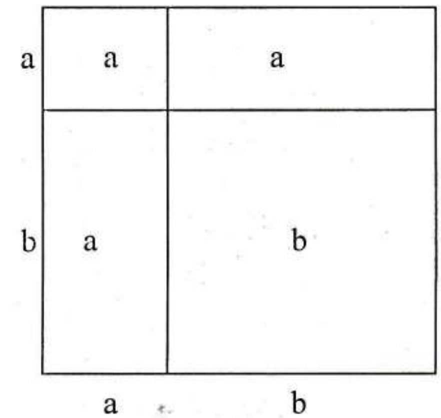
A partir del desarrollo de esta actividad, podemos generar nuevas actividades de aprendizaje para el alumno en el sentido contrario a lo que se hizo, por ejemplo, se puede pedir a los alumnos que analicen una relación algebraica a partir de su representación geométrica. Un análisis sería el siguiente:

¿Qué relación algebraica esta presente en la figura dada? (ver figura 1)

Figura 1



Figura



En la figura 1 se puede ver claramente que es un cuadrado cuyos lados son (a+b), de esta manera, el área de ese cuadrado es $(a + b)^2$. Otro aspecto es que el área de dicho cuadrado está dividida en cuatro partes cuyos valores son a^2 , b^2, ab y ab (ver figura 2). De estos análisis deducimos que la suma de esas áreas es $a^2 + 2ab + b^2$, por lo que podemos concluir que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

¿Podría el lector representar la relaciones algebraicas $(a - b)^2$ y $(a + b)^2 - (a - b)^2$?

* Espero sus comentarios en la dirección electrónica rpacheco432@hotmail.com

Bibliografía

Gómez Joan, (2002), De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas. Editorial Paidos Ibérica S.A. Barcelona, España.

Eingenheer Nilza Bertoni. (1997),. Un nuevo enfoque sobre el conocimiento matemático del profesor. En Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. UNESCO –Santiago, Santiago, Chile.

Geometría y Trigonometría. Libro para el estudiante. (2003) (Nivel medio), Academia institucional de matemáticas del nivel medio superior. Instituto Politécnico Nacional, México. D.F.

UNA PROPUESTA DIDACTICA PARA USAR LA DISTRIBUCIÓN ji-cuadrado (x^2) COMO PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE

Rafael Barahona Gómez
Master en Educación Matemática

La necesidad de realizar una prueba de bondad de ajuste surge cuando no estamos seguros de la forma en como se distribuye un conjunto de frecuencias observadas (obtenidas del medio o entorno que se estudia). El Propósito es determinar si existe o no alguna diferencia significativa entre una distribución de probabilidad teórica previamente hipotetizada y una distribución de frecuencias observadas.
Con mayor precisión una prueba de bondad de ajuste sirve para poder aceptar o no si una serie de datos obtenidos de una muestra tiene determinada forma de distribuirse, existen varias distribuciones de probabilidad teóricas que sirven para éste propósito y una de las más usadas es la ji-cuadrado (x^2).
La propuesta que hago consiste en realizar la prueba en cinco pasos que consisten básicamente en:

Paso 1: Se formulan las hipótesis nulas (H_0) y alternativa (H_1). Luego se especifica el nivel de significancia (tamaño del error tipo I que se desea cometer).

Paso 2: Aquí se declara si la prueba a realizar es de una o dos colas (extremos), la distribución teórica a usar en éste caso es (x^2) y por último se encuentra el o los valores críticos.
Los valores críticos son valores numéricos que se encuentran en tablas especiales y nos marcan la frontera entre la zona de aceptación y la zona de rechazo, es decir que los valores críticos junto al valor experimental encontrado de los datos muestrales, avalan la decisión que sobre la hipótesis nula se tome.

Paso 3: Se encuentran las frecuencias esperadas (frecuencias que teóricamente deberíamos tener en el caso de que la H_0 fuese cierta) y se comparan con las frecuencias observadas (frecuencias que obtengo de la muestra). Es decir obtenemos un x^2 práctico.

Paso 4: Se hace un gráfico adecuado en una curva que represente la distribución de x^2 con el número particular de grados de libertad que se obtienen del número de clases menos uno (1). En éste gráfico se ubican los valores teóricos y prácticos de x^2, para visualizar la relación que existe entre ellos.

Paso 5: De acuerdo a la relación que exista entre los valores práctico y teóricos, se tomará la decisión de aceptar o rechazar la H_0.

La prueba finaliza con la decisión que se toma en el paso 5, es bueno aclarar que los dos últimos pasos propuestos son redundantes, dado que la decisión se puede tomar al finalizar el paso 3, pero como el propósito es que el alumno realmente tome una decisión sobre la hipótesis nula y

que no le quede duda que hizo lo correcto, soy de la opinión que los últimos pasos son como una garantía de que la decisión tomada fue la adecuada.
En la práctica estos cinco pasos propuestos para realizar una prueba de bondad de ajuste se aplican con pequeñas variantes, que están determinadas por el tipo de distribución de probabilidad que asumimos tienen los datos obtenidos de la muestra y que deseamos probar que en realidad se comportan así:

Veamos como se realiza una prueba de bondad de ajuste.

APLICACIÓN No. 1

Prueba de Bondad de Ajuste para la Normalidad

Esta prueba sirve para determinar si un conjunto de frecuencias observadas coincide con un conjunto de frecuencias esperadas que tiene una distribución normal. Es decir, la pregunta a responder es: **¿Coinciden los valores observados de una distribución de frecuencia con los valores esperados según una distribución normal?** Ejemplo: Los fabricantes de una terminal de computadora reportan en su publicidad que la vida media de la terminal es 6 años, con una desviación estándar de 1.4 años. En una muestra de 90 terminales vendidos hace 10 años se encontraron los siguientes tiempos de vida (ver tabla).

Distribución del Tiempo de Vida de una Terminal de Computadora

Tiempo de Vida	f
Menos de 4	7
De 4 a 5	14
De 5 a 6	25
De 6 a 7	22
De 7 a 8	16
Más de 8	6

¿Puede concluir el fabricante, con un nivel de significancia del 5 %, que la vida de las terminales tiene una distribución normal?

Haremos una prueba de hipótesis siguiendo los cinco pasos que normalmente se dan.

Paso 1.- H_0: La distribución normal (z) es una buena descripción del comportamiento de la vida de las terminales de computación.

H_1: La distribución normal (z) no es una buena descripción del comportamiento de la vida de las terminales de computación.
$\alpha = 5\% = 0.05$

Paso 2. - * Tipo de prueba: un extremo (derecho).
* La distribución a usar: x^2 (ji-cuadrado).
* Valor crítico: x^2_D = **11.070**

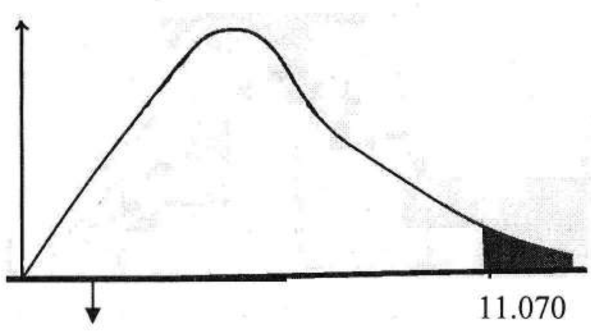
gl = # de clases – 1
= 6 – 1 = 5

Paso 3.- Aquí encontraremos las frecuencias esperadas y luego calculamos el x^2 práctico.

* **f_e=(área bajo la curva) n**

Tiempo de Vida (en años)	f	Asea bajo	f_e	$f_o - f_e$	$(f_0 - f_e)^2$	$(f_o - f_e)^2$
Menos de 4	7	0.0764	6.88	- 0.12	0.0144	0.0021
De 4 a 5	14	0.1625	14.65	- 0.63	0.3969	0.0271
De 5 a 6	25	0.2611	23.50	1.50	2.2500	0.0957
De 6 a 7	22	0.2611	23.50	- 1.50	2.2500	0.0957
De 7 a 8	16	0.1625	14.63	1.37	1.8769	0.1283
Más de 8	6	0.0764	6.88	- 0.88	0.7744	0.1126
	90				Σ	0.4615

Paso 4.- Se grafican los valores críticos (teóricos y prácticos)



Paso 5.- **¿Qué decisión sobre H_0 se toma?** Se acepta la **H_0**, significa que la distribución normal describe bien el comportamiento de la vida de una terminal de computadora.

APLICACIÓN No. 2

Prueba de Bondad de Ajuste para la Binomial

Se realiza esta prueba cuando deseamos saber si un conjunto de frecuencias observadas coincide con un conjunto de frecuencias esperadas que tiene una distribución binomial. En éste caso la pregunta que responderemos es la siguiente **¿Coinciden los valores observados u obtenidos de una distribución de frecuencia con los valores esperados según una distribución binomial?** Ejemplo: Marini Guifarri asegura poseer poderes psíquicos que le permiten adivinar correctamente el tipo de carta (diamantes, espadas, tréboles y corazones) escogida al azar con una probabilidad de 0.5.

Dado que las cartas se escogen aleatoriamente de una baraja es de suponer que las estimaciones de Guifarri son independientes. Se escogió una muestra aleatoria de 100 días en los que Guifarri hizo 10 estimaciones y se obtuvieron los siguientes resultados:

# de estimaciones correctas por día	0 – 2	3 – 5	6 – 8	8 – 10
Frecuencia del número de estimaciones correctas	50	47	2	1

Queremos saber si estas frecuencias obtenidas están distribuidas binomialmente con **n = 10 y p = 0.5** En este caso la prueba de hipótesis a realizar se plantea así:

Paso 1.- $\mathbf{H_0}$: Las estimaciones correctas de Guifarri se distribuyen binomialmente con **n = 10 y p= 0.5**

$\mathbf{H_1}$: Las estimaciones correctas de Guifarri no se distribuyen binomialmente con **n = 10 y P = 0.5** (tienen otra distribución).

$\alpha = 10\% = 0.1$

Paso 2.- * Tipo de prueba: un extremo (derecho).

* Distribución a usar: x^2 (ji-cuadrado).

* Valor crítico: x^2_D **= 6.251**

gl = K – 1 = 4 – 1 = 3

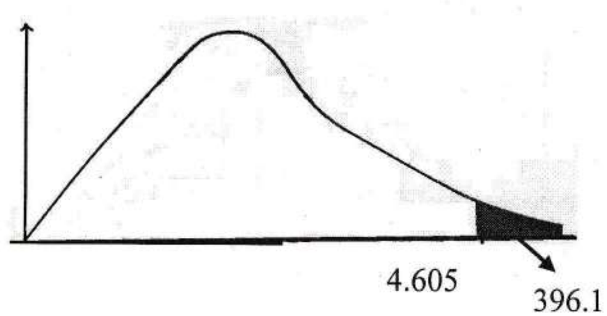
Paso 3.- Aquí se encuentran las frecuencias esperadas y luego se encuentra el χ^2 práctico.

# de estimaciones correctos por día	**F**	**Probabilidades Según la Binomial**	**f_e**
0 – 2	50	0.0547	5.47
3 – 5	47	0.5684	56.84
6 – 8	2	0.3662	36.62
9 – 10	1	0.0108	1.08

* Dado que la clase 9- 10 tiene una f_e =1.08 se suma a la anterior 6-8 y la tabla se transforma en la siguiente.

# de Estimaciones Correctas por día	f	Probabilidades s/ la Binomial	f_e	$f_o - f_e$	$(f_o- f_e)^2$	$\frac{(f_o-f_e)^2}{f_e}$
0 – 2	50	0.0547	5.47	44.53	1982.92	362.51
3 – 5	47	0.5684	56.80	- 9.84	96.83	1.70
6 – 10	3	0.3770	37.70	- 34.70	1204.09	31.94
					$\Sigma =$	396.15

Paso 4.- Se grafican los valores teóricos y prácticos.



* Observación: El valor crítico ya no es el del paso 2, porque eliminamos una clase (9-10). Por ello los **gl=3-1=2 y x^2_D = 4.605**

Paso 5.- **¿Qué decisión sobre H_0 se toma?** Se rechaza H_0.

Lo anterior indica que las estimaciones correctas de Guifarri no se distribuyen como la binomial.

El estimado lector se habrá dado cuenta que realizar pruebas de bondad de ajuste es relativamente fácil, siguiendo los cinco pasos propuestos, los he aplicado con mis alumnos y los resultados son alentadores.

BIBLIOGRAFIA

Haroldo Elorza (1999). Estadística para las Ciencias Sociales y del comportamiento. Editorial OXFORD, University Press, 2da. Edición

Douglas A. Lind y otros. (2004). Estadística para administración y Economía. Editorial Mc. Graw Hill, 3era. Edición

Wayne W. Daniel. Estadística con aplicaciones a las Ciencias Sociales y a la Educación Editorial Mc. Graw Hill, México. D.F.

Richard I. Levin y David S. Rubin (1996). Estadística para administradores Editorial Prentice-Hall. 6ta. Edición. México.. D.F.

Mendenhall y otros. Matemática con aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica.

John E. Freund y otros. (2000) Estadística Matemática con aplicaciones Editorial Prentice-Hall. 6ta. Edición.

PROBLEMAS NO RUTINARIOS

Mario Roberto Canales
Master Infieri en Educación Matemática

Recientemente, el Nacional Council of Teachers of Mathematics, NTCM, (1989,1995), ha identificado a la resolución de problemas como una de las metas mas importantes en el aprendizaje de la matemática. (Trigo, 1997, 4)

Pero a pesar de ello es muy común en la mayoría de libros que circulan en el sistema educativo nacional que los ejercicios al final de un tema sean todos idénticos, solo diferenciándose en las cantidades que se involucran en el mismo.

La basta literatura acerca del tipo de creencias que los estudiantes desarrollan acerca de las matemáticas y la resolución de problemas señala que en general, los procedimientos que utilizan los estudiantes funcionan tanto en los ejercicios de clase como en los que encuentran en la mayoría de libros de texto (Trigo, 1997,54) . Así, los procedimientos que emplean los estudiantes reflejan el enfoque y los alcances de los métodos estudiados en clase. (Trigo, 1997, 44)

Este representa un marco de una didáctica conductista que consiste en repetir los ejercicios, en enseñar como se establece la respuesta y en hacer producir las técnicas de conteo en asociaciones pregunta-respuesta hasta lograr una reproducción perfecta. (Brousseau, 2000, 12), dichos ejercicios proveen practica en ciertas técnicas matemáticas pero que " son todo menos problemas" estos todavía predominan en la enseñanza.

Para el alumno o la alumna es mucho mas económico y sencillo desencadenar una respuesta automática ante cierta clase de estimulo (sobre todo cuando se piensa que esto es hacer matemáticas) que buscar el significado relacionando los conceptos matemáticos con las operaciones. (Martí, 2002, 16)

Acerca de los profesores, se reportan estudios según los cuales, para enseñar matemática, los docentes no utilizan estrategias que privilegian la naturaleza esencial de esta disciplina (Gonzáles, 1998, 174) La ausencia de información de cómo los profesores entienden la resolución de problemas podría ser una de las razones de que la mejora de la enseñanza por este medio no haya tenido éxito . (Contreras y Carrillo, 1998, 28)

Los ejercicios o problemas que se ponen en practica a diario en nuestro sistema educativo son llamados rutinarios y son aquellos que al leerlos nos viene a nuestra mente un proceso algorítmico a seguir (Hitt, 2002, 13), son problemas cognitivamente triviales (Selden, Mason y Senden, 2002,1), los mismos estimulan el calculo rutinario, el mecanicismo, y la dependencia hacia una sola respuesta, separando la asociación entre la forma y significado (Martí, 2002,13).

Suelen ser económicos (ya que exigen poco esfuerzo mental), rápidas y aparecen como las únicas necesarias (Martí, 2002,17). Son métodos repetitivos, además de conducir a soluciones poco creativas, incapacitan al alumno muchas veces para resolver el problema por el hecho de no coincidir exactamente con los ejemplos ya utilizados en clase (Madruga, 2002,32). Esta percepción suele estar muy de acorde con la representación que se tiene de la matemática, que exigen aplicar unas reglas y que se ha de encontrar muy rápidamente.

Trigo (1997, 21) señala (citando a Perkins (1985)) que cuando la gente se enfrenta a una situación nueva, trata de aplicar conocimientos, habilidades y estrategias de otros dominios familiares. De hecho, la gente ignora lo nuevo en una situación asimilándola o transportándola a un esquema familiar.

En una investigación realizada por los autores Senden, Mason y Senden demostraron que los alumnos de calculo de la Universidad de Tenesse Technological con promedio de A,B no podían resolver problemas cognitivamente no triviales (no rutinarios), al respecto un problema no rutinario es aquel que al leerlo no viene a nuestra mente un proceso algorítmico, para resolverlo es necesario re-interpretarlo y seguramente las diferentes representaciones que se evoque al leerlo jugaran un papel fundamental para resolverlo (Hitt,2002,13).

Los problemas no rutinarios, tienen que ver con una pregunta que es desconcertante y difícil, están en las bases del hacer de los matemáticos y pueden utilizarse en contextos pedagógicos para propiciar una actividad de producción de sentido matemático.

Como la matemática es algo a realizar y construir, interesa mas la invención y descubrimiento; la actividad creativa es mas importante que el producto final formalmente establecido. (Castro, Rico y Castro, 1996,47). Aprender matemáticas, entonces es aprender a pensar (Kaplan , Yamamoto y Ginsbrurg, 1989,111) , es abstraer, inventar, probar y encontrar el sentido a las ideas matemáticas. (Trigo, 1995, 47)

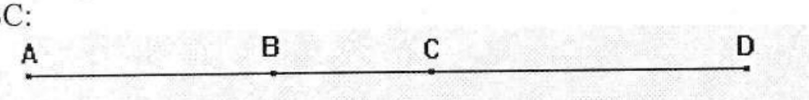
La creación matemática no consiste en hacer combinaciones nuevas con entes matemáticos conocidos; cualquiera podría hacerlo y la mayoría de estas estarían desprovistas de interés. Crear consiste en discernir, elegir aquellas pocas que son realmente útiles. (Poincare, 1995) (Placencia, Espinel, Dorta, 1998, 105)

El Nacional Council of Mathematics (1989) indica que las matemáticas son una disciplina donde el individuo experimenta, observa, descubre, conjetura, formula problemas y estudia patrones o relaciones en diversos contextos. En este sentido, se indica que el estudiante aprende matemáticas al desarrollar estas actividades en su experiencia cotidiana, tanto dentro como fuera del aula.

Al respecto, se puede señalar ejemplos de problemas rutinarios y no rutinarios:

Problema rutinario
La distancia del punto A al punto B es 10 km., y del punto B al punto C son 9 km. ¿Cuál es la distancia del punto A al B?

Problema no rutinario
En la figura las distancias son: AC = 10km., BD = 15 KM y AD = 22KM. Encuentre la distancia BC:



Problema rutinario
Resolver muchas multiplicaciones tales como: 3567 x 356

Problema no rutinario

María quiere saber cuánto valen A , B , y C en la siguiente multiplicación , si todos los dígitos son diferentes :

$$\begin{array}{c} A\ A\ B \times B \\ \hline C\ B\ 5\ B \end{array}$$

Dentro del enfoque holístico de los problemas no rutinarios, se pueden mencionar que estos estimulan:

El cálculo mental

Se entiende por cálculo mental una serie de procedimientos mentales que realiza una persona sin la ayuda de papel y lápiz, y que le permite obtener la respuesta exacta de problemas. Los procesos cognitivos involucrados en el cálculo mental son sustancialmente diferentes, en cuanto a la forma de visualizar el problema y construir la respuesta, con respecto al algoritmo de papel y lápiz. (Monchón y Román, 1995, 93)

Además el cálculo mental es constructivo, ya que el resultado final se construye mediante resultados parciales, de acuerdo con la estrategia elegida. (Monchón y Román, 1995, 98) , es variable; es decir , un mismo problema puede ser resuelto de muchas formas. (Monchón y Román, 1995, Pág. 98)

Este proceso puede proporcionar la base para comprender las razones detrás de los cálculos escritos y una apreciación más rica de los temas cruciales de la matemática, como el sistema de numeración, las habilidades de estimación e incluso los procedimientos algorítmicos. Hope (Citado por Kaplan , Yamamoto y Ginsbrurg, 1989,121) señala que puede ayudar a los niños a desarrollar un enfoque de creación de sentido en las matemáticas en lugar de una visión fragmentada caracterizada por la aplicación textual de técnicas sin sentido. , los niños llegan a valorizar y disfrutar del pensamiento matemático y abandonan la obsesión por obtener la respuesta correcta.

Pese a la utilidad del cálculo mental para resolver problemas matemáticos en la vida real y en la educación escolarizada media y superior, no ha sido utilizada propiamente como un recurso en la enseñanza de la matemática, donde principalmente se recurre a los algoritmos de lápiz y papel. (Monchón y Román, 1995, 93)

Estimación

El cálculo estimado no busca dar respuestas exactas a un problema, sino que su propósito es dar una respuesta cercana al resultado correcto de un problema. Es un tipo de cálculo apropiado en muchas situaciones de la vida diaria. (Monchón y Román, 1995, 93).

Visualización

Zimmermann y Cunningham (Citado por Hitt, 1998, 29) señalan que "visualizar un diagrama significa simplemente formar una imagen mental del mismo, pero visualizar un problema significa entenderlo en términos de un diagrama o una imagen visual. La visualización matemática es el proceso de formación de imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y el uso de tales imágenes en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento)

Sabemos de los trabajos de Eisenberg y Dreyfus (1990,43) que existe de parte de los alumnos una resistencia al uso de consideraciones visuales. Ellos señalan que hay un predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual, una de las causas es que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige pensar algorítmicamente; otra, es que los profesores promueven el pensamiento algorítmico sobre el visual.
Fernando Hitt (1998, 29) añade que el currículo escolar de matemáticas, en el que el logro es medido a través de resultados de los exámenes, favorece al pensador no visual y en la mayoría de los salones de clase la enseñanza enfatiza los métodos no visuales. Esto pudiera interpretarse como que los profesores de matemáticas no detectan a los buenos estudiantes que tienen habilidades para visualizar matemáticamente un problema no rutinario porque simplemente estos profesores no han tomado en cuenta esta habilidad matemática en los procesos de evaluación

Aprender matemáticas es un proceso que incluye el encontrar sentido a las relaciones, separarlas y analizarlas para distinguirlas y discutir sus conexiones con otras ideas.

Así pues los problemas no rutinarios, como se ha mencionado anteriormente estimulan el cálculo mental, la estimación y la visualización. Esto ayuda al descubrimiento de resolución de un gran problema, ya que en la solución de todo problema hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo.

Entonces, en vista de esto es necesario que el alumnado no solamente realice operaciones mecánicas, sino que también razone, es decir, que elabore sus propias estrategias. (Segarra, 2002, 38), No se trata de pensar que la matemática actual deja a un lado el calculo; todo lo contrario. De lo que se trata es de rechazar el cálculo rutinario sin comprensión de la realidad y aceptar el tratamiento de problemas realmente prácticos. (Segarra, 2002, 40)

Se debe de pensar igual que Korovkin (1965) : " para el alumno es mas útil resolver unos cuantos problemas difíciles que una gran cantidad de problemas sencillos".
De esta forma estaremos ayudando al estudiante a desarrollar su verdadero pensamiento matemático.

Referencias Bibliográficas

Trigo, Santos. 1997. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática, Grupo Editorial Iberoamerica, México ,.

Brousseau, Guy. 2000. Educación y didáctica de las matemáticas, Revista Educación Matemática, vol 12 n. 1 Grupo Editorial Iberoamerica., México.

Martí, Eduardo, 2002. La resolución de problemas en matemáticas, Comprensión matemática, forma y significado

Alonso, Gonzáles .1994. procesos cognitivos y meta cognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos. Revista educación Matemática, vol. 10, n. 3 , 1998, Grupo Editorial Iberoamerica., México.

Contreras y Carrillo, 1998. Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula, Revista Educación Matemática, vol. 10, n. 1 , 1998, Grupo Editorial Iberoamerica., México.

Hitt, Fernando (2002) Dificultades en el Aprendizaje del Cálculo. Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México.

Selden , Masón y Selden, (2002) Dificultades en el Aprendizaje del Cálculo. Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Capítulo 1. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México.

Madruga, J. (2002). "Resolución de problemas", (cap. 2) en La Resolución de Problemas en Matemáticas, Editorial Grao, España.

Trigo,Santos. 1995. ¿Qué significa aprender matematicas? Una experiencia con estudiantes de cálculo. Revista Educación Matematica, vol. 7, n. 1 , Grupo Editorial Iberoamerica., México.

Placencia, Espinel, Dorta,1998. Visualizacion y creatividad.Revista Educación matemática, vol. 10, n. 2 , Grupo Editorial Iberoamerica., México.

Monchón y Román,1995. Cálculo mental y estimación: métodos de una investigación y sugerencias para su enseñanza, Revista Educación Matemática, vol. 7, n. 3 , Grupo Editorial Iberoamerica., México.

Hitt, Fernando.1998. Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo..revista educación matemática, vol. 10, n. 2 , Revista Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamerica., México.

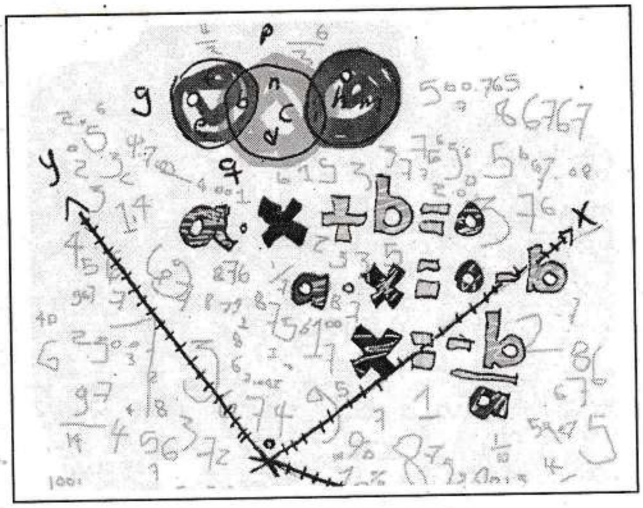
Castro, E. , Rico, L. & Castro, E. (1996). Números y Operaciones, fundamentos para una aritmética escolar. Editorial Síntesis. España.

Eisenberg , T. & Dreyfus , T. (2002). Sobre la resistencia en visualizar en Matemáticas ,Hanbook of International Research in Mathematics Education, Lawrence Earbaum Associates, Inglaterra.

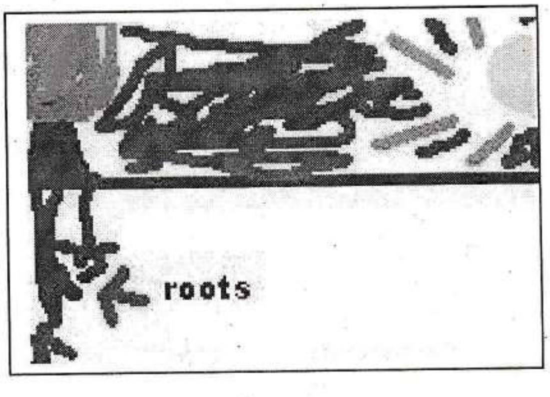
Kaplan, R. , Yamamoto, T. & Ginsburg, H. (1989) La enseñanza de conceptos matemáticos. (cap. 4) en Currículum y Cognición. Aique Grupo Editor. Argentina.

NCTM, (2000), Principles and Standards for School Mathematics 2000, Library or Congress Cataloguing, USA.

Segarra, Lluis, (2002), " Juego y Matemática" (cap. 3) en La Resolución de Problemas en Matemáticas, Editorial GRAO, España.



MATEMATICA BASICA



CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Mario Roberto Canales
Master Infieri en Educación Matemática

Es muy común en la escuela primaria y en el primer curso del ciclo común hablar de los criterios de divisibilidad. La totalidad de libros de circulan en nuestro medio que toca el tema de los números naturales, trae consigo este tema de los criterios de divisibilidad. No obstante solo presenta los criterios pero no su demostración.

Aunque la demostración esta afuera del alcance de los niños de estos niveles, el maestro debe de conocer su demostración, porque este debe de formar parte del acervo cultural matemático del docente.

Estos criterios se manejan de manera mecánica como "recetas", sin preocuparnos porqué funcionan (Sepúlveda y Tinóco, 2000, 82). Como consecuencia de esto los criterios no son bien aprendidos, ya que el sentido de unión de los mismos no se manifiesta de manera directa, así el estudiante puede aplicar el criterio del dos, pero probablemente tenga dificultades en aplicar el criterio del tres, ya que desconoce que pueda haber una relación entre los dos.

A continuación se demostraran los criterios del 2,3,y 5, luego se dará un teorema general de divisibilidad .

Definiciones:

a) Se dice que un número **a** es divisible por un número **b,** si existe un número **c** tal que **a= bc**. En este caso también se acostumbra a decir que " **b** divide a **a**", " **a** es dividido por **b**", o que " **a** es múltiplo de **b**". Esto se denotará **b \ a .**
b) El número entero positivo **a > 1** es primo, si sus únicos divisores son 1 y él mismo. Un entero que tiene otros divisores aparte del 1 y él mismo se denomina compuesto.

Dos resultados básicos

Proposición 1: Sean los enteros **a ,b ,c. c \ a y c \ b** entonces **c\(ma + nb),** para cualquiera enteros m y n.

Demostración:

1) Supongamos que **c\a** de acuerdo a la definición a) existe un número **m** tal que

   c = ma,

2) Además **c\ b** implica que existe un número **n** tal que **b = nc .**

3) sumando:

a + b **= mc + nc** (por 1 y 2)

= (m + n) c (propiedad distributiva)

4) Como **m** y **n** son entero positivo, entonces **m + n** también son enteros positivos (propiedad de la clausura para la suma de enteros)

5) Entonces por 3) **c** divide a **a + b** ya que existe un entero **s = m + n** tal que **a + b = sc**.

Proposición 2

Sea **p** un número primo, si **p \ ab** y **a** no es divisible entre **p** , entonces **b** es divisible entre **p**.

Demostración

1) por hipótesis **p\ab** implica (definición a) que existe un número **s** entero positivo tal que **ab = sc.**

2) Luego **s = at** , ya que **p** no divide a **a**.

3) Entonces, **ab = (at) c** sustitución de 2
= a (t c) propiedad asociativa del producto de enteros

luego:

b = tc propiedad cancelativa de enteros

4) Luego como **b = tc** entonces **c \ b.**

Criterios de divisibilidad

Un criterio de divisibilidad sirve para determinar si un número dado N es divisible entre otro número. Se enunciará los criterios de divisibilidad del 2 , 3 y 5 con sus respectivas demostraciones:

Proposición 3 (Criterio del 2)

N es divisible por dos si y solo si la cifra de las unidades es par.

Demostración.

Descompongamos N en potencias del 10, esto es :

$N = a_n\, 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + a_0$ donde a_0 es una cifra par $a_0 = 2n$, n entero

Entonces

$N = 10\,(a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \ldots + a_2 10^1 + a_1) + 2n$

Como $2 \backslash 10\,(a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \ldots + a_2 10^1 + a_1)$ ya que $10 = 2 \times 5$ se tiene :

$2 \backslash 2\,(5\,(a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \ldots + a_2 10^1 + a_1))$ y $2 \backslash 2n$
entonces por proposición 1, $2 \backslash (10\,(a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \ldots + a_2 10^1 + a_1) + 2n)$

Por lo tanto $2 \backslash N$.

Proposición 4 (Criterio del 5)

N es divisible por dos si y solo si la cifra de las unidades de N es cero ó 5.

Demostración.

Descompongamos N en potencias del 10, esto es :

Se nos presenta dos casos:

Caso 1

La cifra de unidades es 5

$N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ donde a_0 es 5

Entonces , $N = 10\,(a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \ldots + a_2 10^1 + a_1) + 5$

Como $2 \backslash 10\,(a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \ldots + a_2 10^1 + a_1)$ ya que $10 = 2 \times 5$ se tiene :

$2 \backslash 2\,(5\,(a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \ldots + a_2 10^1 + a_1))$ y $5 \backslash 5$

entonces por proposición 1, $2 \backslash (10\,(a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \ldots + a_2 10^1 + a_1) + 5)$

Por lo tanto $2 \backslash N$.

Caso 2

La cifra de unidades es cero.

$N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ donde $a_0 = 0$

$N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1$

Entonces, $N = 10\,(a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \ldots + a_2 10^1 + a_1)$

Como $2 \backslash 10\ (a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + ... + a_2 10^1 + a_1)$ ya que $10 = 2 \times 5$ se tiene :

$2 \backslash 2\,(5\ (a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + ... + a_2 10^1 + a_1))$

Por lo tanto $2 \backslash N$.

Proposición 5 (Criterio del 3)

Dado un número entero positivo N, entonces N es divisible entre tres si y solo sì la suma de sus cifras es divisible entre tres.

Demostración.

Descompongamos N en potencias del 10, esto es :

$N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$

$= a_n \underbrace{999\ldots9}_{\text{n-1 veces 9}} a_n + a_n + \underbrace{999\ldots9}_{\text{n-2 veces 9}} a_{n-1} + a_{n-1} ... + 99a_2 + a_2 + 9a_1 + a_1 + a_0$

$= 9\,a_1 + 99\,a_2 + 999\,a_3 + \ldots + 999\ldots9\,a_{n-1} + 999\ldots9\,a_n + a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

$= 9\,(a_1 + 11\,a_2 + 111\,a_3 + \ldots + 111\ldots1\,a_{n-1} + 111\ldots1\,a_n) + (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n)$

Como 3 divide a 9, entonces 3 divide a $9\,(a_1 + 11\,a_2 + 111\,a_3 + \ldots + 111\ldots1\,a_{n-1} + 111\ldots1\,a_n)$

Luego la proposición de que tres divide a N será cierta por la proposición 1 , si 3 divide a $(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n)$, que es la suma de las cifras que componen el número N.

A continuación se dará los criterios de divisibilidad de otros números , que no aparecen en cualquier libro y que algunas veces son desconocidos:

Proposición 6 (Criterio del 6)

Dado un número entero positivo N, entonces N es divisible entre 6 si y solo N es divisible entre 2 y 3.

Proposición 7 (Criterio del 8)

Dado un número entero positivo N, entonces N es divisible entre 8 si y solo el número formado por las últimas tres cifras de N lo es.

Proposición 8 (Criterio del 9)

Dado un número entero positivo N, entonces N es divisible entre 9 si y solo si la suma de sus cifras es divisible entre 9.

Proposición 9 (Criterio del 10)

Dado un número entero positivo N, entonces N es divisible entre diez si y solo N termina en 0.

Proposición 10 (Criterio del 11)

Dado un número entero positivo N, entonces N es divisible entre 11 si y solo si la diferencia de la suma de las cifras en posición impar de N menos la suma de las cifras en posición par de N es divisible por 11.

No se demostrará estas proposiciones , para que el lector intente hacerlas.

Una consecuencia inmediata de estos criterios, son aplicaciones como los siguientes:

1) Demostrar que el producto de tres números naturales consecutivos es divisible por 6.

Demostración:

Sean n , $n + 1$, $n + 2$ los tres números y designamos por P su producto, o sea
$P = n (n + 1) (n+ 2)$.
Como de los tres números naturales uno tiene que ser par, tenemos que al menos uno de los números n , $n + 1$, $n + 2$ es par, y por tanto, P es divisible por 2.
Entonces bastará probar que P es divisible por 3.
Consideremos lo siguiente:
Al dividir n por 3 los restos posibles son 0 , 1 , 2. Demostremos que en cada uno de estos casos, uno de los números n , $n + 1$, $n + 2$ es divisible por 3.
En efecto, si el resto es 0, esto significa que n es divisible por tres y también lo es P.
Si el resto es 1, esto significa que n es de la forma $3q + 1$, con q natural, pero $n + 2$ será de la forma $3q + 1 + 2 = 3 (q + 1)$, o sea que $n + 2$ es divisible por 3 luego también P. Por último si el resto es 2, n será de la forma $3 q + 2$, pero entonces $n + 1$ será divisible por 3 y también lo será P.

Por lo tanto como P es divisible entre 2 y 3 entonces P es divisible entre 6.

Un teorema general que puede describirnos la divisibilidad de un número (distinto de 2 y 5) por otro es el siguiente:

Teorema: Sea N entero positivo cuya representación es:

$N = a_n \, a_{n-1} \, a_{n-2} \ldots a_2 \, a_1 \, a_0 \quad \text{con } a_i \in \{0,1,2,3,4\ldots,9\} \; ; i = 0,1,2,\ldots,n$

Y **p** un primo diferente de 2 y 5. Sea **q** positivo tal que:

$10 \backslash (pq - 1) \qquad (1)$

$$K = \frac{pq-1}{10} \qquad (2)$$

Sean ahora:

$$M_1 = \frac{N - a_0}{10} \qquad (3)$$

$$N_1 = M_1 - Ka_0 \quad (4)$$

Entonces **p** divide a N si y solo si **p** divide a N_1

Ejemplo:

Sea N = 95361 y **p** = 3. Luego **q** será tal que al multiplicarlo por **p** , dé como resultado un número cuya cifra de las unidades sea 1; este es el significado de (1). Para nuestro ejemplo, **q** puede ser un número terminado en 7, el más pequeño de ellos es el 7 mismo. Tomaremos **q** = 7. En este caso:

pq - 1 = (3) (7) – 1 = 20

Así pues K = 2 , por (2). Luego por (3) :

$$M_1 = \frac{95361 - 1}{10} = 9536$$

Luego por (4) : $N_1 = 9536 - (2)(1) = 9534$ y la afirmación del teorema es que 95361 es divisible entre 3 si y solo si 9534 lo es.

Nótese que hemos reducido el problema a uno más simple , pero quizás todavía no alcanzamos a percibir directamente por "división a pie" , que 9534 sea divisible por 3, aplicando el teorema a éste número, tendremos que:

3 divide a 9534 si y solo si 3 divide a 953 – (2) (4) = 945
Nuevas aplicaciones del teorema nos dicen que:
3 divide a 945 si y solo si 3 divide a 94 – (2) (5) = 84
Y esto, si y solo si 3 divide a 8 – (2) (4) = 0.
Como 0 es divisible entre 3 , entonces 95361 es divisible por 3.

Bibliografía

1. Armando Sepúlveda López y José Gerardo Tinoco
Criterios de Divisibilidad en los enteros.
Revista Educación Matemática, Vol. 12 N. 3 Diciembre 2000.

2. Dr, Luis J. Davidson
Problemas de matemáticas elementales
Editorial Pueblo y Educación, 1987

3. María Luisa Pérez
Teoría de números
Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, 2003.

UNA EXPERIENCIA EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

Juan Carlos Iglesias Castañón
Master en Finánzas
Master Infieri en Educación Matemática

Una de las corrientes más fuertes, aunque no la más popularizada, en la enseñanza de la matemática es la metodología de resolución de problemas. Según G. Polya, una de las más importantes funciones del maestro es auxiliar a sus alumnos como guía permanente, lo cual es una tarea nada fácil; debido a que se requiere tiempo, práctica, dedicación y buenos principios; el estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible. Pero si se deja sólo frente a un problema, sin ayuda alguna o casi ninguna, puede que no progrese. Por otra parte, si el maestro ayuda demasiado, nada se deja al alumno, eliminando el mejoramiento de su creatividad.

Existen varios modelos de soluciones de problemas, pero el que quizás es más conocido es el modelo de Polya. Este modelo se basa en las observaciones que había hecho como profesor de matemática y en la obra de algunos psicólogos. Consta de cuatro etapas que dirigen la acción de quien se enfrenta a un problema, con el fin de ayudarlo a eliminar las discrepancias entre el objeto del problema y la solución de éste: comprender el problema, concebir el plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Existen otros autores que han agregados algunos otros pasos, pero esencialmente se apegan mucho al modelo de Polya, en esta dirección podríamos mencionar a: Schoenfeld y Miguel de Guzmán entre otros.

Pero no se pretende hablar de los distintos modelos, es más bien el deseo de solucionar un problema específico y presentar las diferentes etapas que se pueden dar en la mente de una persona normal. Para esto hemos seleccionado un problema de **MATHEMATIC MAGAZINE**, vol 77, No 5, Diciembre del 2004, publicada por la MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA (MAA). Este problema fue planteado por Steve Edwards y James Whitenton y dice lo siguiente:

$$\text{Sean } 0 < a\,, b < 1 \text{ evaluar } \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+b^{2^n}}{1+a^{2^n}}$$

Al encontrar un problema como este lo primero que se puede tratar de hacer es una expansión de la expresión para ver si se descubre algo. Al hacerlo obtenemos:

$$\cdots\frac{1+b^{2^{-3}}}{1+a^{2^{-3}}}\cdot\frac{1+b^{2^{-2}}}{1+a^{2^{-2}}}\cdot\frac{1+b^{2^{-1}}}{1+a^{2^{-1}}}\cdot\frac{1+b}{1+a}\cdot\frac{1+b^{2^1}}{1+a^{2^1}}\cdot\frac{1+b^{2^2}}{1+a^{2^2}}\cdot\frac{1+b^{2^3}}{1+a^{2^3}}\cdot\cdots$$

Claramente es posible ver que el problema original puede separarse en tres partes:

$$M_1 = \frac{1+b}{1+a}$$

$$M_2 = \frac{1+b^2}{1+a^2} \cdot \frac{1+b^4}{1+a^4} \cdot \frac{1+b^8}{1+a^8} \cdot \ldots$$

$$M_3 = \frac{1+b^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1+b^{\frac{1}{4}}}{1+a^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1+b^{\frac{1}{8}}}{1+a^{\frac{1}{8}}} \cdot \ldots$$

M_1 no tiene ninguna simplificación, sin embargo M_2 y M_3 parecen ser susceptibles a manipulaciones algebraicas. Si se inicia tomando M_2 se encuentra que:

$$M_2 = \frac{\left(1+b^2\right)\left(1+b^4\right)\left(1+b^8\right)\left(1+b^{16}\right)\ldots}{\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\left(1+a^8\right)\left(1+a^{16}\right)\ldots}$$

Esto lleva a una nueva pregunta: a qué es igual una expresión de la forma:

$$\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\left(1+x^{16}\right)\ldots$$

al desarrollar algunos casos, es lógico preguntarse si se llegará a algún resultado que pueda ser de utilidad. Realizando algunas de estas multiplicaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 1+x^2 \\
P_2 &= \left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right) = 1+x^2+x^4+x^6 \\
P_3 &= \left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right) = \left(1+x^2+x^4+x^6\right)\left(1+x^8\right) \\
&= 1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14} \\
P_4 &= \left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\left(1+x^{16}\right) \\
&= \left(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14}\right)\left(1+x^{16}\right) \\
&= 1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14}+x^{16}+x^{18} \\
&\quad +x^{20}+x^{22}+x^{24}+x^{26}+x^{28}+x^{30}
\end{aligned}$$

Es posible concluir que

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+x^{2^j}\right) = \sum_{i=0}^{2^n-1} x^{2i}$$

Para demostrar esto último es posible usar inducción matemática. Obviamente es válido para n = 1 . Si suponemos que es valido para k , es decir que

$$\prod_{j=1}^{k}\left(1+x^{2^j}\right)=\sum_{i=0}^{2^k-1} x^{2i}$$

Entonces se tiene que

$$\prod_{j=1}^{k+1}\left(1+x^{2^j}\right)=\left(\prod_{j=1}^{k}\left(1+x^{2^j}\right)\right)\left(1+x^{2^{k+1}}\right)=\left(\sum_{i=0}^{2^k-1} x^{2i}\right)\left(1+x^{2^{k+1}}\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{2^k-1} x^{2i}+x^{2^{k+1}}\sum_{i=0}^{2^k-1} x^{2i}=\sum_{i=0}^{2^k-1} x^{2i}+\sum_{i=0}^{2^k-1} x^{2i+2^{k+1}}$$

Si se considera únicamente la segunda de estas sumatorias se tendrá que:

$$\sum_{i=0}^{2^k-1} x^{2i+2^{k+1}}=\sum_{i=0}^{2^k-1} x^{2i+2^k\cdot 2}=\sum_{i=0}^{2^k-1} x^{2\left(i+2^k\right)}$$

Analizando las potencias de esta sumatoria se encuentra que cuando $i=0$ el término a considerar es $x^{2\left(2^k\right)}$, que es justamente la siguiente potencia a considerar en la primera de las dos sumatorias obtenidas (el término $x^{2\left(2^k-1\right)}$ es el último de la primera sumatoria). Si $i=2^k-1$ el término a considerar es $x^{2\left(2^k-1+2^k\right)}=x^{2\left(2^{k+1}-1\right)}$. De esto es posible concluir que:

$$\prod_{j=1}^{k+1}\left(1+x^{2^j}\right)=\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} x^{2i}$$

Con esto último es posible afirmar que

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+x^{2^j}\right)=\sum_{i=0}^{2^n-1} x^{2i}$$

Tomando el límite cuando $n\to\infty$ se obtiene

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+x^{2^j}\right)=\sum_{i=0}^{\infty} x^{2i}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(x^2\right)^i$$

Esta última es una serie geométrica y converge a $\dfrac{1}{1-x^2}$ si $x^2<1$. Con esto es posible calcular

M_2 , sabiendo por hipótesis que $0<a\,,b<1$ y puesto que anteriormente se tenía que:

$$M_2=\frac{\left(1+b^2\right)\left(1+b^4\right)\left(1+b^8\right)\left(1+b^{16}\right)\cdots}{\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\left(1+a^8\right)\left(1+a^{16}\right)\cdots}=\frac{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+b^{2^j}\right)}{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+a^{2^j}\right)}=\frac{\sum_{i=0}^{\infty}\left(b^2\right)^i}{\sum_{i=0}^{\infty}\left(a^2\right)^i}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{1-b^2}}{\dfrac{1}{1-a^2}}=\frac{1-a^2}{1-b^2}=\frac{(1-a)(1+a)}{(1-b)(1+b)}$$

Analizando en forma similar M_3 se tiene que

$$M_3=\frac{\left(1+\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt[4]{b}\right)\left(1+\sqrt[8]{b}\right)\cdots}{\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\cdots}$$

Similarmente al caso anterior, esto lleva a la pregunta: a qué es igual una expresión de la forma:

$$\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(1+\sqrt[8]{x}\right)\left(1+\sqrt[16]{x}\right)\cdots$$

Nuevamente al desarrollar algunos casos, es lógico preguntarse si se llegará a algún resultado que pueda ser de utilidad. Realizando alguna de estas multiplicaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left(1+\sqrt{x}\right)\\
P_2 &= \left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt[4]{x}\right)=1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\\
P_3 &= \left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(1+\sqrt[8]{x}\right)=\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right)\left(1+\sqrt[8]{x}\right)\\
&= 1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}\\
P_4 &= \left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(1+\sqrt[8]{x}\right)\left(1+\sqrt[16]{x}\right)\\
&= \left(1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}\right)\left(1+\sqrt[16]{x}\right)\\
&= 1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}+\sqrt[16]{x}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}}+x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}+x^{\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}\\
&\quad +x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}+x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}
\end{aligned}$$

Estas últimas parecen tener un patrón, si se pensara en representar las expresiones en forma siguiente:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 1+x^{\frac{1}{2}} \\
P_2 &= 1+x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{2}{4}}+x^{\frac{3}{4}} \\
P_3 &= 1+x^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{2}{8}}+x^{\frac{3}{8}}+x^{\frac{4}{8}}+x^{\frac{5}{8}}+x^{\frac{6}{8}}+x^{\frac{7}{8}} \\
P_4 &= 1+x^{\frac{1}{16}}+x^{\frac{2}{16}}+x^{\frac{3}{16}}+x^{\frac{4}{16}}+x^{\frac{5}{16}}+x^{\frac{6}{16}}+x^{\frac{7}{16}}+x^{\frac{8}{16}}+x^{\frac{9}{16}}+x^{\frac{10}{16}} \\
&\quad +x^{\frac{11}{16}}+x^{\frac{12}{16}}+x^{\frac{13}{16}}+x^{\frac{14}{16}}+x^{\frac{15}{16}}
\end{aligned}$$

Parece posible concluir en este punto entonces que

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+x^{\frac{1}{2^j}}\right)=1+x^{\frac{1}{2^n}}+x^{\frac{2}{2^n}}+\cdots+x^{\frac{2^n-1}{2^n}}=\sum_{i=0}^{2^n-1}\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)^i$$

Usando inducción matemática, nuevamente para demostrar este último punto. Es claro que es válido para $n=1$ y si se supone que se cumple para k, es decir:

$$\prod_{j=1}^{k}\left(1+x^{\frac{1}{2^j}}\right)=\sum_{i=0}^{2^k-1}x^{\frac{i}{2^k}}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{k+1}\left(1+x^{\frac{1}{2^j}}\right)&=\left(\prod_{j=1}^{k}\left(1+x^{\frac{1}{2^j}}\right)\right)\left(1+x^{\frac{1}{2^{k+1}}}\right)=\left(\sum_{i=0}^{2^k-1}x^{\frac{i}{2^k}}\right)\left(1+x^{\frac{1}{2^{k+1}}}\right) \\
&=\sum_{i=0}^{2^k-1}x^{\frac{i}{2^k}}+x^{\frac{1}{2^{k+1}}}\sum_{i=0}^{2^k-1}x^{\frac{i}{2^k}}=\sum_{i=0}^{2^k-1}x^{\frac{2i}{2^{k+1}}}+\sum_{i=0}^{2^k-1}x^{\frac{2i+1}{2^{k+1}}}
\end{aligned}$$

Analizando las potencias de estas sumatorias es posible observar que en la primera de estas solo contiene potencias pares de $x^{\frac{1}{2^{k+1}}}$, mientras la segunda posee únicamente impares. La última de estas potencias será $x^{\frac{2\left(2^k-1\right)+1}{2^{k+1}}}=x^{\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}}$. Esto produce que estas dos sumatorias se incluyan en una sola de la forma $\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}x^{\frac{i}{2^k}}$, es decir que:

$$\prod_{j=1}^{k+1}\left(1+x^{\frac{1}{2^j}}\right)=\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} x^{\frac{i}{2^{k+1}}}$$

Que es lo que se pretende demostrar. Usando estos últimos resultados es posible evaluar M_3, ya que

$$M_3=\frac{\left(1+\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt[4]{b}\right)\left(1+\sqrt[8]{b}\right)\cdots}{\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\cdots}=\frac{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+b^{\frac{1}{2^j}}\right)}{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+a^{\frac{1}{2^j}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(1+b^{\frac{1}{2^j}}\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(1+a^{\frac{1}{2^j}}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{2^n-1} b^{\frac{i}{2^n}}}{\sum_{i=0}^{2^n-1} a^{\frac{i}{2^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1-\left(b^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n}}{1-b^{\frac{1}{2^n}}}}{\dfrac{1-\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n}}{1-a^{\frac{1}{2^n}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b)\left(1-a^{\frac{1}{2^n}}\right)}{(1-a)\left(1-b^{\frac{1}{2^n}}\right)}$$

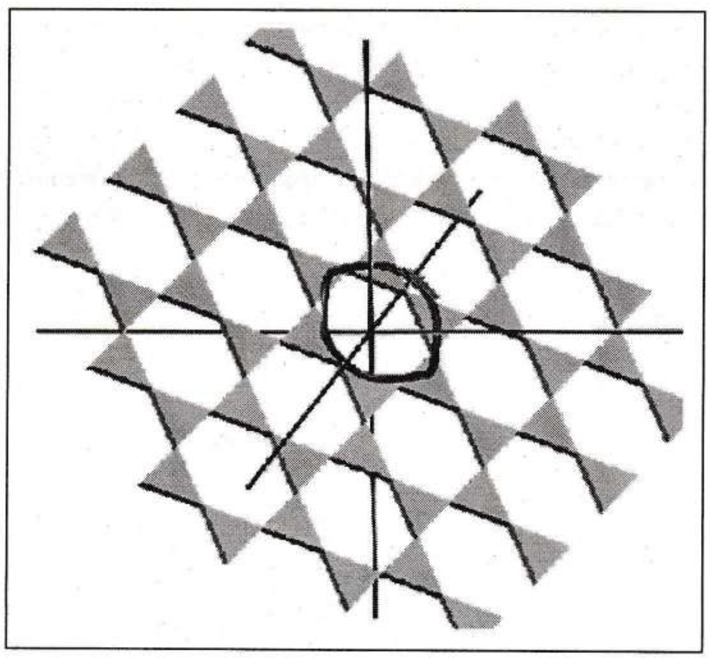
Usando la regla de L'Hopital para calcular este límite se encuentra que:

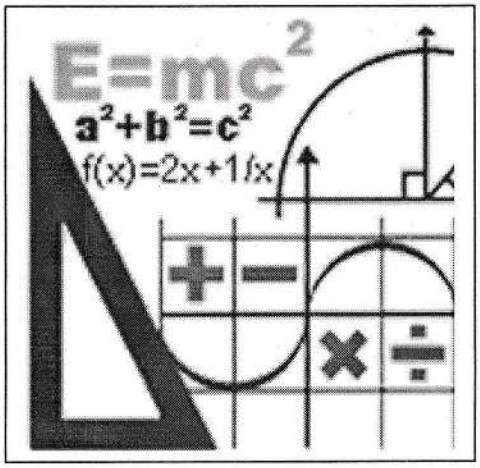
$$M_3=\frac{(1-b)}{(1-a)}\lim_{n\to\infty}\frac{-a^{\frac{1}{2^n}}\ln a\, 2^{-n}\ln 2}{-b^{\frac{1}{2^n}}\ln b\, 2^{-n}\ln 2}=\frac{(1-b)\ln a}{(1-a)\ln b}$$

Y el problema original se transforma en:

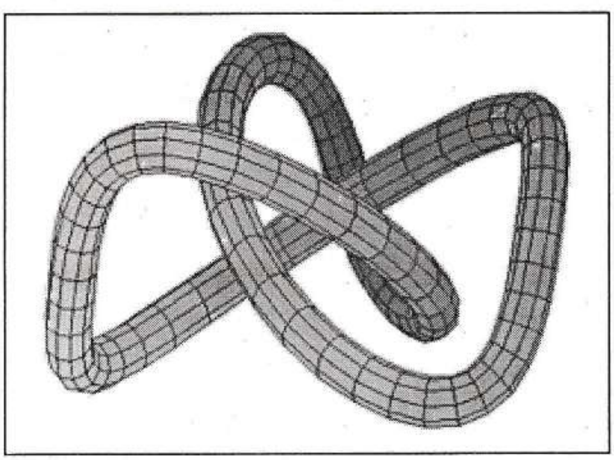
$$\begin{aligned}\prod_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1+b^{2^n}}{1+a^{2^n}}&=M_3\cdot M_1\cdot M_2\\ &=\frac{1+b}{1+a}\cdot\frac{(1-a)(1+a)}{(1-b)(1+b)}\cdot\frac{(1-b)\ln a}{(1-a)\ln b}\\ &=\frac{\ln a}{\ln b}\end{aligned}$$

Al analizar las estrategias presentadas aquí, debe quedar claro que se presenta un resumen de la solución, de hecho al solucionarlo se realizaron diferentes intentos y vías hasta encontrar lo que se ha publicado en este artículo. Además es posible observar los pasos propuestos por Polya: comprender el problema significo interpretar el producto infinito de términos y sus implicaciones; concebir un plan fue proponer dividir el problema en tres sub-problemas y atacar cada uno de estos por separado, en este punto es necesario mencionar los elementos que se utilizaron (inducción matemática, series de potencias, etc.) que es propiamente la ejecución del plan y la evaluación de la solución puede ser corroborada usando algún programa de manipulación algebraica o aproximando encontrando un producto finito de términos y comparando con el valor que produce una calculadora normal para la respuesta.





INVESTIGACION MATEMATICA



SITUACIÓNDE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL EN EL SEGUNDO CURSO DEL CICLO COMUN EN EL INSTITUTO JOSÉ TRINIDAD REYES DE LA CIUDAD DE SAN PERO SULA

Hermes Alduvín Díaz Luna
Master en Educación Matemática

1. INTRODUCCIÓN.

El sistema educativo hondureño está en crisis, sus formas tradicionales de enseñanza no han podido superar el bajo rendimiento escolar que manifiestan los estudiantes en la adquisición de conocimientos y en el desarrollo de habilidades, principalmente en las asignaturas de matemáticas y español.

De acuerdo con datos estadísticos proporcionados por la Dirección General de Educación Primaria del Ministerio de Educación Pública, las asignaturas de Español y Matemática son las que mayor porcentaje de reprobación presentan (10.79% y 10.15% respectivamente) en el nivel primario, lo cual es preocupante ya que dichas asignaturas constituyen el eje transversal sobre las cuales giran las demás disciplinas (Hernández, Martínez & Guillén, 1997: 47).

En relación con la educación media, vemos que en términos generales enfrenta problemas de calidad; a pesar de su rápido crecimiento poblacional, continua teniendo una cobertura baja pues del total de la población en edad escolar para este nivel solamente se atiende el 32% y, además, existe un alto grado de docentes sin título que representan el 68% de toda la población (SE-GTZ, 1997: 141). También, se carece de un programa sistemático y apropiado de supervisión y capacitación del personal docente y administrativo en todo el nivel medio de la educación hondureña.

Toda esta problemática educativa del nivel medio ha incidido en el rendimiento escolar; señalé anteriormente que existe un alto índice de reprobación en las asignaturas de Español y Matemática en el nivel primario, que tiene repercusiones en el nivel medio. La ausencia de estudios acerca de este aspecto es un problema de grandes consecuencias, ya que el desconocimiento de la realidad del acto educativo en el aula constituye un obstáculo para el mejoramiento del proceso enseñanza-aprendizaje.

Sin embargo, en un estudio sobre docentes del nivel de educación media efectuado por la UPNFM en 1992, se mostró que sólo el 32% de los profesores ostentaban el título de profesor de educación media, la mayoría graduados en la UPNFM; otros se habían graduado en la UNAH; y algunos en el extranjero. El resto, 68%, eran empíricos: distribuidos entre estudiantes de la UPNFM y la UNAH todavía sin titulo de profesor, 27%; profesionales de nivel universitario con formación en otras áreas, pero no en docencia, el 8%; y el 33% estrictamente empíricos que no estudiaban, que sólo habían recibido cursos de capacitación y que se mantenían en el nivel porque adquirieron derechos en su ejercicio de la docencia (SE-GTZ, 1997: 145).

Un punto de vista, ampliamente compartido entre los directores de institutos, acerca del rol asumido en las aulas por el docente de la educación media es que éste presenta características que responden a un modelo tradicional, verbalismo, verticalismo en relación maestro- alumno, acción didáctica centrada en el maestro, desconocimiento y falta de comprensión de la realidad del alumno, desvinculación entre planificación y evaluación (SE-GTZ, 1997: 146).

Con los resultados obtenidos en estos estudios, acerca de la pertinencia del proceso enseñanza aprendizaje en el nivel medio, puede plantearse que no existen las políticas educativas idóneas para ofrecer una educación de calidad a nuestros adolescentes que les permita estar preparados para la enseñanza superior y para ingresar al mundo laboral. Según Delors, la enseñanza secundaria en el presente siglo debe concebirse como un "eje" en la vida de cada individuo, pues es a través de ella que los jóvenes podrán realizarse en función de sus aficiones y aptitudes y, a la vez, podrán adquirir y desarrollar las capacidades de adaptación que les permita poder realizar su vida de adultos (Delors, 1996).

En este contexto educativo me propuse la siguiente **pregunta–problema** de investigación: **¿Qué estrategias didácticas son adecuadas para que el estudiante obtenga aprendizajes significativos en Álgebra Elemental?**

En el marco de esta problemática, pretendo mostrar el tipo de estrategias didácticas empleadas por los docentes en la enseñanza del Álgebra en el Instituto José Trinidad Reyes y establecer las relaciones entre estas estrategias y los aprendizajes significativos obtenidos por los estudiantes en el campo algebraico. Para hacer tal, me propuse el siguiente **objetivo general** de investigación:

a. Analizar las estrategias didácticas utilizadas por los docentes en la enseñanza del álgebra en relación con los aprendizajes significativos obtenidos por los estudiantes.

Igual, también me propuse alcanzar los siguientes **objetivos específicos** de investigación:

a. Identificar los tipos y características de estrategias didácticas utilizadas por los docentes de matemáticas en la enseñanza del Álgebra Elemental en relación con los aprendizajes significativos de los estudiantes.
b. Confrontar las estrategias didácticas utilizadas por los docentes con la didáctica, para establecer su grado de pertinencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra Elemental.
c. Preponderar las bondades del uso y/o aplicación de las estrategias didácticas utilizadas por los docentes en la enseñanza del Álgebra Elemental.

La justificación de la investigación la encuentro en los programas de la enseñanza de las matemáticas en el nivel secundario, el cálculo literal, es decir el cálculo que se realiza sobre expresiones que tienen letras y números, se introduce en segundo curso, posteriormente se enfoca el aprendizaje en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita y en los desarrollos y factorizaciones de expresiones algebraicas.

Se trata de calcular polinomios con una variable numérica, escritos en forma de combinaciones lineales de monomios con coeficientes reales o de productos de factores. En la práctica tradicional dentro del salón de clase, por lo general, este tipo de temas se trabaja a nivel de simbología, sin problemas que los hagan interesantes o le den sentido a los conceptos. Es un asunto de cálculo literal y no de cálculo algebraico presentado y tratado bien como prolongación del cálculo numérico, o como una serie de reglas a aplicar.

Con este enfoque son numerosos los errores que los estudiantes cometen y que a su vez escapan a los esfuerzos de los profesores por evitarlos o corregirlos. El presente trabajo de investigación tuvo, como **propósito** fundamental, realizar un diagnóstico previo de las metodologías utilizadas por los docentes en la enseñanza del Álgebra, relacionándolas con los aprendizajes de los estudiantes.

Con la realización de este trabajo de investigación se pretendió —y este es el **beneficio esperado**— identificar si el discurso pedagógico actual (el método tradicional) que emplean los docentes de matemáticas en el Instituto José Trinidad Reyes, permite que los alumnos se apropien de los conceptos algebraicos para ser utilizados como herramientas de trabajo en la solución de problemas. También se pretendió conocer si los aprendizajes que ellos obtienen son significativos.

Las limitaciones del estudio impidieron obtener mejores resultados; he aquí, algunas de ellas la renuencia de los docentes a ser entrevistados sobre su práctica docente, ya que ven en este tipo trabajo una forma de revelar sus debilidades o su falta de conocimiento sobre teorías didácticas. Después de haber entrevistado cinco docentes me vi en la necesidad de reformular las preguntas de la entrevista debido a que no se estaba recabando la información pertinente para la investigación (ver anexos A y B).

El **tipo de estudio** que realicé es descriptivo, transversal y contiene elementos evaluativos; el propósito fundamental fue mostrar las características de la metodología empleada por los docentes para la enseñanza del álgebra elemental. Además, se realiza una comparación entre las estrategias utilizadas por los docentes con el tipo de aprendizajes que los estudiantes obtienen con dichas técnicas o métodos de enseñanza. Las **categorías de análisis** que utilicé fueron dos: aprendizaje significativo y estrategias didácticas. El **aprendizaje significativo** es siempre el producto de la interacción entre un conocimiento previo activado y una información nueva. Es requisito esencial y condición necesaria para lograr ese aprendizaje disponer de técnicas y recursos que permitan activar los conocimientos previos de los alumnos para confrontarlos con la nueva información.

Las **estrategias didácticas** son las acciones y pensamientos de los alumnos que ocurren durante el aprendizaje, que tienen gran influencia en el grado de motivación e incluyen aspectos como la adquisición, la retención y la transferencia.

Los instrumentos **utilizados fueron dos: la entrevista y la prueba diagnóstica.** La entrevista **se aplicó a docentes: consistió en una serie de preguntas abiertas sobre las estrategias didácticas que ellos utilizan en la enseñanza del Álgebra en Segundo Curso de Ciclo**

Común. La finalidad era obtener información significativa sobre el discurso pedagógico que cada uno de estos docentes utiliza en el desarrollo de sus clases.

La prueba diagnóstica se aplicó a alumnos: esta prueba fue elaborada tomando como referencia un banco de ítem de precalculo del tipo opción múltiple elaborado por Foresman Scott. La prueba consistió en una serie de ejercicios y problemas sobre contenidos de Álgebra Elemental que han sido tratados en el salón de clases. La intención de este instrumento fue la obtener información sobre el dominio científico de aprendizajes significativos por parte del estudiante. La prueba evaluó cinco aspectos relacionados con el aprendizaje del Álgebra, cada una con cinco ítem:

a. Traducción del lenguaje común al simbólico (respuesta breve).
b. Traducción del lenguaje simbólico al común (selección única).
c. Expresar como ecuaciones proposiciones que están en lenguaje común (respuesta breve).
d. Despeje de una variable en un formula (selección única).
e. Problemas de aplicación (selección única).

Los **sujetos participantes** en este estudio lo constituyen los profesores del área de matemáticas que imparten clases en el Segundo Curso de Ciclo común de Cultura General, en el Instituto José Trinidad Reyes (IJTR) de la ciudad de San Pedro Sula y los alumnos de estos cursos.

El 50% de **los profesores** que laboran en el Segundo Curso del JTR tienen el título de Profesor de Educación Media en la especialidad de Matemáticas en el grado de licenciatura, egresados de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Todos los docentes poseen una experiencia mínima de 5 años en el nivel medio y sus edades oscilan entre 25 y 50 años.

Los alumnos que ingresan a el IJTR provienen en su mayoría de familias de bajos recursos económicos y culturales, hogares desintegrados (adolescentes que viven con tíos, abuelos, hermanos); son jóvenes que provienen de zonas marginales.

La selección de la población se hizo de manera intencional; ya que se seleccionaron todos los profesores que sirven la clase de Matemática en el Segundo Curso de Ciclo Común; los alumnos fueron seleccionados por muestreo aleatorio por conglomerado, primero se dividió la población en secciones y luego cada sección se dividió en dos grupos por sexo para luego sacar al azar un representante de cada subgrupo para tener un total de 32 estudiantes, de los cuales solo 31 realizaron la prueba.

En el **procesamiento y análisis** de los datos, en un primer momento, se extrajeron los testimonios de los docentes sobre las estrategias didácticas de enseñanza y aprendizaje que ellos utilizan para que sus estudiantes puedan apropiarse de los conceptos matemáticos; con esta información se elaboró un cuadro de doble entrada que refiere los testimonios comunes de los profesores sobre estrategias didácticas y recursos didácticos en función de los aprendizajes significativos de los estudiantes.

En un segundo momento se aplicó una prueba sobre la aprehensión de los conceptos matemáticos abstractos del Álgebra Elemental que conoce el alumno; se utiliza de nuevo un cuadro de doble entrada que facilita la interpretación del manejo científico del Álgebra Elemental.

Y en un tercer momento se hizo el análisis e interpretación desde la posición de los profesores y los alumnos sobre la influencia de las estrategias utilizadas por los docentes en los aprendizajes significativos de los alumnos.

2. MARCO TEÓRICO.

2.1. ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En este siglo caracterizado por los grandes avances tecnológicos, la educación no puede seguir operando bajo un esquema tradicional; y en el caso particular de la enseñanza de la matemática, se necesita cambiar de enfoque, ir de los contenidos memorísticos llenos de reglas y teoremas a situaciones prácticas como la solución de problemas. De esta manera el estudiante podrá visualizar el sentido de la matemática como una actividad humana e histórica cuyo objetivo principal es la solución de problemas, en contraposición a una estructura y lenguaje sin sentidos.

La aplicación de la teoría constructivista de Piaget en la enseñanza de la matemática ayudaría a vencer, en alguna medida, los obstáculos didácticos que actualmente existen en la enseñanza de esta disciplina; la teoría de Piaget plantea que el conocimiento implica creación y no simplemente reconocer los objetos. En esta medida, el estudiante necesita de secuencias didácticas que le permitan utilizar sus conocimientos previos para poder construir los nuevos. Se pretende pues realizar una combinación de la transmisión de elementos teóricos con la realización de actividades de aprendizaje por descubrimiento, lo cual permite al educando generar el conflicto cognitivo, elemento indispensable para explicar de una manera diferente una situación. "Se ha propuesto muchas veces el descubrimiento como la mejor manera de enseñar conceptos nuevos en matemáticas y otros campos" (Resnick & Ford, 1998: 175). Además, estos autores argumentan que también existen otras formas de incentivar el aprendizaje por descubrimiento (descubrimiento dirigido) que consiste en dirigir a los alumnos en todos los pasos y condiciones que llevan a una conclusión, pero dejándoles que la descubran o desentrañen por ellos mismos.

2.2. ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL

El contexto algebraico ha representado para los estudiantes serias dificultades en el manejo de algoritmos básicos de aritmética operatoria que fueron aprendidos de una manera concreta y es mayor la dificultad cuando esas operaciones son trasladadas al campo abstracto. Es común observar muchos errores de los estudiantes en la práctica escolar del cálculo algebraico (resolución de ecuaciones, desarrollo de productos en sumas y factorización de sumas en productos, etc.); dichos errores se enfatizan en el cómo pasar números que estaban en posición de coeficientes a la posición de potencia o viceversa, existe mala colocación de paréntesis y en el cambio de signos al pasar una expresión (número o letra) de un miembro al otro lado de la igualdad en una ecuación, más aún si se trata de efectuar una división o una multiplicación.

En un estudio realizado con estudiantes de 24 secundarias australianas cuyas edades oscilaban entre 11 y 15 años, MacGregor y Stacey (2000: 31) encontraron que los estudiantes hacen las siguientes interpretaciones equivocadas de las letras algebraicas:

a. Se le asigna un valor numérico relacionado con su posición en el alfabeto.
b. La letra tiene el valor de 1 a menos que se especifique otro.
c. La misma letra se usa para representar diferentes cantidades en una expresión o ecuación.

Además mencionan que la literatura describe otros dos comportamientos que se dan en Australia y otras partes del mundo.

d. La letra es percibida como una palabra abreviada (3c podría representar "tres gatos").
e. Se ignora la letra o se le asigna un valor numérico que sería razonable en el contexto (MacGregor & Stacey, 2000: 31).

Para ayudar a que el estudiante supere estas malas interpretaciones, Flores (1999: 70) propone que en la enseñanza del Álgebra se deben proponer situaciones específicas a los alumnos para desarrollar en ellos la habilidad de razonar sobre afirmaciones dentro de un conjunto de números, más que sobre afirmaciones acerca de números particulares. Además, enfatiza que los estudiantes necesitan desarrollar la habilidad para manejar símbolos para variables y no sólo con símbolos para números.

3. RESULTADOS.

En este capítulo, se presenta el resumen analítico de forma cualitativa; de la información obtenida en el diagnóstico (entrevista a maestros y prueba a alumnos); se contrasta las estrategias didácticas con los aprendizajes. Luego se hace un análisis general de los resultados contrastándolos también con los referentes teóricos del capítulo I.

3.1. ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS UTILIZADAS POR LOS PROFESORES DEL INSTITUTO JOSÉ TRINIDAD REYES DE LA CIUDAD DE SAN PEDRO SULA

En la primera columna del cuadro No. 1 se describen las estrategias de enseñanza-aprendizaje y la forma en que son concebidas por el docente.

Cuadro N. º 1:
Resumen de las estrategias de enseñanza aplicadas por 10 profesores del Institutos JTR de la ciudad de San Pedro Sula, Honduras

Estrategias didácticas según la percepción de los profesores.	Recursos Didácticos	Tipo de aprendizaje resultante
-Trabajo en grupo. *La dimensión de esta estrategia se basa en la oportunidad que el profesor le da al estudiante para que aprenda. Ese aprendizaje el estudiante lo logra porque parte de un ejercicio que posteriormente le permitirá definir un concepto.*	Uso de libro de texto y guías previamente diseñadas para adquirir y afianzar conceptos.	*Los estudiantes han aprendido con esta técnica y con estos recursos vagamente el concepto de ecuación.*
- La participación del alumno. *Mediante esta estrategia los docentes brindan al estudiante la oportunidad de generar algún tipo de aprendizajes y mantener la motivación sobre la temática.*	*-Construcciones de figuras geométricas. Para explicar el uso de las expresiones algebraicas en situaciones concretas de áreas, perímetros y volúmenes.*	*Los estudiantes lograron resolver problemas de aplicación de áreas, perímetros y volúmenes pero usando el método de ensayo y error.*
-Ilustración visual. *Los maestros utilizan esta estrategia visual como medio para despertar el interés y mantener la atención en la clase. También permite al estudiante relacionar situaciones concretas con un concepto determinado.*	Uso de láminas. *Para este fin utiliza ilustraciones de problemas reales.*	*El resultado de la prueba muestra que los aciertos de los estudiantes se dan más en la traducción del lenguaje común al algebraico.*
-Trabajo cooperativo. *Este tipo de estrategia la utilizan indistintamente como el trabajo en grupo* (ver p. 85) *ya que no hacen una distribución equitativa de trabajo y de las responsabilidades en la realización de tareas previamente diseñadas.*	*- Uso de libro de texto y guías previamente diseñadas para adquirir y afianzar conceptos.*	*En el desarrollo de la prueba los alumnos no manejan el concepto de ecuación y transposición de términos.*
-Activar conocimientos previos mediante pre-interrogantes, para introducir un tema nuevo. *Es una forma de confirmar lo que el alumno conoce, sin pensar en la utilidad de este conocimiento para adquirir el nuevo.*	*Láminas para recordar conocimientos anteriores.*	*La prueba muestra que los conocimientos previos que los estudiantes poseían no fueron determinantes para adquirir los nuevos conceptos.*
-Técnica de participación dialogada. *El docente percibe esta estrategia como el medio mediante el cual al estudiante se le puede brindar seguridad en el trabajo a través de actividades como*	*Láminas para recordar conocimientos anteriores.*	*Aunque no se puede percibir claramente en los resultados de la prueba, se intuye que la mayoría de los problemas aplicados fueron resueltos*

resolver ejercicios en el pizarrón, realizar preguntas al maestro sobre el tema, brindar sus propias opiniones, etc.		*por ensayo y error.*
-Los ejemplos como medios para llegar al concepto. *El maestro proporciona ejemplos de situaciones concretas para inducir al alumno en la formulación de conceptos. Esta técnica es muy poco usada ya que en la mayoría de los casos se utiliza en forma inversa, al proporcionar las definiciones y luego los ejemplos.*	*Utiliza ejemplos desarrollados en el libro de texto.*	*Los alumnos no poseen el mínimo dominio requerido sobre el manejo de ecuaciones algebraicas.*
-La pregunta como medio de aprendizaje. *El maestro ve esta técnica no como una forma de construir conocimientos, sino cómo una técnica de exploración en la mayoría de los casos sin conexión con el nuevo contenido.*	*El uso de la pregunta para explorar conocimiento.*	*El rendimiento de los estudiantes fue mejor en los aspectos memorísticos que en los de reflexión y análisis.*
-Resolución de problemas reales. *Todos los profesores utilizan los problemas de aplicación como el espacio donde el estudiante pueda aplicar conceptos operativos.*	*Libro de texto. Guías de estudio.*	*Los estudiantes resuelven problemas de la vida real pero no necesariamente utilizando ecuaciones.*
-Lectura dirigida para la apropiación de conceptos básicos. *Los docentes ven en esta técnica la oportunidad de que el estudiante pueda por sí solo resumir información teórica del libro de texto para memorizar conceptos.*	*Libro de texto*	*Los alumnos no manejan el concepto de ecuación.*

3.2. COMPETENCIAS EN ÁLGEBRA ELEMENTAL DE LOS ALUMNOS DE SEGUNDO CURSO DE CICLO COMÚN DE CULTURA GENERAL DEL INSTITUTO JOSÉ TRINIDAD REYES DE LA CIUDAD DE SAN PEDRO SULA

El cuadro No. 2 resume los aciertos obtenidos por los estudiantes en cada una de las categorías de la prueba diagnostica sobre conocimientos de álgebra elemental. Cada una de las categorías de la prueba constaba de cinco ítem, por lo que el número de aciertos posibles está comprendido entre 0 y 5 para la muestra de 31 alumnos, como se aprecia a continuación.

Cuadro N.º 2: Categorías de análisis de la prueba y aciertos de los estudiantes

Categorías		**Aciertos**						
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
C-1	Traducción del lenguaje común al simbólico.	11	12	5	2	1	0	31
C-2	Traducción del lenguaje simbólico al común.	0	7	8	16	0	0	31
C-3	Expresar como ecuaciones proposiciones que están en lenguaje común.	31	0	0	0	0	0	31
C-4	Despeje de una variable en una fórmula.	10	13	8	0	0	0	31
C-5	Resolución de problemas de aplicación.	5	6	13	5	2	0	31

Los maestros entrevistados evidenciaron falta de conocimientos sobre las teorías del aprendizaje, principalmente sobre el cognitivismo y la teoría socio-histórica. Llegan a confundir ciertos enfoques que dicen aplicar en sus situaciones de enseñaza y que, teóricamente, son términos opuestos. Esto está fundamentado en el hecho que el profesor de matemáticas poco o nada se ha interesado por adquirir este tipo de conocimientos, por lo general se preocupa solamente por la parte algorítmica. Un caso concreto es el uso que los maestros hacen de la técnica de trabajo cooperativo sin distinguirlo del trabajo en grupo (Ver cuadro No. 1).

Los resultados de este estudio muestran que los maestros, al no aplicar correctamente las estrategias de enseñanza, dificultan el aprendizaje de conceptos matemáticos básicos por parte del estudiante, provocando un desempeño deficiente en el planteamiento de ecuaciones y en la resolución de problemas, lo cual puede identificarse en los resultados generales de la prueba.
Una de las estrategias comúnmente usadas por los maestros para la enseñanza del álgebra es la participación del alumno, la cual consiste en la construcción de modelos geométricos que luego serán utilizados para el calculo de volúmenes, áreas y perímetros utilizando parámetros que faciliten la comprensión de estos conceptos; se toma en cuenta la participación de los alumnos en la resolución de ejercicios en la pizarra y en la resolución de guías de estudio en forma individual y grupal, tanto dentro como fuera de la clase.

Para la enseñanza de temas algebraicos es de gran utilidad el uso de ilustraciones que faciliten al estudiante la interpretación de una problemática concreta. Sin embargo, cuando estas ilustraciones no son brindadas por el docente, los estudiantes presentan grandes dificultades para hacer dichos esquemas, ya que por lo general no comprenden los datos del problema ni la respuesta solicitada.

Los resultados de la prueba muestran las bajas competencias que los alumnos poseen en la resolución de problemas, además ningún estudiante trazo un plan para abordarlos y resolverlos, lo cual pone en evidencia que no ha habido aprendizaje de tales conceptos y métodos.

El estudiante, en su proceso de aprendizaje, necesita utilizar instrumentos culturales, como el lenguaje escrito, algunas técnicas o estrategias de lectura comprensiva, de organización y relación de datos; pero en la entrevista se comprobó que los profesores asumen la lectura dirigida como una estrategia para la memorización de conceptos. En la práctica no existe conciencia sobre la potencialidad de esta estrategia para invitar al alumno a reflexionar o analizar situaciones específicas de contenidos o problemas. La carencia de estas actividades relevantes se puede observar en el bajo rendimiento de los estudiantes en el manejo de la categoría "expresar como ecuaciones proposiciones que están en lenguaje común"; los alumnos no tienen claro el concepto de ecuación, pues muchos de ellos expresaron correctamente los términos pero no escribieron la igualdad.

El aprendizaje escolar supone un proceso activo y no una recepción pasiva de conocimientos para la construcción de estos. De la entrevista realizada a los profesores, podemos asumir que con su práctica de enseñanza brindan muy pocas oportunidades al estudiante para que pueda manipular material concreto; únicamente utilizan material concreto cuando abordan los conceptos de áreas y volúmenes, para ello los estudiantes construyen

En la categoría de "traducción del lenguaje común al simbólico" se puede observar que de los 31 alumnos 11 no acertaron, 12 obtuvieron únicamente 1 acierto, 5 acertaron 2, 2 acertaron 3, 1 acertó 4 y ni un estudiante logro contestar correctamente todos los ítem; lo cual implica que los alumnos no manejan esta categoría.

En la "traducción del lenguaje simbólico al común" obtuvieron mayor rendimiento, ya que de los 31 estudiantes 7 acertaron solamente 1, 8 acertaron 2, 16 lograron 3 aciertos, mientras que ningún estudiante logró 4 ni 5 aciertos. Además, debemos hacer notar que en esta categoría todos los alumnos obtuvieron por lo menos un acierto.

En lo referente a la escritura de ecuaciones ningún alumno dio una respuesta correcta, evidenciando de esta manera que sus conocimientos sobre planteamiento de ecuaciones es nulo.

En cuanto al "despeje de una variable en una fórmula" los alumnos presentan grandes debilidades, ya que de los 31 alumnos a quienes se les aplicó la prueba, 10 de ellos no acertaron; 13 obtuvieron únicamente 1 acierto; 8, 2 aciertos; y ninguno logró acertar por lo menos 3.

En la "resolución de problemas" 5 no acertaron; 6 obtuvieron únicamente 1 acierto; 13 lograron 2; 5 acertaron 3; 2 acertaron 4; y ni un estudiante logró acertar los 5 problemas. Es de hacer notar que ningún alumno obtuvo el total de aciertos en al menos una categoría, con lo que se muestra que nadie maneja a cabalidad una categoría específica. Para visualizar mejor el rendimiento de los alumnos en esta prueba se elaboró un segundo cuadro que muestra el porcentaje de rendimiento obtenido en cada una de las categorías, así como el rendimiento global en la misma.

Cuadro N.° 3: Porcentaje de rendimiento de los estudiantes en cada una de las categorías

Categorías		Aciertos						
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**%**
C-1	Traducción del lenguaje común al simbólico.	11	12	5	2	1	0	20.6
C-2	Traducción del lenguaje simbólico al común.	0	7	8	16	0	0	45.8
C-3	Expresar como ecuaciones proposiciones que están en lenguaje común.	31	0	0	0	0	0	0.0
C-4	Despeje de una variable en una fórmula.	10	13	8	0	0	0	18.7
C-5	Resolución de problemas de aplicación.	5	6	13	5	2	0	35.5
TOTAL		57	38	34	23	3	0	24.1

Los porcentajes representados en cada categoría son independientes unos de los otros, ya que se han calculado tomando como base el número de respuestas correctas posibles para cada categoría; en este caso, como son 31 alumnos y cada categoría tiene 5 ítem, se tomó 155 como referencia.

La categoría en la cual los alumnos obtuvieron mayor rendimiento fue en la "traducción del lenguaje simbólico al común", alcanzando el 45.8%; seguida de la "resolución de problemas de aplicación" con un 35.5%; y en la que obtuvieron más bajo rendimiento (0%) fue en "expresar como ecuación proposiciones que están en lenguaje común".

En la "traducción del lenguaje común al simbólico" el rendimiento alcanzado fue de 20.6%; mientras que en el "despeje de una variable" obtuvieron un 18.7%. En términos generales, el mayor número de aciertos lo obtuvieron en categorías en las cuales la prueba estaba diseñada con el tipo de selección única, la cual presenta al alumno mayor facilidad de respuesta al proporcionarle pistas que le pueden ayudar a identificar la respuesta correcta, o a contestar al azar.

Esto se puede constatar en la tercera categoría en la cual se le pedía al estudiante escribir una ecuación que representara una proposición planteada en lenguaje común; en esta categoría no se le dieron posibles respuestas, evitando que el estudiante pudiera contestar usando el azar. En esta categoría el rendimiento fue de 0%, ya que ningún alumno logró escribir correctamente una ecuación.

Al hacer el análisis global de la prueba, y tomando como referencia el total de las respuestas correctas posibles, se pudo constatar que el rendimiento de los estudiantes fue de 24.1%, el cual es sumamente bajo, no alcanza los niveles mínimos de aprobación y muestra la gran debilidad que los alumnos poseen en el manejo algorítmico de los elementos básicos del Álgebra.

3.3. RELACIÓN ENTRE LAS ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS Y LOS APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS EN ÁLGEBRA ELEMENTAL DE SEGUNDO CURSO DE CICLO COMÚN DE CULTURA GENERAL DEL INSTITUTO JOSÉ TRINIDAD REYES DE LA CIUDAD DE SAN PEDRO SULA

El método de enseñanza descansa en el paradigma de la enseñanza tradicional, caracterizada por técnicas de enseñanza rutinaria y en los que los contenidos escolares son abordados de la siguiente manera: definiciones, conceptos, ejemplos y ejercicios para que el alumno repita pasos de una manera memorística en el despeje de una variable en una formula o en la solución de una ecuación. En este modelo, quedan por fuera las situaciones problemáticas concretas que podrían ayudar a contextualizar y descontextualizar los conceptos matemáticos para que el estudiante pueda apropiarse de ellos; esto puede observarse en los resultados de la prueba. Algunos estudiantes conocían la simbología de expresiones algebraicas, sin embargo fueron incapaces de utilizar dichos conceptos en la resolución de los problemas.

Los maestros utilizan algunas técnicas constructivistas de manera inconsciente en su práctica educativa, puede observarse que dichas estrategias no responden a un plan pre-establecido que conduzca al logro de objetivos; además, durante todo el proceso de enseñanza, el maestro hace uso de diferentes enfoques, usa indistintamente el método inductivo, el deductivo, el dialéctico-estructural y el enfoque constructivista en menor grado.

cuerpos geométricos. Limitan de esta manera las conexiones que el estudiante puede establecer entre los conceptos matemáticos y su propia realidad.

La adquisición de conceptos matemáticos puede ser ayudada mediante materiales especiales y cuestionamientos del profesor. Los resultados de la prueba evidencian que los maestros no conocen en su totalidad las estrategias didácticas y, por ende, hacen mal uso de ellos cuando las implementan en el aula. Además, los recursos y el material del cual disponen para el desarrollo de sus clases son escasos. Por ejemplo, se puede constatar que dentro de los ambientes de enseñanza–aprendizaje manejados por ellos en ningún momento se menciona el uso del laboratorio donde los estudiantes pudieran someter a prueba sus ideas, y observar qué soluciones funcionan mejor en un determinado problema.

Los alumnos no se enfrentan a situaciones problemáticas que los conduzcan a reflexionar sobre sus conocimientos, los conceptos y sus conexiones, para así poder desarrollar habilidades de pensamiento matemático que ayude a utilizar de manera correcta dichos conceptos matemáticos en el análisis o solución de problemas.

La pregunta como estrategia de aprendizaje puede servir de apoyo para los cuestionamientos del profesor a los aprendizajes para despertar el interés, motivar y construir conocimientos; pero en la realidad el profesor percibe esta estrategia como el medio para explorar conocimientos en la mayoría de los casos sin conexión con el nuevo contenido. Esto puede verificarse en los resultados de la prueba, los estudiantes manejan conceptos aislados. Por ejemplo, el rendimiento en la categoría de "traducción del lenguaje común al simbólico" fue más alto en relación con el obtenido en la categoría de "traducción del lenguaje común al algebraico".

La meta de cualquier estrategia es la de alterar positivamente el estado motivacional y afectivo del individuo, de tal manera que le permita desarrollar habilidades en aspectos como la adquisición, retención y transferencia. Las estrategias utilizadas por los docentes no han contribuido a potenciar estas habilidades en los estudiantes, el dominio algorítmico como el despeje de formulas presenta los más bajos niveles de rendimiento, a pesar de que el modelo de enseñanza con el cual han estado siendo instruidos tiene su fuerte en el manejo algorítmico de reglas y conceptos.

Cabe señalar que dentro los aciertos que obtuvieron los estudiantes en las distintas categorías no nos garantizan que los estudiantes las manejan a ese nivel, puede ser que dichos aciertos se dieron al azar. En las categorías que contenían ítem de opción múltiple acertaron una como mínimo y cuatro como máximo; sin embargo en la categoría de expresión de ecuaciones, en la que ellos tenían que elaborar la respuesta, no obtuvieron ningún acierto.

No existe un modelo de enseñanza sistemático sustentado en una teoría del aprendizaje para la enseñanza del álgebra elemental. Las estrategias didácticas utilizadas por los docentes no corresponden a un modelo de enseñanza definido, sino que son una combinación de varias teorías, las cuales son utilizadas de acuerdo a los criterios personales del docente. Por ejemplo, el trabajo en grupo -según la entrevista- es una técnica que todos los maestros utilizan para enseñar Álgebra; sin embargo, no es explotado como un espacio didáctico propicio para generar aprendizajes significativos; pues en su mayoría lo que hacen los estudiantes es resolver ejercicios rutinarios mecanizados propuestos por el profesor o la guía de trabajo, los cuales sólo favorecen el desarrollo de la memoria, desfavoreciendo el crecimiento de niveles de pensamiento más altos. Otra de las estrategias didácticas más usadas es la exposición magistral, utilizada para transmitir los elementos teóricos, seguida por el trabajo grupal, espacio que sirve a los estudiantes para resolver ejercicios rutinarios a través de la mecanización. El uso de tales estrategias no ha posibilitado un aprendizaje significativo del Álgebra en los alumnos de segundo curso de ciclo común ya que la enseñanza tradicional de las matemáticas los ha enmarcado en la idea de que ésta última es un conjunto de reglas a aplicar en el desarrollo de ejercicios.

El aprendizaje alcanzado por los alumnos sobre conceptos algebraicos mediante las estrategias didácticas empleadas por los docentes no es significativo, pues en la forma en que se implementan no permiten que el estudiante experimente y confronte hechos, el alumno se comporta como un receptor de información que tiene que ir acomodando de acuerdo a sus capacidades memorísticas sin llegar a la comprensión de los conceptos y operaciones algebraicas. El tipo de aprendizaje que alcanzan con estas estrategias didácticas, tal como lo muestran los resultados de la prueba, es descontextualizado y fragmentado; pues los estudiantes no utilizaron el concepto de ecuación lineal para resolver los problemas, sino que utilizaron otros métodos de solución. Además, en términos cuantitativos, su nivel de aprendizaje es bajo: ninguno de los aspectos evaluados alcanzó el nivel mínimo de aprobación.

La resolución de problemas no es utilizada como una estrategia didáctica para el aprendizaje de conceptos algebraicos, los problemas que plantea el maestro son simples ejercicios algorítmicos, en los que las competencias del alumno no van más allá de la simple operatoria algorítmica. En algunas ocasiones aparecen al final de cada tema problemas de aplicación en los que el estudiante tiene que aplicar el conocimiento que el profesor le ha transmitido, que muchas veces no se ha comprendido tal como lo muestran los resultados de la prueba.

Los profesores de matemáticas del Instituto José Trinidad Reyes deben capacitarse en el conocimiento de las tres teorías del aprendizaje (conductismo, cognitivismo y la teoría socio–histórica) más utilizadas en los procesos actuales de enseñanza-aprendizaje.

Revisar los programas de matemáticas con el fin de dosificar contenidos y organizarlos en función de conceptos nodulares fundamentales. Por ejemplo, eliminar temas que ya se trabajaron en primer curso como las fracciones y los números decimales y que aparecen en el programa de segundo curso; ello permitiría disponer de mayor tiempo en la generalización de las operaciones aritméticas en el contexto del Álgebra.

Crear los espacios para que los estudiantes mediante el trabajo individual y de equipo, descubran y construyan sus propios aprendizajes. Por ejemplo, diseñar modelos de enseñanza en base a la resolución de problemas con ayudas didácticas y en los que el profesor sea un facilitador y un guía en la búsqueda del conocimiento.

Utilizar hojas de trabajo para la experimentación y aprehensión de conceptos matemáticos mediante la resolución paulatina de problemas sencillos para después ir presentando problemas más complejos en la medida que los estudiantes vayan desarrollando sus habilidades.

4. CONCLUSIONES

- Para facilitar el aprendizaje de las matemáticas y, específicamente, del Álgebra Elemental, es indispensable que los estudiantes hayan desarrollado sus estructuras verbales y que a su vez, estas estructuras verbales observen las estructuras lógicas del pensamiento. En esa medida, las estructuras verbales se convertirán en habilidades lectoras, mucho más específicamente, en comprensión lectora, de tal manera que puedan interpretar y estructurar correctamente la simbología matemática.

- Tradicionalmente, la enseñanza de las matemáticas ha sido expositiva y deductiva; ha recurrido a la transmisión y repetición de reglas y teoremas (conductismo), ha olvidado la solución de problemas prácticos, le ha dado mayor importancia a la prueba formal de conceptos y le ha quitado importancia a la aplicabilidad de los conceptos. Producto de todo ello, los estudiantes aprenden a aplicar algoritmos generales, pero fallan en la interpretación y análisis de los resultados en situaciones específicas. La solución de problemas como método de enseñanza de las matemáticas prepondera el descubrimiento como el espacio que le permite al estudiante experimentar por sí mismo los conflictos cognitivos y asimilar los conceptos nuevos.

- Los docentes reconocen que el problema fundamental de la enseñanza del Álgebra Elemental es metodológico, mucho más en los primeros niveles de secundaria. Los estudiantes experimentan serias dificultades para convertir algoritmos básicos de aritmética operatoria aprendidos concretamente, en generalizaciones abstractas, para hacer transposiciones de términos, para establecer relaciones de equivalencia y de igualdad y para descomponer linealmente expresiones compuestas. Los estudiantes tienen problemas para usar modelos algebraicos (no identifican correctamente las variables, no las relacionan); utilizan cálculos independientes, parten de lo conocido, y piensan y operan con números específicos para buscar la respuesta.

- Los docentes conducen el proceso de enseñanza-aprendizaje de acuerdo a criterios personales y utilizan únicamente la pizarra, el libro de texto y las guías de ejercicios como recursos didácticos. Con la metodología utilizada por los docentes no se desarrollan habilidades en los estudiantes para la resolución de problemas, como tampoco se promueven aprendizajes significativos que conduzcan a generar nuevos conocimientos. El trabajo grupal es una técnica predominante en el trabajo de aula; sin embargo, no es explotado como un espacio didáctico propicio para generar aprendizajes significativos; pues en su mayoría lo que hacen los estudiantes es resolver ejercicios rutinarios mecanizados propuestos por el profesor o la guía de trabajo, los cuales sólo favorecen el desarrollo de la memoria, desfavoreciendo el crecimiento de niveles de pensamiento más altos.

- El rendimiento de los estudiantes en las competencias básicas del Álgebra Elemental no es satisfactorio. Comparando el rendimiento entre las categorías evaluadas, se puede deducir que la construcción de modelos algebraicos (ecuaciones) para resolver problemas es otra de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes, ya que la mayoría de las veces no logran identificar correctamente las variables y mucho menos establecer las relaciones entre ellas de tal manera que puedan estructurar correctamente la ecuación que les permita encontrar la solución del problema. El rendimiento de los estudiantes fue de 24.1%, el cual es sumamente bajo, no alcanza los niveles mínimos de aprobación y muestra la gran debilidad que los alumnos poseen en el manejo algorítmico de los elementos básicos del Álgebra.

- Los maestros entrevistados evidencian falta de conocimientos sobre las teorías del aprendizaje, principalmente sobre las más conocidas como el conductismo, el cognitivismo y la teoría socio-histórica. Confunden ciertos enfoques que dicen aplicar en sus situaciones de enseñaza y que, teóricamente, son términos opuestos. La falta del componente didáctico en el desarrollo de los contenidos del Álgebra Elemental, dificulta el aprendizaje de conceptos matemáticos básicos por parte del estudiante, provocando un desempeño deficiente en el planteamiento de ecuaciones y en la resolución de problemas. Para la enseñanza de temas algebraicos es de gran utilidad el uso de ilustraciones que faciliten al estudiante la interpretación de una problemática concreta. Sin embargo, cuando estas ilustraciones no son brindadas por el docente, los estudiantes presentan grandes dificultades para hacer dichos esquemas, ya que por lo general no comprenden los datos del problema ni la respuesta solicitada.

BIBLIOGRAFÍA

Agudelo Valderrama, Ana Cecilia (1995)."Mejorando el Currículo Nacional de Matemática en Colombia: Matemáticas para todos", ***Educación Matemática***, vol. 7, N.° 2, GEI, agosto,.

Alanis, J., (1996), ***La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo. Tesis doctoral***, editorial CINVESTAV–IPN, México D.F.

Albert, J. A. (1996), "Fundamentación teórica de la didáctica. La escuela francesa" (cap. 3) en ***La convergencia de series en el nivel superior. Una aproximación sistémica*** (tésis doctoral), CINVESTAV–IPN, México, pp. 50–64.

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A., Laurentiev, M. & otros, ***La Matemática: su contenido, método y significado***, Alianza Editorial.

Alvarado, M. & Suazo, M. (2001), "Aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas en octavo grado del CIIE–UPNFM. Informe de investigación", Tegucigalpa.

Antibí, A. (2000), ***Didáctica de las matemáticas. Métodos de resolución de problemas***. «CABECAR», 2.ª ed., Universidad de Costa Rica.

Antonio, J. (2002), "La didáctica de las matemáticas. Una visión general", http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/didmat.htm

Artigue, M. & otros (1995), *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Iberoamericana, México, 97-140.

Assude, Teresa (1995), "Transposición didáctica y morfogénesis didácticas: la denominación como indicio de las formas", ***Educación Matemática***, vol. 7., N.° 2, GEI, agosto, 1995.

Boyer, C. (1999), ***Historia de la matemática***, Alianza Editorial (traducción de *Didactique des Mathématiques*), pp. 33-115.

Carrasco, J. (1997), ***Hacia una enseñanza eficaz***, Ediciones RIAP, Madrid.

Carretero, M. (1993), ***Constructivismo y educación***, Editorial Luis Vives-Aique Grupo Editor.

Castelnuovo, E. (1990), ***Didáctica de la matemática moderna***, 2.ª ed., Trillas, México, (reimp. 2001).

Chahar, B. (2003), "Modelos de los procesos de los errores de álgebra en el nivel medio", http://www.unt.edu.ar/fbioq/cmat/berta.htm.

Chevallard, Y. (1991), ***La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado***, Aique Grupo Editor, Argentina, pp. 25-44.

Coll, C. (1997), ***¿Qué es el constructivismo?***, «Colección b Magisterio 1», Magisterio del Río de la Plata, Buenos Aires.

Coriat, M. (1997), "Cultura, educación matemática y currículo" (Cáp. 3) en de Guzmán, Miguel & Rico, Luis, ***Bases teóricas del currículo de Matemáticas en Educación Secundaria***, Editorial Síntesis, S.A.

De Guzmán, M. (2001), ***El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del análisis***, Ediciones Pirámide (Grupo Anaya), 1996, 1997.

Delors, J. (1996), ***La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XX1***, Librería correo de la UNESCO.

Díaz, F. & Hernández, G. (1998), ***Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista***, McGraw- Hill Interamericana.

Douady, R. & otros (1995), ***Ingeniería didáctica en educación matemática***, Iberoamericana, México, pp. 61-96.

Flores Peñafiel, Alfinio (1999), "Las representaciones geométricas como medio para cerrar la brecha entre la Aritmética y el Álgebra", ***Educación Matemática***, vol. 11, N.º 3, GEI, diciembre, 1999, pp. 69-78.

Frabboni, F. (1999). "Un manifiesto pedagógico de la educación ambiental. Por qué y cómo el medio ambiente en la escuela" en ***Volver a pensar la educación***, vol. II, Editorial Morata, Madrid.

Gage, N. & Berliner, D. (1990). Educational Psychology, fourth edition.

Gascon, P. (1996), "The Didactics of Mathematics as the Science of the Art of Studying" en Malara, N. (Ed.), ***An International View on Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline***, ICME 8, Seville.

Gómez Alfonso, Bernardo, "Mecanismos de una falta de competencia en cálculo mental. Un estudio en la formación de maestros. Universidad de Valencia España", ***Educación Matemática***, vol. 8, N.° 1, GEI, abril, 1996, Grupo Editorial Iberoamericana.

Gómez, Adriana "Teorías del Aprendizaje. ¿Cómo se adquieren los conceptos?", Escuela Técnica Superior en Conducción de Servicios Educativos. Directivo y Docente de la Escuela Tecnológica Nº.6 de Avellaneda. http://www.monografias.com/trabajo5/teap/teap.shtml#condu.

González, O. & Flores, M. (2000), ***El trabajo docente. Enfoques innovadores para el diseño de un curso***, editorial Trillas.

Gutiérrez, A. (2000), "Aportaciones de la investigación psicológica al aprendizaje de las matemáticas en secundaria", ***Uno. Revista de didáctica de las matemáticas***, N.24, abril de 2000, pp 23–33.

Hernández, R., Martínez, B. & Guillén, R., "Estudio comparativo de los conocimientos sobre Aritmética y Geometría de los estudiantes de último año de las escuelas normales y alumnos de sexto grado de las escuelas primarias del sistema educativo nacional", ***Revista Paradigma***, N° 7, año 6, Dirección de Investigación-UPNFM, 1997.

IREM-Universidad Paris 7 Denis Diderot (2001), "Cambio de marco" en ***Actas de la Jornada en Homenaje a Regine Douady***, editorial IREM, París.

Kieran, C. (1994), ***El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar*** (traducción de Mesa, Vilma Maria, 1994. "Una empresa docente".

MacGregor, Mollie & Stacey, Kayne, "Incógnitas con valores cambiantes y múltiples referentes en el álgebra de alumnos", Universidad de Melbourne, ***Educación Matemática***, vol. 12, N.° 3, GEI, diciembre, 2000, pp. 30-31.

Membreño, Truman (1999), "Experiencias de aprendizaje en la enseñanza de la matemática y un enfoque sobre el paradigma de la matemática", ***Revista Paradigma***, N.° 9, año 8, Dirección de Investigación-UPNFM, 1999.

Méndez, H, (2000), "Teorías del aprendizaje", Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), www.ruv.itesm.mx/cursos/ege/ene2002/spc/ed98150/cerrada/instruc_conductismo_ensayo.htm

Monereo, C. (1998), ***Estrategias de enseñanza y aprendizaje***, Barcelona, Graó, pp.75-97.

Ortiz, F. (2001), ***Matemática. Estrategias de enseñanza***, Editorial Pax, México.

Otero, María Rita, Elichiribehety, Ines & Roa, Magdalena, ***El tratamiento dado a las ecuaciones en los textos, ¿tiene en cuenta a los alumnos?***, Departamento de Formación Docente-Facultad de Ciencias Exactas-Universidad Nacional del Centro, ***Educación Matemática***, vol. 12, N.° 3, GEI, diciembre, 2000.

Peltier, Marie-Lise (1999), ***Representaciones de los profesores de la escuela primaria sobre las matemáticas y su enseñanza***, Institut Universitaire de Formation de Maitres, Francia (traducción de Carvajal Juárez, Alberto), ***Educación Matemática***, vol. 11, N.° 3, Grupo Editorial Iberoamericana, diciembre, 1999.

Perero, M. (1994), ***Historia e historias de Matemáticas***, Grupo Editorial Iberoamericana.

Piaget, J. (1973), *Structuralism*, Harpet & Row, New York.

Polya, G. (1965), ***Cómo plantear y resolver problemas***, 14.ª ed., editorial Trillas, (reimp. 1987).

Pozo, J. I. (1999), ***Aprendices y maestros. La nueva cultura del aprendizaje***, Alianza Editorial, Madrid, 1996, 1998, 1999.

Radford, L. (1999), "El aprendizaje del uso de signos en Álgebra. Una perspectiva pos –vigotskiana", ***Educación Matemática***, vol. 11, N.° 3., GEI, diciembre, pp. 25-53.

Resnick, L. & Ford, W. (1998), ***La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos***, Ministerio de Educación y Ciencia-Paidós.

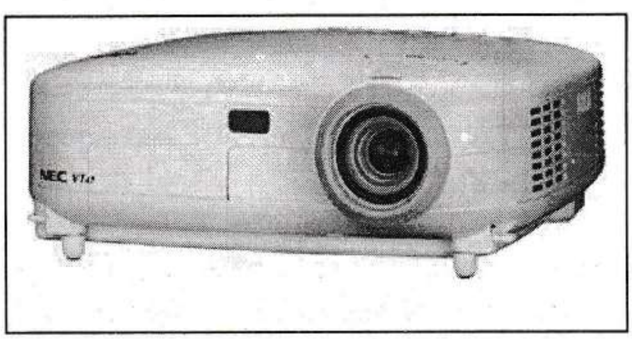
Robinet, J. (1984), ***Ingeniería didáctica (del nivel elemental al superior)***, Editorial. These de doctorat D' etat, Université de Paris VII Denis Didedot, pp. 1-16.
SE & GTZ, ***Educación y desarrollo. Estudio sectorial. Plan decenal***, Tegucigalpa, 1997.

Solso, R. (1998), Cognitive Psych, Allyn and Bacon, Needham Heigths, Ma.
Tarifa, L. (2002), ***Didáctica de la Matemática*** (material de estudio, compilación y textos), Honduras, 2002.

Trigo, Manuel Santos, "Qué significa que un estudiante aprenda matemáticas. Una experiencia con estudiantes de cálculo", ***Educación Matemática***, vol. 7, N.°1, GEI, abril, 1995, p.47.

Woolfolk, A. (1999), ***Psicología Educativa***, Prentice Hall, México.

TECNOLOGIA EDUCATIVA



LA COMPUTADORA COMO INSTRUMENTO PEDAGOGICO

Rafael Eduardo Pacheco
Rafael Antonio Hernández
Masteres en Educación Matemática

En los ambientes de aprendizaje llevados a cabo de forma sistemática, se ha comprobado que existe un vínculo directo entre lo cognitivo y lo técnico, de tal manera que favorece la construcción del conocimiento. De esta forma, los avances tecnológicos han dado a la computadora un protagonismo de primera como instrumento pedagógico que permite al individuo acceder a grandes cantidades de información y al mismo tiempo facilitarle la comprensión de contenidos particularmente complejos, promoviendo en ellos el desarrollo de ciertas competencias.

En este sentido, se puede aprender sobre la computadora, desde la computadora y con la computadora. Aprender con la computadora, señala la SEG**, es ubicarla como herramienta no como contenido. Con esta estrategia se busca desarrollar habilidades metacognitivas y valorativas para propiciar en los alumnos un aprendizaje cooperativo donde tengan una participación más activa para adquirir conocimiento. (Alvear y otros, 2000:45)

Esto situación hace que hayan diversos tipos de programas que potencian el aprendizaje de la matemática en los alumnos, algunos de ellos son, DERIVE, MAPLE, CABRI y MATHCAD, entre otros. En esta oportunidad queremos dar una muestra del uso de CABRI como un recurso valioso en la comprensión de conceptos geométricos. Para ello se da a conocer la forma de calcular el área de un polígono irregular, visualizando la variación de la misma si se movieran los vértices del polígono.

Para iniciar la construcción de una figura se debe seleccionar el apuntador (primer icono) en la barra de herramientas.

Se debe tener en cuenta que cada icono de esta barra tiene múltiples funciones, y que en él se muestra la última función utilizada.

La función activa se muestra con el icono en fondo blanco y el nombre de la función en la parte inferior izquierda de la ventana. En este caso el icono activo es el puntero.

Seleccionamos la función **polígono** en el tercer icono, tal como lo muestra la **fig. 2**

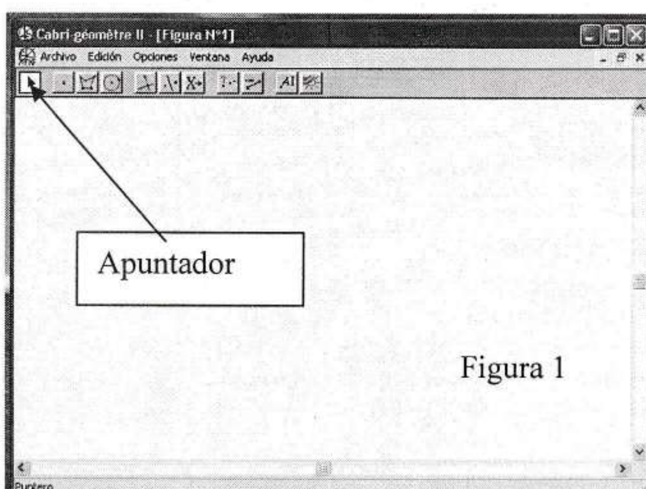


Figura 1

** Secretaría de Educación de Guanajuato, México.

Luego damos un **Clic** en el área de trabajo para iniciar el trazo y luego continuamos dando **clic** donde queremos cada vértice del polígono. Hay que tomar en cuenta que al trazar el último vértice debe cerrar la figura y para ello debe dar doble **clic**. (Ver el polígono de la **fig. 2)**

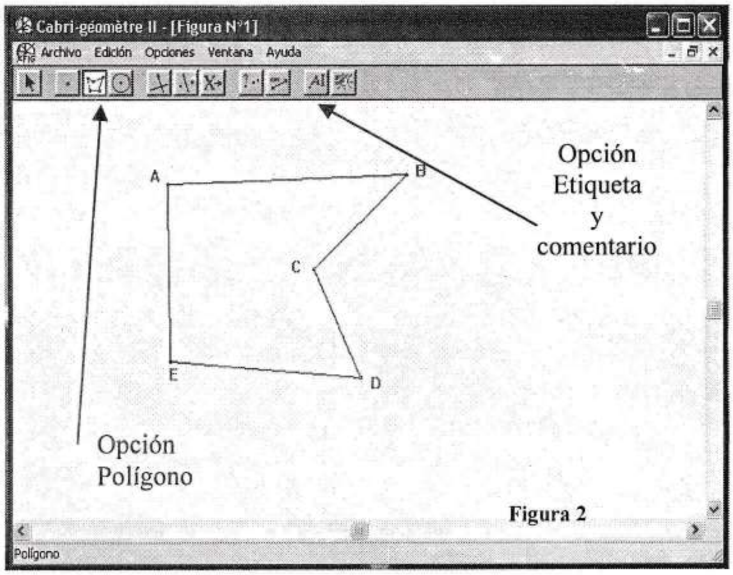


Figura 2

Para colocar las letras correspondientes a los vértices utilizamos la opción **Etiqueta** en el penúltimo icono y damos clic en cada vértice para ir colocando los rótulos correspondientes.

Para reubicar en forma correcta las Etiquetas seleccionamos la opción **puntero** y las arrastramos hasta el lugar deseado y para el rótulo de área del polígono utilizamos la opción **Comentarios.** Seleccionamos la opción **Puntero** y reubicamos el valor obtenido en el sitio correspondiente al área.

Para calcular el área del polígono, seleccionamos la opción **Area** en el menú que muestra la figura 3 y llevamos el cursor hasta uno de los lados del polígono y se da un clic. Podrá ver que el área se calcula automáticamente, luego se ubica en el lugar deseado utilizando la opción **Puntero**.

Si se quiere ver como cambia el valor del área en relación a lados arrastre cualquiera de los vértices para transformar el polígono, con lo cual la nueva área se irá mostrando en el mismo sitio.

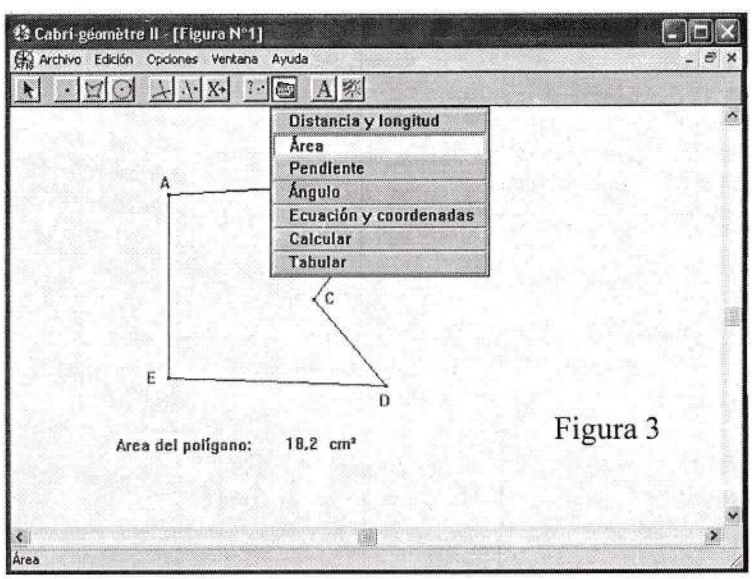


Figura 3

Referencia Bibliográfica

Alvear y otros (2000). <u>Cómo conectar la computadora a la educación</u>. Propuesta didáctica UTIL. Secretaria de Educación de Guanajuato. México D.F.